УДК 510.63

МЕДИЦИНСКАЯ ДИАГНОСТИКА И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС СИЛЛОГИСТИКИ

Сметанин Ю.М, Сметанин М.Ю*.

ГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет» , г. Ижевск, Россия

gms1234gms@rambler.ru

** ГУЗ Диагностический центр УР, г.Ижевск, Россия*

Misha1977@rambler.ru

В работе рассматривается одно из возможных приложений новой логической модели рассуждений на базе невырожденной булевой алгебры множеств. Предлагаемые методы поиска логических выводов из заданной системы посылок изначально ориентированы на применение компьютерной технологии решения и наглядное отображение логических соотношений между терминами задачи диагностики.

Ключевые слова: алгебраическая система, исчисление конституентных множеств, медицинская диагностика, силлогистика.

1. Введение

Наблюдение, оценка наблюдаемых явлений и умозаключение - таковы три обязательных этапа на пути к распознаванию болезней и диагнозу. Соответственно этим трем этапам все содержание диагностики можно разделить на три до известной степени обособленных раздела:

1) раздел, объемлющий методы наблюдения или исследования, - врачебная методика или диагностика в узком смысле слова;

2) раздел, посвященный изучению симптомов, обнаруживаемых исследованием, - семиология или семиотика;

3) раздел, в котором выясняются особенности мышления при построении диагностических заключений на данных наблюдения, - врачебная или клиническая логика.

Первые два достаточно подробно разработаны и составляют главное содержание всех руководств и курсов по диагностике. Третий же раздел - врачебная логика – совершенно недостаточно подробно теоретически и практически разработан: обычно в учебниках, в главах, посвященных частной диагностике отдельных заболеваний, можно найти только простые сопоставления или перечисления симптомов, только внешние вехи врачебной логики в виде пожеланий использовать основные логические законы и отношения между суждениями. Усвоение процедур проведения логических рассуждений - этой существенной и необходимой стороны дела происходит в клинике, в самом процессе врачебной деятельности и процесс этот во многом носит стихийный характер и слабоуправляем со стороны преподавателя. В сложившемся положении дел «виновата» не только медицина, но логика, которая до сих пор не может дать естественный для специалиста аппарат анализа рассуждений подобный силлогистике Аристотеля, которую логики до сих пор не могут органично встроить в математическую логику. Сама же эта силлогоистика, являющяяся основой западного мировоззрения, лукава (многосмысловая) в самой своей сути. В работе указывается один из возможных путей выхода из данной ситуации, посредством принятия односмыслового базиса силлогистики взамен аристотелевского ***(AXY, EXY, IXY, OXY)*** **[Сметанин 2009, 2010]**. Предлагается практичный и наглядный аппарат для разработки приемов мышления и верификации гипотез, характерных для клинической логики. В статье анализируется актуальная проблема логики: интерпретация аристотелевской силлогистики в современных терминах. Количество работ в мировой науке, посвященных этому вопросу превышает 500, что указывает на сложность проблемы. Для ее решения предложен целый ряд расходящихся решений, предложенных самыми авторитетными логиками. В работе предложена точная и непротиворечивая модель полисиллогистики. Предлагаемый подход к решению полисиллогизмов является новым, на его основе построена программа для анализа силлогизмов и полисиллогизмов.

2. Способы описания состояния пациента и схема постановки диагноза.

2.1. Применяемые шкалы измерений

Для выявления ситуации, в которой пациент находился и находится и, предположительно, будет находиться, необходимо собрать и обработать объективную и субъективную информацию о состоянии его здоровья. Эта информация может быть получена в результате обследования состоящего из процедур: простого наблюдения, анамнеза, медицинских измерений, лабораторных исследований. Тип полученной в результате информации о пациенте, способ ее записи и возможные способы оперирования с нею зависит в основном от типа измерительной шкалы. Теория измерений оперирует понятием «эмпирическая система с отношениями» *E*, которая включает в себя множество измеряемых объектов *A* и набор интересующих исследователя отношений между этими объектами *R; E={A,R}*. Например, множество A — это множество физических тел пациентов, а набор R — отношения между ними по весу, росту, температуре, давлению и т. п. Для записи результатов наблюдений используется символьная система с отношениями N, состоящая из множества символов M, например множества всех действительных чисел, и конечного набора отношений P на этих символах: N={M,P}.

Отношения P выбираются так, чтобы ими было удобно отображать наблюдаемые эмпирические отношения *R*. Если тело *t* тяжелее тела *q*, т. е. если имеет место отношение *R(t>q),* то цифровая запись веса тел *t=56* и *q=54* позволяет наглядно увидеть это эмпирическое событие в записи *P(56>54)*. Договоренность использовать именно такое отображение системы *E* на систему *N* означает выбор некоторого определенного правила отображения *g*. Тройка элементов *(E, N, g)* называется шкалой измерений.

Шкалы классифицируются относительно возможных преобразований измерений в них. Пусть g1 и *g2* различные отображения отношений между весами пациентов, выражающие веса в фунтах и килограммах. Тогда между результатами измерений в одной шкале и другой существует линейная зависимость $g_1(a) = k \cdot g_2(a), k > 0.$ Шкалы, допускающие линейные преобразования относятся к типу рациональных шкал. Шкалы, переходы между которыми описываются линейными $g_1(a) = k \cdot g_2(a) + b, k > 0$ преобразованиями, называются интервальными шкалами. Типичным примером интервальной шкалы является температурная шкала. Мы можем измерять температуру по шкале Цельсия или Фаренгейта. Переход от одной шкалы к другой осуществим при помощи линейного преобразования *C(x) = (5/9)F(x) - 160/9*. Линейное преобразование, в котором коэффициент ***k****=1*, называется сдвигом, а сама шкала называется шкалой разности. В медицине часто используются, так называемые, классификационные или перечислительные шкалы. По существу классификационная шкала есть не что иное, как деление класса *U* на взаимно непересекающиеся и непустые подклассы, объединение которых равно универсуму. Классификационная шкала описывает операцию деления с точностью до наименования классов деления. Это означает, что мы можем классам деления приписывать какие угодно имена, но обязаны при этом соблюдать правило: одинаковые классы получают одинаковые имена, разные классы - разные. Как отмечено в работе [Смирнов, 2007] классификационные шкалы имеют принципиальное значение для применения силлогистических и полисиллогистических выводов в процессе диагностики. Цитируем:

«С некоторым огрублением любые шкалы можно свести к классификационным. Область значения функции *f* (т.е. *N*) мы можем разбить на взаимно непересекающиеся непустые классы так, чтобы их объединение совпадало с универсумом. Тогда информацию, что значение *f(x)=n*, мы огрубляем и полагаем, что значение f(x) принадлежит классу, к которому принадлежит n. Например, мы имеем непрерывную интервальную температурную шкалу, принимающую значение от 33 до 42 градусов Цельсия. Область значений температуры мы можем разбить на классы:

резкая гипотермия	-от	34	до	35	включительно
гипотермия	-от	35	до	36	включительно
нормальная	-от	36	до	37	включительно
субфебрильная	-от	37	до	38	включительно
фебрильная	-от	38	до	40	включительно
предельная	-от	40	до	42	включительно.

Конечно, переход от интервальной (непрерывной) температурной шкалы к классификационной шкале означает потерю информации. Но этот переход дает нам возможность более просто производить логические операции. Отметим, что проделанная процедура сохраняет порядок между температурными классами. В общем же случае при переходе к классификационной шкале теряется и сам порядок.» конец цитаты.

2.2. Этапы диагностического процеса

Врачи со времен Гиппократа понимают, что одни свойства организма непосредственно наблюдаемы, а другие нет. Однако на основании установленных связей между наблюдаемыми и ненаблюдаемыми свойствами посредством правильных рассуждений врач может сделать заключение о ненаблюдаемых свойствах, зная наблюдаемые свойства. Таким образом, в медицине мы имеем два типа знаний: данные о конкретном пациенте, полученные в результате наблюдения, и знания о связях между свойствами, полученные в результате индуктивных обобщений опыта и достижений теоретической медицины. Некоторые характеристики пациента свидетельствуют о его типических чертах (пол, возраст, тип конституции), другие - о нормальном или ненормальном состоянии его организма. Поэтому нам надо знать не только значения той или иной характеристики, но и знать, отклоняются или нет эти значения от нормы. Некоторые отклонения от нормы квалифицируются как болезни. Болезнь проявляется через наблюдаемые свойства. Свойства, свидетельствующие о той или иной болезни, называются симптомами этой болезни.

В процессе клинической диагностики [Постовит 1991] выделяет две фазы и три этапа. Фазу анализа и дифференциации и фазу интеграции и синтеза, которые во времени протекают в трех периодах. Период сбора сведений – выявление всех симптомов заболеваний, период анализа и дифференциации - осмысление обнаруженных симптомов «сортировка» их по степени важности и характерности, период интеграции и синтеза – формулирование диагноза и его верификация. Три этапа развертываются по времени в форме циклов диагностической деятельности.

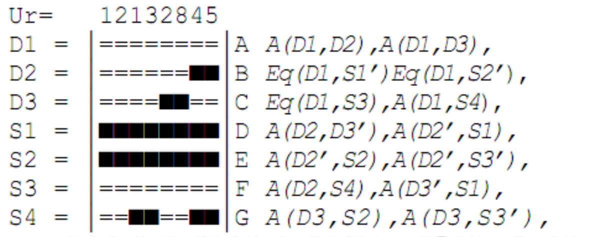
2.3. Используемая логическая моделъ.

Применяя логически обоснованные методы рассуждений к собранным данным и имеющимся знаниям, а также используя интуицию, врач выдвигает гипотезы и верифицирует их, осуществляя в конечном итоге постановку диагноза. Отличие от формальной логики здесь в том, что наличие симптома не обязательно свидетельствует о наличии, связанной с ним болезни и отсутствие симптома не позволяет утверждать об отсутствии, связанной с ним болезни. Предлагаемая в работе логическая модель описана Смирновым В.А. [Смирнов 2007], однако ее применение отлично от общепринятого в логике.

Пусть имеются знания о зависимостях между болезнями и симптомами, а также о наличии комбинаций симптомов, которые выражены суждениями в односмысловом ортогональном базисе силлогистики предложенным Сметаниным Ю.М. [Сметанин 2009]. Например, вербальные знания о связи болезней *Di* и *Sk* имеют вид четырех суждений ортогонального базиса силлогистики [Сметанин 2009, 2010] смотри (1):

$$A(D_1, S_1S_2^{'}S_3S_4^{'}),$$
$$A(D_2, S_1\, S_2S_3^{'}S_4),$$
$$A(D_3, S_1\, S_2S_3^{'}S_4^{'}) \qquad (1)$$
$$Eq(S_1S_2S_3^{'}, U)$$

Первые три означают, что болезни D_1, D_2 , D_3 являются причинами комплекса симптомов $S_1\&\neg S_2\&S_3\&\neg S_4$, $S_1\&S_2\&\neg S_3\&S_4$ и $S_1\&S_2\&\neg S_3\&\neg S_4$ соответственно. Здесь через **&** и **¬** обозначены логические операции «конъюнкция» и «отрицание». Кроме того у пациента выявлен комплекс симптомов $S_1\&S_2\&\neg S_3\&\neg S_4$. необходимо логически обосновать выводы, которые можно сделать относительно наличия (отсутствия) болезней D_1, D , D_3 у данного пациента. Тут математическая логика предлагает высказать предположение, а потом его доказать с помощью логического вывода, что безусловно не приемлемо для практикующего врача. В работе [Сметанин 2010] теоретические и компьютерные средства интерпретации комплекса суждений в алгебре множеств, которые позволяют наглядно представить их логические связи в алгебраической системе носителем которой является система множеств, сопоставленных терминам D_1, D_2, D_3, S_1, S, S_3,S_4.



A(D3,S4'), Eq(S1,S2), Eq(S1,S3'), A(S4,S1),A(S4,S1), Eq(S2,S3'), A(S4',S2), A(S4,S2), A(S4,S3'), A(S4',S3)

Рис.1 Наглядная основа для логического анализа

Также можно проверить, в том числе и визуально любые гипотезы относительно наличия (отсутствия) конкретной болезни, если это возможно на данном уровне развития медицинской науки и практики.

Интерпретация изображена на машинограмме рис. 1 определения смысла обозначений комплекса условий (1) даны в разделе 3.

На Рис. 1 показана линейная диаграмма [Лобанов 2009] на которой универсумом является множество порождаемое непустыми конституентами множеств D_1, D , D_3 $S_1\&S_2\&\neg S_3\&S_4$. Скажем другими словами понятными врачу. Каждая точка на горизонтальной оси ограниченной вертикальными линиями представляет собой пациента из множества пациентов, удовлетворяющих логическим условиям задачи постановки диагноза, то есть это пациент, который обладает комплексом симптомов $S_1\&S_2\&\neg S_3\&\neg S_4$ и состояние которого мы пытаемся определить, обладая запасом знаний о связи болезни с симптомами. А именно, «болезни D_1, D , D_3 являются причинами комплекса симптомов $S_1\&\neg S_2\&S_3\&\neg S_4$, $S_1\&S_2\&\neg S_3\&S_4$ и $S_1\&S_2\&\neg S_3\&\neg S_4$ соответственно».

Мы легко можем вывести следствие о том, что пациент (точка- элемент универсума) не может быть болен болезнью D1, эта болезнь изображена на диаграмме в виде пустого множества знаками (===), что означае, что при данном сочетании комплекса логических условий, описывающих состояние пациента и знания о связи болезней и симптомов, болезнь D1 можно не рассматривать как кандидат для диагноза.. Но мы не можем этого сказать о болезнях D2 и D3, некоторые пациенты из универсума с данными свойствами могут ими страдать, а могут и не страдать. Единственно, что мы определенно можем добавить к выводу относительно D1 это то, что любой пациент из универсума, обладающего свойствами (1) не может страдать болезнями D2 и D3 одновременно. Он может страдать от D2 либо от D3 либо не страдать ни от одной из них. Если мы обладаем дополнительной информацией, что пациент болен одной из трех перечисленных болезней, то можем вывести, что пациент болен, либо болезнью D2, либо болезнью D3. Данное дополнительное предположение *Eq(D2+D3,U)* легко добавить к системе суждений (1) и новая диаграмма, которая его учитывает, изображена на рис. 2. Она не оставляет сомнений в том, что пациент болен болезнью D2 либо D3, но не той и другой одновременно.

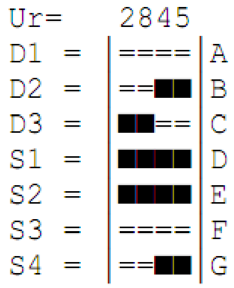


Рис.2 Окончательный диагноз при дополненном комплексе условий.

Полученное решение полностью совпадает с решением, приведенным в работе [Смирнов 2007], однако теперь его может получить и рядовой врач, а не только квалифицированный логик. При этом предлагаемый компьютерный метод решения полисиллогизмов одинаково легко решает значительно более сложные задачи.

Рассмотрим вероятностный подход к диагностике - учет вероятностных связей. Мы предполагали, что наши общие знания носят достоверный характер, то есть связь между болезнью и симптомом детерминирована. Однако в реальности она в большинстве случаев является стохастической. Цитируем [Смирнов 2007]

«Чаще мы имеем знания не вида "Если имеется болезнь *Di,* то имеет место *Sj"*, а скорее вида "Если имеется болезнь *Di,* то в *97%* имеет место *Sj"*. Использование такого рода знаний позволяет нам дедуктивно выводить следствия из этих знаний и данных о пациенте только с определенной степенью вероятности. Отметим, что сама процедура рассуждений строго дедуктивна (а не правдоподобна). Но мы выводим в качестве следствий не утверждения типа "Имеет место болезнь *Di"*, а утверждения "Имеет место болезнь Di с такой-то вероятностью".

Вместо утверждения, что болезнью *Di* больны три процента пациентов, мы говорим, что для произвольно взятого пациента вероятность того, что он болен болезнью *Di* равна *0.03*. Это утверждение мы записываем в виде *P(Di)=0.03*. Тогда утверждение "Если имеется болезнь *Di*, то будет наблюдаться набор симптомов *S* в *97%* случаев" запишется в виде условной вероятности *P(S/Di)=0.97* (вероятность того, что при наличии болезни *Di* будет иметь место набор симптомов *S*, равна *0.97*).

Из теории вероятностей известно, каким образом вычислить условную вероятность *P(S/Di)* по вероятностям *P(S & Di)* и *P(Di).* Последние две вероятности легко вычисляются на основании анализа статистических данных. Условная вероятность вычисляется по следующей формуле (2)

$$P(S/D_i)=\frac{P(S\cdot D_i)}{P(D_i)} \qquad (2)$$

Теперь мы можем использовать не только детерминистические связи между болезнями и симптомами, но и вероятностные связи. Задача вероятностной диагностики формулируется следующим образом: как по вероятности симптома относительно болезни установить вероятность болезни относительно симптома.

Пусть у нас имеется система связей между наборами симптомов и болезнями, имеющая вид $P(S^k/Di)$, где k - это номер конъюнкции симптомов $(k=1,...,m)$ и i - номер болезни $(i=1,...,n)$. Теперь мы можем вычислить вероятность болезни относительно фиксированного набора свойств S^l, которые присущи исследуемому пациенту. То есть нам надо найти $P(D_i/S^l)$. А это осуществляется по известной формуле Байеса:

$$P(D_i/S^l)=\frac{P(D_i)\cdot P(S^l/D_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(D_j)\cdot P(S^l/D_j)} \qquad (2)$$

Самый простой метод уменьшения числа рассматриваемых симптомов состоит в объединении некоторых из них в симптомокомплекс и рассмотрение этого симптомокомплекса как отдельного симптома. Например, слабость, сонливость, вялость, снижение работоспособности составляет малый симптом.

Однако, эта процедура не столь часта и не снижает значительно число подлежащих рассмотрению факторов, доступных наблюдению. Более существенным является понятие синдрома, которое подробно анализировалось в главе 6. А.С. Мелентьев резко возражает против отождествления понятий синдрома и симптомокомплекса. С логико-методологической точки зрения синдром есть новый фактор, не обязательно доступный непосредственному измерению. С синдромом связан некоторый симптомокомплекс, точнее, дизъюнкция симптомокомплексов. Наше знание о связи синдрома с симптомокомплексом выражается следующей импликацией:

$$C\rightarrow\varphi(A_1,...,A_n),$$

где С есть синдром, $A_1,...,A_n$ - факторы, определенные значения которых рассматриваются как симптомы и φ - функция, устанавливающая взаимосвязь симптомов.

Синдром связывается также с патогенезом, типом патологического процесса (воспаление, опухоль, интоксикация и т.д.). Наконец, синдром связан с нозологиями или синдромами более высокого уровня (Н)» конец цитаты из [Смирнов 2007]

3. Ортогональный базис как методологическая основа правильных рассуждений в предметных областях деятельности.

3.1. Роковые ля логики особенности базиса Аристотеля

Булева алгебра [Владимиров 1969] на основе множеств имеет непосредственное отношение к силлогистике, которое было замечено и исследовано Лейбницем, Жергонном, Венном, Эйлером и другими корифеями. В основе силлогистики Аристотеля лежат простые суждения, представленные четырьмя типами: **A** – общеутвердительное (все *X* есть *Y*); **E** – общеотрицательное (все *X* не есть *Y*); **I** – частноутвердительное (некоторые *X* есть *Y*); **O** – частноотрицательное (некоторые *X* не есть *Y*). Жергонну рис.3 удалось представить все классы Аристотелевых простых суждений, с помощью соотношений между множествами. Соотношения G_9, G_{11}, G_{13}, G_{14}, G_{15} получили в математике и логике название «жергонновых отношений». Их расширенный состав с учетом универсума показан на рис.3.

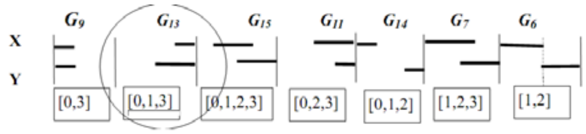


Рис. 3 Расширенные за счет G_6 и G_7 жергонновы отношения.

Кулик Б.А. [Кулик 1997] проиллюстрировал с помощью пяти классических жергонновых отношений многосмысловость базиса Аристотеля. Однако смыслов простых суждений еще больше если рассматривать расширенные жергонновы отношения смотри рис. 4. Ортогональный базис силлогистики

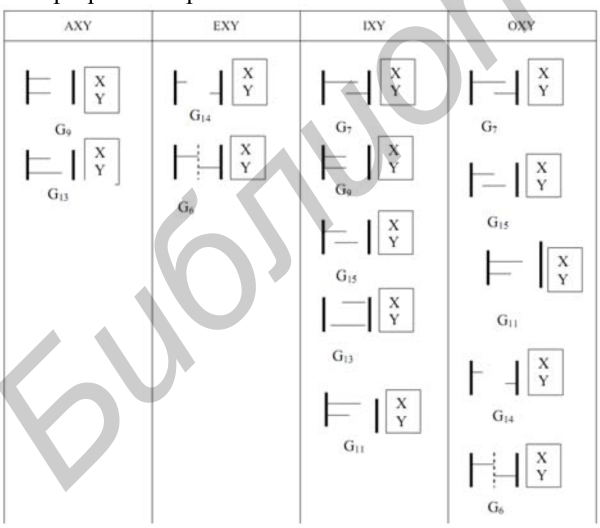


Рис. 4 Многосмысловость простых суждений из базиса Аристотеля

На рисунке 3 овалом обведено соотношение являющееся прообразом материальной импликации в формальной математической логике и элементом ортогонального базиса (ОБ) силлогистики предложенного Сметаниным Ю.М. [Сметанин 2009, 2010].

Пусть X и Y не пустые, собственные подмножества универсума. Тогда суждения 1 - 3 называются ортогональным базисом силлогистики (ОБ).

1. *A(X,Y)* – Все *X* суть *Y* в смысле $X \subset Y$ (общеутвердительное суждение по другому - левостороннее включение);
2. *Eq(X,Y)* – множество *X* совпадает с множеством *Y* по другому равносильность *;*
3. *IO(X,Y)* –(некоторые *X* есть *Y*) и (некоторые *X* не есть *Y*) и (*X* объединенное с *Y* не есть универсум) по другому независимое пересечение;

Покажем, как через суждения ОБ можно выразить расширенные жергонновы отношения (рис. 2).

1.G_9 (X,Y)= Eq (X,Y); U=XY+X'Y' – множество *X* совпадает (равно) с множеством *Y;*.

2. G_{13}(X,Y) = A(X,Y) - множество *X* есть собственное подмножество *Y* или событие *X* влечет наступление события *Y* либо *U=XY+X'Y+X'Y'*. Другими словами все *X* есть *Y* тогда и только тогда, когда произвольный элемент универсума *e* удовлетворяет только одному из соотношений $e \notin X$ и $e \notin Y$, либо $e \notin X$ и $e \in Y$, либо $e \in X$ и $e \in Y$;

3.G_{15} (X,Y) =IO(X,Y) либо *U=XY+XY'+X'Y+X'Y'*- существуют разбиение универсума на 4 непустые подмножества *XY, XY' , X'Y, X'Y'* . По другому можно сказать что (некоторые X естьY) и (некоторые X не есть Y) и (некоторые Y не есть X) и (некоторые не X не есть Y);

4. G_{11} = A(X',Y',) либо *U=XY+XY'+X'Y'*- правостороннее включение*;*

5. G_{14} = A(X,Y') все *X* не есть *Y* **л**ибо *U=XY'+X'Y+X'Y'*- неполная несовместимость;

6. G_7 = A(X',Y) либо *U=XY'+XY+X'Y* – зависимое пересечение*;*

7. G_6 = Eq(X,Y') либо *U=XY'+X'Y* – полная несовместимость.

Все семь расширенных жергонновых отношения выражаются одним из простых суждений *(A(X,Y), Eq(X,Y) IO(X, Y))* и поэтому в качестве базиса можно использовать только три функтора (простых суждения о множествах *X, Y*) это *A(X,Y)*, *Eq(X,Y)*, *IO(X,Y).*

С помощью введенного базиса ликвидируется многосмысловость базиса Аристотеля для расширенных жергонновых отношений как отношений между непустыми подмножествами универсума. Ортогональный базис можно применять как совокупности суждений о равенстве (неравенстве) пустому множеству некоторых конституентных множеств системы порождающих множеств смотри теоремы из работы [Сметанин 2010]:

$$1. G_{13}: A(X,Y) \equiv X \subset Y \equiv (XY' = \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)$$

$$2. G_9: Eq(X,Y) \equiv X = Y \equiv (XY' = \varnothing)(X'Y = \varnothing)$$

$$3. G_{15}: IO(X,Y) \equiv (X'Y' \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)(XY' \neq \varnothing)(XY \neq \varnothing)$$

Рассматривая жергонновы отношения в форме отношений между непустыми множествами, выраженные в форме равенства (неравенства) пустому множеству (либо его изнанке – универсуму) в работах [Сметанин 2009, 2010] удалось получить более адекватную по сравнению с моделью классической логики модель в форме невырожденной булевой алгебры на основе множеств [Владимиров 1969]. **В данной модели вместо высказывательных переменных и логических функций от них рассматриваются отношения между множествами прообразами этих высказывательных переменных в форме утверждений о равенстве (неравенстве) пустому множеству конституент сравниваемых множеств.**

3.2. Невырожденая булева алгебра на основе множеств – наиболее приемлемая модель для классической логики.

Рассмотрим критические недостатки классической модели, являющейся вырожденной булевой алгеброй [Владимиров 1969, стр. 25].

Во первых - не различение в AXY отношения строгого и нестрогого включения множеств сопоставляет отношениям $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ (в случае когда $(X \neq \varnothing)(Y \neq \varnothing)(X \subset U)(Y \subset U)$) одну и ту же операцию материальной импликации $x \Rightarrow y$. Обратим здесь внимание уважаемого читателя на очень важный момент касающийся высказывательных булевых переменных *x* и *y*. Это, отнюдь не какие - то произвольные неизвестно откуда взявшиеся переменные. Они непосредственно связаны с объективной реальностью, в которой имеются множество всех рассматриваемых предметов и, два непустые подмножества, всех предметов, которые имеют имена X и Y и находятся между собой в отношении ($X \subset Y$ либо $X \subseteq Y$). Таким образом, эти переменные x и *y* мы нашли не на улице, они являются характеристическими функциями множеств *X* и *Y* и их значение (истина или ложь) имеют не абстрактное как у Гильберта значение. Итак, характеристическая функция (индикатор) множества *X* ставит в соответствие любому элементу универсума $e \in U$, булеву переменную *x*, которая равна 1, если *e* принадлежим множеству *X* либо равна 0, если *e* не принадлежит *X*. Таким образом, смысл «истины» и «лжи» проявляется только на фоне инвариантной неопределенности – универсума. [Вальков 1985]. Соотношению $X \subseteq Y$ соответствует таблица 1, задающая соотношения между индикаторами этих множеств.

Таблица 1 - истинности для соотношения нестрогого включения.

x	***y***	
$e \in X$	$e \in Y$	$x \rightarrow y$
0	**0**	**1**
0	**1**	***i***
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Этой таблице соответствует формула трехзначной логики $xy + x'y' + ix'y$, равносильная утверждению $(x < y) \oplus (x = y)$. Здесь через ***i*** обозначено – третье истинностное значение «может быть», то есть это не материальная импликация.

Соотношению $X \subset Y$ соответствует таблица 2, задающая отношение между индикаторами *X* и *Y*.

Таблица 2 - истинности для соотношения строгого включения.

	x	***y***	
Nп п	$e \in X$	$e \in Y$	$x \Rightarrow y$
1	**0**	**0**	**1**
2	**0**	**1**	**1**
3	**1**	**0**	**0**
4	**1**	**1**	**1**

Этой таблице соответствует формула $x'y' + x'y + xy$ - материальная импликация.

Во вторых трактовка строгого и нестрогого включения как импликации, а самой импликации как булевой функции, для случая вырожденных жергонновых отношений, напрямую приводит к парадоксам материальной импликации. Это показано в работе [Сметанин 2011].

В работе [Владимиров 1996] рассматриваются булевы алгебры - алгебраические системы, которые в зависимости от обстоятельств могут интерпретироваться как системы событий, либо как системы высказываний, допуская и другие интерпретации. В частности там отмечено [Владимиров 1996 с.8]

« Буль в своей обширной монографии «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» отчетливо указал на связь построенного им исчисления с основаниями теории вероятностей. Эта связь основывается на аналогии между «событиями» и «высказываниями», позволяющей обслуживать логику и теорию вероятностей одним формальным аппаратом. Грубо говоря, «событие» — это то, что может произойти или не произойти; «высказывание» же — это то, что может быть истинно или ложно. Среди событий есть достоверные и невозможные; высказывания могут оказаться тождественно истинными или тождественно ложными. Между событиями возможна причинно-следственная связь: одно событие бывает иногда следствием другого. Точно так же между высказываниями возможна логическая связь; они могут вытекать одно из другого. Каждому событию может быть сопоставлено некоторое высказывание, утверждающее, что это событие произошло. С другой стороны, всегда можно истолковать высказывание как утверждение об осуществлении некоторого события. Сказанное сейчас убеждает в возможности построения единого «исчисления», которое могло бы, смотря по обстоятельствам, служить то «исчислением высказываний», то «исчислением событий». Такое исчисление и было создано Дж. Булем. В течение полувека, однако, оно развивалось в чисто «логическом» русле. Первое значительное исследование по аксиоматике теории вероятностей появилось лишь в 1917 г.; его автором был С. Н. Бернштейн). Последующие исследования в этой области, связанные в первую очередь с работами А. Н. Колмогорова), окончательно поставили теорию вероятностей на твердую почву и оказали большое влияние на смежные разделы математики, в особенности — на теорию меры». Конец цитаты.

Поскольку событие имеет интерпретацию в форме множества, а высказывание интерпретируется как пропозициональная переменная с двумя возможными значениями “истина” и ”ложь”, то изоморфизм между алгеброй событий и алгеброй их индикаторов возможен только в случае если множества - события в универсуме (достоверном событии), упорядочены отношением нестрогого порядка, покажем это. Пусть Σ и S два частично упорядоченных (отношением строгого порядка <) множества. Будем говорить, что отображение множества Σ в множество S есть строгий изоморфизм, (антирефлексивный изоморфизм) если оно взаимно однозначно и сохраняет строгий порядок (<), то есть неравенства $x<y$ $x,y \in \Sigma$ и $\varphi(x)<\varphi(y)$ $\varphi(x),\varphi(y) \in S$ равносильны. Ясно, что обратное отображение φ^{-1} есть также строгий изоморфизм. Множества Σ и S в случае надобности можно отождествлять. Для обозначения таких множеств можно использовать отношение равенства (=). Пусть характеристическая функция, или индикатор множества *X*, имеющая областью определения элементы универсума, определяется, равенством $x(e)=1$,если $e \in X$ и $x(e)=0$, если $e \notin X$, где e произвольный элемент универсума. Рассмотрим систему $\sum=\{X_i\}$ произвольных собственных подмножеств непустого множества *U*. Пусть на множествах из $\sum$ определен нестрогий частичный порядок посредством отношения $\subseteq$ нестрогого включения. Возьмем в качестве *S* систему всех характеристических функций множеств из $\sum$. Обозначим через φ отображение, сопоставляющее каждому X_i его характеристическую функцию x_i .Ясно, что φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\sum$ и *S* .Нестрогое включение $X_i \subseteq X_j$ }$ означает, что $x_i \le x_j$ для любого $e \in U$ поэтому неравенства $X_i \subseteq X_j$ и $x_i \le x_j$ равносильны. Таким образом, φ представляет собой изоморфизм между $\sum$ и *S*. Если рассматривать строгий частичный порядок на $\{X_i\}$, то неравенство $X_i \subset X_j$ посредством φ в случае ($e \in X_i$ и $e \in X_j$) указывает на $x_i = x_j$, а в случае ($e \notin X_i$ и $e \in X_j$) указывает на $x_i < x_j$.Очевидно, что строгого изоморфизма нет. В работе [Сметанин 2011] показано, что нет и изоморфизма, а есть гомоморфизм. С точки зрения частичного порядка безразлично, что рассматривать – алгебраическую систему множеств или изоморфную ей алгебраическую систему характеристических функций этих множеств. Это отражено в теореме Стона [Горбатов 1976]. Справедлива таким образом

Теорема 1. Алгебраическая система $\sum=\{X_i\}$ задаваемая системой множеств с определенным на них отношение строгого частичного порядка (строгое включение) не изоморфна алгебраической системе S их индикаторов, на которой строгий частичный порядок из $\sum=\{X_i\}$ отражается в частичный порядок.

В случае рассмотрения строгого частичного порядка строгого изоморфизма между этими системами нет, а есть гомоморфное отображение первой во вторую. При котором, теряется разделение отношений строгого включения и равенства между множествами. Проекционная модель [Вальков 1985] на основе индикаторов настолько грубая, что любое непустое подмножество универсума алгебраической системы множеств отражается в ней как ноль либо единица. Это в свою очередь является одной из причин парадоксов материальной импликации. Таким образом, мы не можем утверждать, что существует взаимно однозначное соответствие между отношением нестрогого включения $X \subseteq Y \equiv (X \subset Y) \oplus (X = Y)$ и материальной импликацией их индикаторов $x \Rightarrow y$.

Смотри таблицу 1 и таблицу 2 . Поэтому при моделировании рассуждений необходимо отказаться от использования нестрогого включения.

Далее будем рассматривать частично упорядоченные отношением строгого порядка системы подмножеств множества U, называемого далее универсумом. При этом отдельные его элементы в случае надобности будем считать его одноэлементными подмножествами. Частично упорядоченное отношением строгого порядка множество U называется строгой структурой (антирефлексивной структурой), если в нем при любых его подмножествах $X \subset U$, $Y \subset U$ система множеств $\{X,Y\}$ имеет точную верхнюю и нижнюю границы. Антирефлексивная структура *U* обладает свойством дистрибутивности, если для ее элементов выполняется соотношение $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Нулем (0) и (1) единицей антирефлексивной структуры *U* называются ее наибольший и наименьший элемент. В нашем случае это *U* и пустое множество.

Булевой алгеброй называется дистрибутивная структура с неравными друг другу нулем 0 и единицей 1 , в которой всякий элемент имеет дополнение. Таким образом булева алгебра всегда содержит не менее двух элементов. Алгебра, содержащая только

0 и 1 , называется вырожденной [Владимиров с.19]. **Классическая логика построена на основе вырожденной булевой алгебры, в которой 0 отождествлен с абстрактной ложью, а 1 с абстрактной истиной. То есть, она отражает объективную реальность как систему событий (минуя моделирование событий множествами) даже не в систему характеристических функции этих множеств, а в абстрактные по Гильберту пропозициональные переменные.**

Всякая алгебра множеств является булевой алгеброй относительно (строгого и нестрогого включения - как естественного упорядочения.) С каждой такой алгеброй автоматически связывается (в случае частичного упорядочения на основе нестрогого включения) изоморфная ей булева алгебра соответствующих характеристических функций. В случае частичного упорядочения на основе строгого включения между алгеброй множеств и алгеброй характеристических функций устанавливается неизоморфное отображение смотри Теорему 1, которое является причиной парадоксов материальной импликации. **Любое суждение может быть выражено как соотношение между множествами, поэтому можно в принципе отказаться от вырожденной булевой алгебры и развивать классическую логику на основе невырожденной булевой алгебры множеств, хотя бы уже потому, что в ней нет парадоксов материальной импликации .**

Для практических приложений невырожденных булевых алгебр построенных на основе конечных систем множеств важную роль играет

Теорема 2. [Кулик 1997] Если $S_1, S_2, \ldots, S_n$, – конечная система *S* множеств со свойствами кольца или полукольца, то существует и может быть построена конечная система *E* различных множеств $E_1, E_2, \ldots, E_m$, $(m \geq n)$ со следующими свойствами:

(1) для любой пары (E_i, E_k) при $i \neq k$ $E_i \cap E_k = \varnothing$;

(2) любое множество системы *S* в точности равно объединению некоторых множеств системы *E* Система множеств *E* называется системой конституент системы *S*. Количество конституентных множеств $m \leq 2^n$.

3.3. Решение полисиллогизмов посредством исчисления системы конституентных множеств.

При исследовании вопроса о том, какие множества можно построить посредством операций (объединения «+», пересечения «·», дополнения до универсума «'» - $X' = U \setminus X$ из порождающих *n* произвольных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, вводится важное понятие конституенты. Обозначим

$$X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & если \quad \sigma_i = 1 \\ \bar{X}_i, & если \quad \sigma_i = 0 \end{cases}$$

Множество вида, $\prod_{i=1}^{n} X_i^{\sigma_i} = X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \ldots X_n^{\sigma_n}$

где $\sigma_i = 0$ или $\sigma_i = 1$ назовем конституентой.

Общее число не пустых конституент не превосходит 2^n.

Существует важная связь множества пустых (непустых) конституент с бинарными отношениями между множествами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эта связь заключается в том, что множество пустых (непустых) конституент полностью определяется набором отношений между всевозможными парами порождающих множеств и их дополнений $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$. Набор этих отношений, выраженных суждениями ортогонального базиса назван инвариантом алгебраической системы с образующими $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Например, алгебраическая система на основе трех множеств изображена на рис. 5.

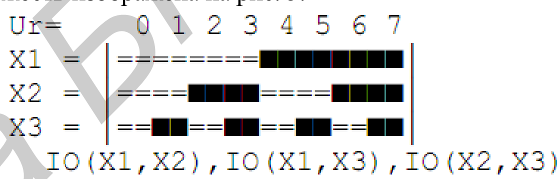


Рис.5 Алгебраическая система и ее инвариант.

Универсум задан как *Ur=[0,1,2,3,4,5,6,7]*, где элементы есть номера, присвоенные конституентам системы образующих множеств по порядку их нумерации. Номер 5 в двоичной форме 101 соответствует конституенте $X_1 X'_2 X_3$. Отношения *IO* - независимого пересечения между множествами определяют наиболее полную систему непустых конституент количество которых в данном случае $8=2^3$. Каждой алгебраической системе с перенумерованными множествами носителями $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно сопоставить множество номеров непустых конституент, которое названо базовым множеством номеров – БМН. Например, БМН алгебраической системы из 7 множеств X1=D1, X2=D2, X3=D3, X4=S1, X5=S2, X6=S3 и X7=S4 есть Ur=[12,13,28,45], все остальные конституенты, определяемые номерами из множества [0..128] являются пустыми множествами. Это предопределено отношениями, задаваемыми в (1) смотри раздел 2.3. В работе [Сметанин 2010], предлагается алгоритм, позволяющий строить БМН для системы перенумерованных образующих алгебраической системы и любой ее подсистемы, включая каждое из множеств *Xi*. Машинограммы являющиеся результатом работы компьютерной программы, реализующей данный алгоритм, показаны на рис. 1, 2, 5, 6. Предлагаемая интерпретация суждений как множеств образующих алгебраическую систему (булеву алгебру множеств) позволяет теоретически решать любые задачи полисиллогистики.

Определение терминов. В конкретном рассуждении каждое множество обозначается каким-то именем (символом или набором символов). Эти имена мы будем называть терминами рассуждения. Условимся, что терминами являются обозначения пустого множества и универсума, а также обозначения дополнений множеств. Если из множества всех терминов исключить термины ∅ и U, то оставшиеся термины мы назовем базовыми терминами суждения. В отношении *Rel(X,Y)* будем называть множество X левой, а множество Y правой частью.

Определение суждения. Суждением называется выраженное с помощью базовых терминов отношение включения, равенства или *IO*, в левой части и правой части которого содержится множество, выраженное как пересечение, объединение, дополнения множеств, представленных некоторыми базовыми терминами. Множество в левой части называется **субъектом суждения**, множество базовых терминов, представленных в правой части и само отношение *A(_,Y), Eq(_,Y), IO(_,Y),* – **предикатами суждения**.

Рассуждением или полисиллогизмом назовем список суждений, разделенный на два класса. Первый класс называется посылками, второй заключениями. Будем говорить, что рассуждение (полисиллогизм) правильное (ный), если из множества посылок логически следует каждый элемент заключения.

Очевидно, список посылок задает отношения между порождающими множествами в алгебраической системе Кантора. Эти отношения могут противоречить или нет отношениям задаваемым на порождающих множествах множеством заключений.

Задача 1. Доказать логическое следование всех заключений силлогизма из данных посылок.

Задача 2. Рассматривая посылки силлогизма как отношения на порождающей системе терминов, найти максимальное множество следствий, каждое из которых логически следует из множества посылок. Это множество естественно назвать **решением полисиллогизма**. Рассмотрим пример решения Задачи Порецкого [Порецкий 1884]. Являющейся задачей 1.

Между птицами зоосада существует 5 соотношений, выраженных в форме суждений:

Птицы певчие – крупные или обладающие качеством *Y*. Птицы, не имеющие качества *Y* – или не крупные, или не имеют качества *X*. Птицы певчие, в соединении с крупными, объединяют всех птиц с качеством *X*. Каждая некрупная птица есть и певчая, или обладающая качеством *X*. Между птиц с качеством *X* совсем нет таких птиц с качеством *Y*, которые, не будучи певчими, были бы крупные.

Определить, **были ли птицы качества *X* певчие или нет -** *A(X,S).* Узнать, содержится ли множество птиц качества X в множестве птиц качества *Y* - *A(X,Y)*. Найти, были ли среди качества *X* птицы качества *Y* и наоборот – *IO(X,Y).*

Пусть *X* – множество птиц качества *X, Y* – множество птиц качества *Y, S* - множество певчих птиц, *G* - множество крупных птиц. Здесь заданы 4 термина *G, S, X ,Y* и дополнительно указаны соотношения между элементами данных множеств, которые указывают на наличие дополнительных свойств каждого термина, наличествующих у других терминов. Универсум *U* это все птицы зоосада, при этом неявно подразумевается, что *U* есть сумма конституент множеств-терминов *G, S, X, Y*. В ортогональном базисе силлогистики суждения задачи Порецкого будут (при замене *AXY* на *A(X,Y)*) выглядеть так.

$$P1.A(S,Y\cup G) \qquad P2.A(\bar{Y},\bar{X}\cup\bar{G})$$
$$P3.A(X,S\cup G) \qquad P4.A(\bar{G},S\cup X) \qquad (2)$$
$$P5.E(X,Y\cap\bar{S}\cap G)=\overline{A(X,Y\cap\bar{S}\cap G)}$$

На рис. 6 показана интерпретация суждений (2).

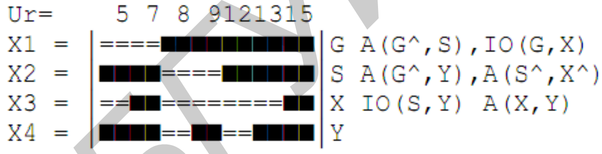


Рис. 6 Решение Задачи Порецкого и ее инвариант.

Справа от диаграммы приведен инвариант. Теперь можно определить, были ли птицы качества X певчие или нет (ответ – да). Можно узнать, то же в отношении птиц качества Y (ответ нет). Найти, были ли среди качества X птицы качества Y и наоборот (ответ да). Что касается, так называемых, логических уравнения и систем, то для данного подхода это прошлый и позапрошлый век. Например, результаты полученные Порецким [8,стр. 281] *x=xs; y=gy+g's; y=y+x*, тривиальным образом следуют из диаграммы, как и множество других, например *y=(s+gs'x'y)\gsx'y'*. Попробуем ответить на вопрос какой должен быть инвариант системы порождающих множеств, чтобы $Y \subset S$. Для этого мы должны либо добавить шестую посылку A(Y,S) в постановку задачи, что приведет к пустоте конституенты *GS'X'Y,* либо минимально «перестроить» *Ur* убрав из него ту же конституенту в результате мы получим новый инвариант. Ниже на диаграмме рис. 7 иллюстрируется решение модифицированной задачи с добавленной посылкой и его инвариант, отличие – отсутствие GS'X'Y и замена *IO(X,Y)* на *A(S',Y'):*

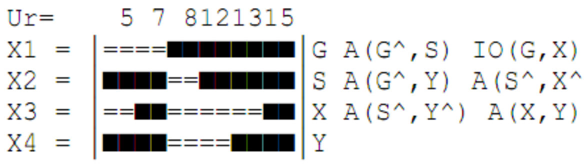


Рис.7 Интерпретация модифицированной задачи.

Идти по пути предначертанном Аристотелем, то есть формулировать правильные мыслительные формы (силлогизмы) заведомо бесперспективно (есть еще сориты, полисиллогизмы и другие формы умозаключений). Выход предложен в [Сметанин

2010], смысл его в том, чтобы строить интерпретацию умозаключения на базе подмножеств универсума - терминов рассуждения. Решение Задачи 2 проиллюстрировано на рис 1 и 2. Таким образом становится возможным верифицировать любую гипотезу на фоне данного множества посылок (суждений).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диагностика - предмет чисто методический; ее содержание составляют различные методы исследования. Никакое самое детальное и самое ясное изложение методов исследования с кафедры не может до конца научить диагностике. Все методы покоятся на восприятиях того или другого из органов чувств, а в диагностике, как уже говорилось, почти всех чувств одновременно. Это обстоятельство объясняет трудности, которые представляет диагностика. Только путем повторных, длительных и самостоятельных упражнений можно соответственным образом воспитать свои органы чувств, можно овладеть умением наблюдать и исследовать. Этим объясняется, почему опытный врач видит, слышит и осязает то, чего совершенно не замечает малоопытный. Но то же самое справедливо и для врачебного мышления, которое также вырабатывается посредством постоянного упражнения, путем активной самостоятельной работы. Закон, согласно которому развитие индивидуума повторяет развитие вида, имеет общее значение: он приложим и для образования. Чтобы стать ученым или врачом, нужно в сокращенном виде и ускоренным шагом пройти весь путь человеческой мысли и опыта в этом отношении: нужно научиться наблюдать, подмечать в частном общее, в общем - схватывать индивидуальное, видеть закономерность и логику в смене явлений. Активная и самостоятельная работа в одной области и с одним методом, как всякая тренировка в известном направлении, чрезвычайно облегчает в дальнейшем усвоение других методов и работу в других областях. Итак, практическая медицина вообще, и диагностика как ее методическая основа в частности, ввиду присущих им особенностей, требуют и особо тщательного и продуманного подхода к их изучению и усвоению. Здесь более чем где бы то ни было справедливо положение, что сущность образования всегда заключается в самообразовании. Только путем действительно самостоятельной работы, путем постоянного воспитания своих органов восприятия, путем настойчивого активного мышления можно овладеть методикой, в том числе, и **методикой применения логики,** но зато, владея методикой, можно без лишних проб и ошибок эффективно приобретать необходимые знания и опыт.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[Бочаров 2010] Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. – М.: Прогресс – Традиция, 2010. 336 с.

[Вальков 1985] Вальков К.И. Проекционное моделирование и автоматизация. Учебное пособие для факультета повышения квалификации. Л.: ЛИСИ, 1985, 86 с.

[Смирнов В.А. 2007] Смирнов В.А. Логико – методологическая модель диагноза// http://logic.ru/ru/node/535

[Постовит 1991] Постовит В.А. Диагноз и диагностика в клинической медицине – Л., изд. ЛПМИ, 1991 г. С. 9**6**

[Владимиров 1969] Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука 1969. С. 320, л**.**

[Лобанов 2009] Лобанов В.И. Русская вероятностная логика – М.: «Русская правда» 2009.- 320 стр.

[Сметанин 2009] Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Серия математика, механика. Компьютерные науки. Вып. 4 . 2009 г. С .155-166

[Сметанин 2010] Сметанин Ю. М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4.-С. 172-185.

[Сметанин 2011a] Анализ парадоксов материальной импликации в ортогональном базисе силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4.- с. 144-162

[Сметанин 2011b] Вероятностная логика и ортогональный базис силлогистики.// В настоящее сборнике.

[Горбатов 1976] Горбатов В.А**.** Теория частично упорядоченных систем. – М.: «Советское радио», 1976. – 336 с.

[Кулик 1997] Кулик Б.А. Логические основы здравого смысла. Под редакцией Поспелова Д.А. – СПб.: Политехника, 1997. – 131 с.

[Порецкий 1884] Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики.// Собрание протоколов заседаний секции физико - математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, т. 2, Каз., 1884.

MEDICAL DIAGNOSTICS AND ORTHOGONAL BASIS OF SYLLOGISTIC

Smetanin Yu.M., Smetanin M. Yu. *

Udmurt State University,Izhevsk

gms1234gms@rambler.ru

**Republican Clinic and Diagnostic Center, Izhevsk*

Misha1977@rambler.ru

RESUME

In this paper we consider one of the possible application of a new logical model of reasoning based on a non – degenerative Boolean algebra of sets. Suggested methods for finding logical conclusions from the given system of premises initially focused on the use of computer technology solutions and visual display of logical relationships between the terms of the problem of medical diagnostics.

Key words: algebraic system, calculation of the constituent sets, medical diagnostics, syllogistic.