

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра систем телекоммуникаций

В.А.Ильинков, Н.И.Беленкевич, В.Е.Романов

***МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ
ЗВЕНЬЕВ И СИГНАЛОВ
В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ***

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине “Моделирование систем телекоммуникаций”
для студентов специальностей
“Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения”,
“Многоканальные системы телекоммуникаций”
всех форм обучения

Минск 2005

УДК 621.391.832.2 (075.8)

ББК 32.968 я 7

И 46

Р е ц е н з е н т:

чл.-корр. Международной академии информатизации,
канд. техн. наук, доц. Л.А. Золоторевич

Ильинков В.А.

И 46 Моделирование линейных свойств звеньев и сигналов в телекоммуникационных системах: Учеб. пособие по дисц. “Моделирование систем телекоммуникаций” для студ. спец. “Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения”, “Многоканальные системы телекоммуникаций” всех форм обучения / В.А. Ильинков, Н.И. Беленкевич, В.Е. Романов.— Мн.: БГУИР, 2005. – 102 с.: ил.
ISBN 985-444-704-9.

Рассмотрены общие принципы математического моделирования систем телекоммуникаций (СТК). Представлены механизмы моделирования сигналов и линейных звеньев СТК во временной и частотной областях и на комплексной плоскости. Проанализированы методы моделирования линейных искажений сигналов. Представлена технология моделирования искажений измерительных сигналов СТК. Рассмотрены теоретические основы и алгоритм применения универсального метода расчета линейных искажений, основанного на представлении реакции в замкнутом виде.

УДК 621.391.832.2 (075.8)
ББК 32.968 я 7

ISBN 985-444-704-9

© Ильинков В.А., Беленкевич Н.И.,
Романов В.Е., 2005
© БГУИР, 2005

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика

ЗФ – заграждающий фильтр

ПФ – полосовой фильтр

ПЭВМ – персональная электронная вычислительная машина

СТК – система телекоммуникаций

ТВ – телевидение

ФВЧ – фильтр верхних частот

ФНЧ – фильтр нижних частот

ФЧХ – фазочастотная характеристика

ХРЗ – характеристика рабочего затухания

Библиотека БГУИР

ВВЕДЕНИЕ

Системы телекоммуникаций (СТК) характеризуются следующей совокупностью существенных признаков. Это наиболее динамично развивающаяся область науки и техники, следствием чего является быстрое увеличение объема специальной информации и малое время жизни производимых моделей; имеющееся многообразие систем и устройств телекоммуникаций различного функционального назначения; совместное использование широкополосных и узкополосных сигналов; широкий диапазон применяемых в СТК рабочих частот; многообразие методов и устройств формирования, передачи, распределения, приема и обработки сигналов; многообразие приемов схемотехнической реализации используемых в СТК преобразований сигналов; широкое использование в СТК последних достижений информатики, радио- и микроэлектроники, включая использование микропроцессоров и цифровой обработки сигналов; сложность и большое число преобразований сигналов и, как следствие, ориентация на применение больших и сверхбольших интегральных схем; высокие требования к параметрам качества систем и устройств телекоммуникаций.

Учитывая это, основным инструментом проектирования и разработки современных СТК является моделирование.

Как известно, моделирование есть метод научного познания, при котором исследуемый объект (система, устройство) замещается более простым объектом — моделью. Изучая последнюю, получают новую информацию об исследуемом объекте.

Различают физическое, математическое и полунатурное моделирование. При физическом моделировании исследуемый объект замещается физической моделью, воспроизводящей его с сохранением физической природы (например, летательный аппарат в аэродинамической трубе, макетирование СТК в реальной помеховой ситуации). При математическом моделировании изучается реализованная (на ПЭВМ) математическая модель объекта. Полунатурное моделирование — экспериментально-теоретический метод исследования, при котором математические модели одного или нескольких функциональных узлов системы (устройства) замещаются физическими моделями либо оригиналами.

Математическое моделирование — наиболее эффективное средство анализа и синтеза систем и устройств, поскольку оно: а) существенно интенсифицирует процессы исследования и разработки; б) решает задачи, часто невыполнимые другими методами; в) значительно снижает материальные и временные затраты на проектирование и разработку сложных систем (устройств) при одновременном повышении их качества.

1 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

1.1 Описание информационных систем

Понятие системы является сложным и многоплановым. Это — например, — биологическая популяция, общественное объединение, система связи. Система предназначена для выполнения определенных задач в заданных условиях и представляет собой единство закономерно расположенных и находящихся в диалектическом взаимодействии частей (подсистем). Приступая к разработке системы, исследователь накапливает различную информацию, которая реализуется в описании системы. Под описанием понимается совокупность сведений о системе, условиях ее функционирования и характеристиках внешних воздействий.

В общем случае система представляет совокупность K подсистем, имеет m (n) внешних входов (выходов) и l внутренних входов связей (рисунок 1.1).

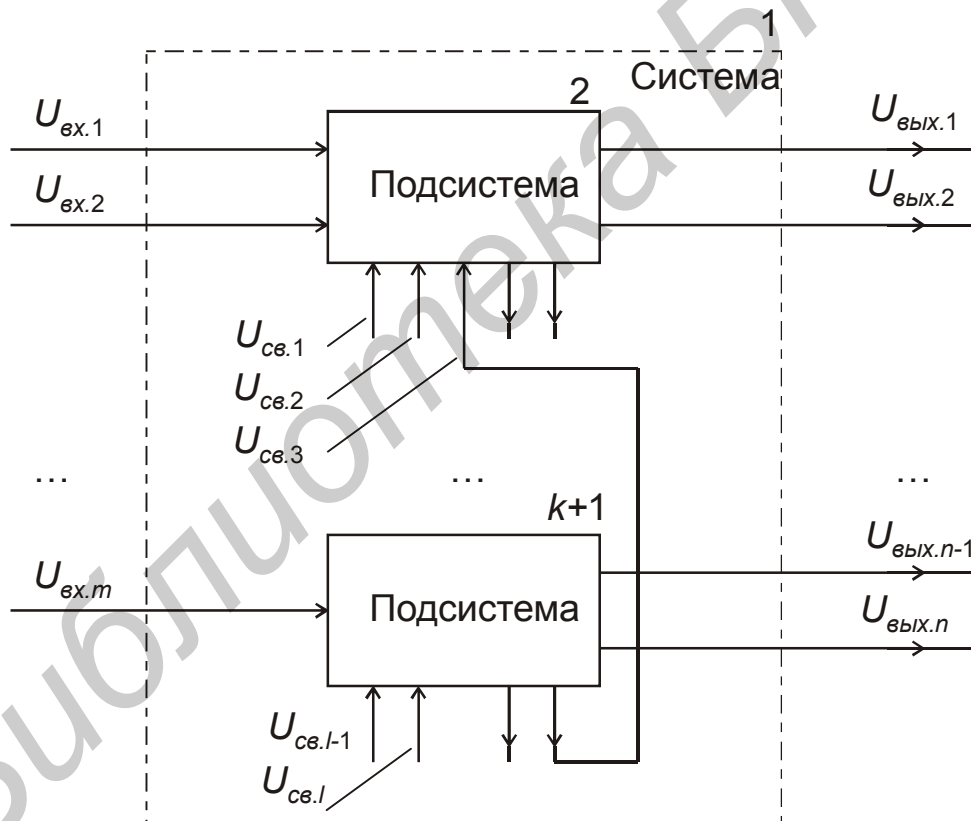


Рисунок 1.1 – Описание информационной системы

Входные воздействия (возмущения) образуют вектор $\vec{U}_{вх} = (U_{вх.1}, U_{вх.2}, \dots, U_{вх.m})$, выходные реакции — вектор $\vec{U}_{вых} = (U_{вых.1}, U_{вых.2}, \dots, U_{вых.n})$, а сигналы связи — вектор $\vec{U}_{св} = (U_{св.1}, U_{св.2}, \dots, U_{св.l})$. Свойства подсистем описываются

совокупностью S параметров, представляющих вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$. С учетом этого реакции на выходах системы можно представить в виде

$$U_{\text{вых}.i} = \Psi_i(\vec{U}_{\text{вх}.i}, \vec{U}_{\text{св}.i}, \vec{\alpha}_i, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

или в общей векторной форме

$$\vec{U}_{\text{вых}.i} = \Psi(\vec{U}_{\text{вх}}, \vec{U}_{\text{св}}, \vec{\alpha}, t), \quad (1.2)$$

где $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ — вектор операторов (оператор — совокупность математических и логических операций).

Очевидно, применительно к рисунку 1.1 $\vec{U}_{\text{вх}.1} = (U_{\text{вх}.1}, U_{\text{вх}.2}, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{U}_{\text{вх}.1} = \vec{U}_{\text{вх}.2}$, $\vec{U}_{\text{св}.1} = (U_{\text{св}.1}, U_{\text{св}.2}, U_{\text{св}.3}, 0, 0, \dots, 0)$ и $\vec{U}_{\text{св}.1} = \vec{U}_{\text{св}.2}$. Вектор $\vec{\alpha}_1$ описывает только те параметры системы, которые влияют на формирование реакции $U_{\text{вых}.1}$. В общем случае $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{\alpha}_2$.

В процессе функционирования вид и характер связей подсистем может изменяться. Это — отличительная особенность системы в целом, поскольку ее природа и разнообразие свойственных ей функций проявляются именно в поведении соединений подсистем. При этом задача строгого научного исследования должна учитывать, что существующие в природе и обществе системы в большинстве случаев содержат огромное количество элементов, состоят из большого числа звеньев (подсистем) и работают в присутствии изменяющихся с течением времени случайных возмущений, т.е. являются по своей сути сложными, вероятностными (стохастическими) и адаптивными.

Сформулированное триединое свойство, существенно усложняющее научное исследование, в полной мере характеризует очень важный класс технических систем — так называемые информационные системы, к которым принято относить системы связи, системы передачи информации, системы извлечения информации и системы управления. Системы связи в совокупности с частью систем передачи информации и управления образуют в современном представлении множество систем телекоммуникаций.

1.2 Показатели качества систем телекоммуникаций

Пригодность СТК к практическому использованию определяется ее эффективностью — способностью выполнять комплекс требуемых задач в заданных условиях эксплуатации. Количественная мера эффективности, позволяющая оценить качество работы СТК в разных ситуациях и сравнить СТК между собой, определяется показателями качества. Правильный выбор последних из возможного круга критериев имеет исключительное значение при проектировании, разработке и эксплуатации СТК. Он не может быть до конца формализован и требует творческого подхода исследователя. Важно при этом также учитывать, что показатель качества должен:

определять, в какой степени исследуемая СТК позволяет достичь поставленной цели;

быть количественным для обоснованного сравнения различных СТК;
допускать простую физическую интерпретацию: отражать сущность основных физических процессов в системе;

быть статистически устойчивым, т.е. иметь как случайная величина малое среднее квадратическое отклонение.

Эффективность любой СТК определяется назначением, результатами ее фактического применения, затратами на разработку и эксплуатацию. Поэтому наиболее общий количественный показатель эффективности задают в виде

$$\mathcal{E} = (F - Ц) / F_m, \quad (1.3)$$

где F_m — максимально возможная количественная оценка использования СТК, соответствующая полному выполнению комплекса требуемых задач; F — фактическая количественная оценка функционирования СТК в заданных условиях; $Ц$ — оценка стоимости разработки и эксплуатации системы.

Помимо общего показателя \mathcal{E} , для оценки эффективности часто применяют частные показатели, такие как:

техническая эффективность \mathcal{E}_T :

$$\mathcal{E}_T = F / F_m, \text{ или } \mathcal{E}_T = F / (F_m - F); \quad (1.4)$$

экономическая эффективность $\mathcal{E}_\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}_\mathcal{E} = F / Ц, \text{ или } \mathcal{E}_\mathcal{E} = F - Ц. \quad (1.5)$$

При этом показатели (1.4) широко используют на стадиях проектирования и разработки, а показатели (1.5) — на стадиях производства и эксплуатации СТК.

В общем случае количественная оценка F является алгебраической суммой взвешенных (взятых со взвешивающими коэффициентами) показателей качества. В качестве последних могут выступать пропускная способность, точность, надежность, стоимость, габариты, вес и др. Количество учитываемых показателей качества, особенно в случае очень сложных СТК, бывает весьма значительным, что существенно затрудняет оценку эффективности. Поэтому часто, особенно на начальном этапе проектирования и разработки, учитывают только главные показатели качества. Такими для СТК во многих случаях являются пропускная способность и точность.

Как известно, пропускная способность (производительность) СТК — количество информации, передаваемой в системе с требуемой достоверностью в единицу времени. С другой стороны, точность СТК определяет достоверность получаемой информации и, таким образом, непосредственно связана с пропускной способностью. Учитывая это, во многих случаях с целью упрощения эффективность СТК оценивают по одному показателю качества, а именно по точности.

1.3 Точность систем телекоммуникаций

Точность СТК определяется как внутренними факторами (структура и алгоритм функционирования системы, ее частотно-временные, амплитудные и шумовые характеристики), так и внешними условиями эксплуатации (алгоритм применения, дестабилизирующие факторы, естественные и организованные

помехи). Оценка точности — важнейшая задача при разработке и эксплуатации СТК.

В общем случае точность информационной системы можно оценить ошибкой

$$\vec{\Delta} = \vec{U}_{\text{вых}} - \vec{U}_{\text{вых}}^* \quad (1.6)$$

где $\vec{U}_{\text{вых}}^*$ — вектор требуемых (желаемых) реакций системы; $\vec{U}_{\text{вых}}$ — вектор ее фактических (ожидаемых) реакций.

Качественная оценка точности по критерию (1.6) очевидна: чем больше ошибка $\vec{\Delta}$, тем меньше точность и наоборот. Для получения количественной оценки вводят так называемую функцию потерь $I(\vec{\Delta}) = I(\vec{U}_{\text{вых}.j}, \vec{U}_{\text{вых}.j}^*)$. С учетом вероятностного характера СТК она определяет потери, соответствующие комбинации $\vec{U}_{\text{вых}.j}$ и $\vec{U}_{\text{вых}.j}^*$ в каждой отдельной (j -й) реализации.

В большинстве случаев достаточно, чтобы функция потерь удовлетворяла следующим условиям:

а) $I(\vec{U}_{\text{вых}.j}, \vec{U}_{\text{вых}.j}^*) \geq 0$, поскольку любое различие $\vec{U}_{\text{вых}.j}$ и $\vec{U}_{\text{вых}.j}^*$ расценивается как ошибка (потеря) СТК;

б) $I(\vec{U}_{\text{вых}.j}, \vec{U}_{\text{вых}.j}^*) = 0$, если $\vec{U}_{\text{вых}.j} = \vec{U}_{\text{вых}.j}^*$;

в) функция потерь монотонно возрастает и симметрична относительно точки $\vec{U}_{\text{вых}.j} = \vec{U}_{\text{вых}.j}^*$.

Этим условиям отвечает возможный класс простых функций потерь:

$$I(\vec{U}_{\text{вых}.j}, \vec{U}_{\text{вых}.j}^*) = \left| \vec{U}_{\text{вых}.j} - \vec{U}_{\text{вых}.j}^* \right|^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

В стохастических СТК реакции $\vec{U}_{\text{вых}}$ и $\vec{U}_{\text{вых}}^*$ — случайные функции времени, поэтому функция потерь тоже случайна, и в виде (1.7) не применима для количественной оценки. Необходимо ее дополнительное преобразование. Вид преобразований определяется используемым способом оценки точности СТК: по одной отдельно взятой реализации $\vec{U}_{\text{вых}.j}$; по ансамблю $\{\vec{U}_{\text{вых}}\}$ реализаций процесса $\vec{U}_{\text{вых}}$; по выборке N реализаций из ансамбля $\{\vec{U}_{\text{вых}}\}$.

Оценка по одной (j -й) реализации применяется в так называемых детерминированных (невероятностных) СТК. В этом случае для исключения зависимости функции потерь от времени функцию (1.7) подвергают дополнительному интегральному преобразованию. С учетом последнего предположим, что детерминированная СТК имеет один выход. Тогда функцию потерь для нее можно представить в виде

$$I(\vec{U}_{\text{вых}.j}, \vec{U}_{\text{вых}.j}^*) = F(\vec{\alpha}) = \left(\int_0^T W(t) \left| U_{\text{вых}.1j} - U_{\text{вых}.1j}^* \right|^k dt \right)^{1/k}, \quad (1.8)$$

где $W(t)$ — неотрицательная функция веса, обеспечивающая интегрирование выражения (1.8) на отрезке $[0, T]$ (обычно $W(t)=1$); $U_{\text{вых}.1j} = \Psi_1(\overrightarrow{U_{\text{вх}.1j}, \overrightarrow{U_{\text{св}.1j}, \overrightarrow{\alpha}_1}, t)$ (см. (1.1)); $k=1, 2$. Поэтому, учитывая последние замечания,

$$F(\overrightarrow{\alpha}) = \begin{cases} \int_0^T |U_{\text{вых}.1j} - U_{\text{вых}.1j}^*| dt, & k = 1, \\ \sqrt{\int_0^T |U_{\text{вых}.1j} - U_{\text{вых}.1j}^*|^2 dt}, & k = 2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Оценка точности СТК функцией потерь (1.9) при $k=1$ соответствует критерию средних потерь, а при $k=2$ — критерию средней квадратической погрешности. Функция $F(\overrightarrow{\alpha})$ при $k=1$ численно равна площади, заключенной между кривыми $\overrightarrow{U_{\text{вых}}}$ и $\overrightarrow{U_{\text{вых}}^*}$ на интервале оценки длительностью T . Оценка точности функцией (1.9) при $k=2$ является более жесткой в смысле требований к точности СТК при одинаковых исходных условиях. Ее использование, по сравнению с вариантом $k=1$, существенно усложняет анализ и особенно синтез СТК. Следует отметить также, что в задачах оптимизации функцию потерь называют еще функцией цели или целевой функцией.

Как показано, оценка точности СТК с помощью функции потерь в виде (1.8), (1.9) применима только к детерминированным СТК. При этом необходимо учитывать, что любая динамическая система становится вероятностной и описывается стохастическими дифференциальными уравнениями в любой из трех следующих ситуаций: хотя бы на одном из ее входов присутствует случайное воздействие; хотя бы один из параметров $\overrightarrow{\alpha}$ системы изменяется случайным образом; от реализации к реализации имеют место случайные начальные условия. Основываясь на этом, предположим теперь, что исследуемая СТК с одним выходом отнесена нами к классу вероятностных систем. В этом случае реализацию $U_{\text{вых}.1j}$ можно рассматривать только как одну из реализаций ансамбля $\{U_{\text{вых}.1j}\}$ реализаций процесса $U_{\text{вых}.1}$. Она уже не характеризует полностью СТК и не позволяет однозначно найти показатель качества (функцию потерь) $F(\overrightarrow{\alpha})$. Для его вычисления необходимо провести статистическое усреднение по ансамблю $\{U_{\text{вых}.1j}\}$ реализаций.

1.4 Методы анализа систем телекоммуникаций

Анализ и синтез — неотъемлемые составные части процесса проектирования и разработки любой информационной системы, в том числе СТК. Классификация основных методов анализа и синтеза СТК приведена на рисунке 1.2.

В общем случае под анализом понимают нахождение аналитической зависимости показателя точности (функции потерь) СТК с известной структурой и исследование свойств этой системы путем оценки точности ее функциониро-

вания в различных условиях. При анализе применяют теоретические (математические) и экспериментальные методы. В свою очередь, математический анализ подразделяется на аналитический и численный. Достоинство аналитического метода — возможность получения результата (функции потерь $F(\vec{\alpha})$) в виде математической формулы, которая позволяет просто и наглядно проследить зависимость показателя качества от внешних воздействий, начальных условий, структуры и параметров СТК.

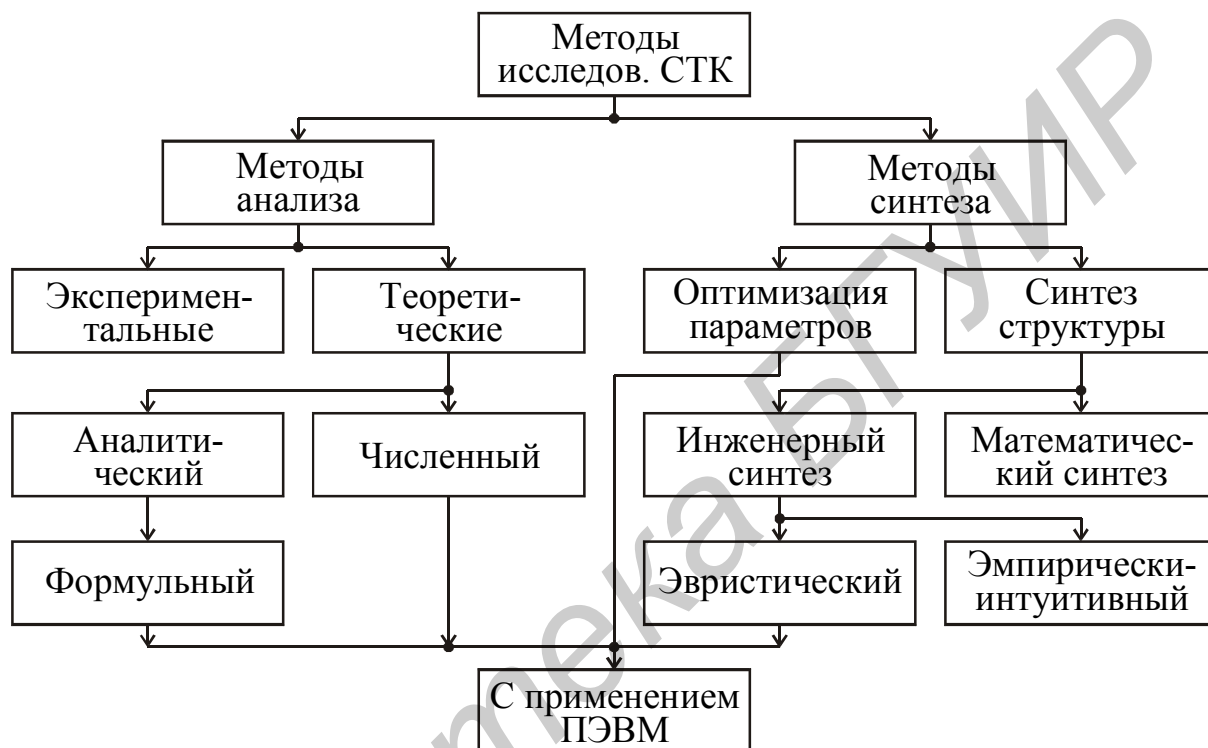


Рисунок 1.2 – Основные методы анализа и синтеза СТК

Как показано в подразд. 1.1, в общем случае СТК, являясь сложной, стохастической и адаптивной, содержит большое количество подсистем и связей, находится под влиянием случайных воздействий, имеет изменяющиеся по случайному или (и) детерминированному закону параметры. Работу такой системы можно описать системой обыкновенных стохастических нелинейных дифференциальных уравнений I порядка с переменными коэффициентами (сравните с (1.1)):

$$\frac{dU_{вых.i}}{dt} = \Theta_i(\overrightarrow{U_{вх.i}}, \overrightarrow{U_{св.i}}, \overrightarrow{\alpha_i}, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.10)$$

Вектор $\overrightarrow{U_{вых}^*}$ требуемых (желаемых) реакций считается заданным, поэтому для оценки точности СТК функцией потерь $F(\vec{\alpha})$ необходимо найти решение системы (1.10). Использование при этом аналитического метода возможно только в наиболее простых случаях, к которым исследователь стремится свести

решаемую задачу. Процедура упрощения состоит из трех этапов и выполняется по схеме “детерминизация – замораживание параметров – линеаризация”.

Этап детерминизации предполагает оценку точности СТК по одной реализации, т.е. переход от стохастической к детерминированной системе. На практике его можно применять при анализе СТК с высоким значением отношения сигнал-помеха. Выполнение этапа замораживания параметров сводит нестационарную систему к стационарной, что допустимо в случае СТК, характеризующихся медленным изменением параметров по сравнению со скоростью протекания переходных процессов. Наконец, этап линеаризации приводит к детерминированной стационарной линейной СТК. В зависимости от особенностей использования последней разработаны разные методы линеаризации: малых возмущений; гармонической линеаризации; статистической линеаризации; комбинированные.

Совместное применение трех этапов упрощения сводит задачу анализа СТК к изучению ее математической модели, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Методы аналитического решения подобных систем уравнений хорошо известны: например совместное использование операторного метода и метода Крамера. С их помощью находят аналитическое решение для ожидаемых реакций $\overline{U}_{вых}$ и, в конечном итоге, для функции потерь $F(\vec{\alpha})$ (1.9). Однако в большинстве случаев математическая формула последней оказывается настолько сложной и громоздкой, что проследить по ней зависимость показателя точности от параметров $\vec{\alpha}$ невозможно. Тогда дополнительно привлекают формульный метод анализа, при котором с помощью ПЭВМ вычисляют по заданной формуле значения показателя точности при различных значениях параметров.

Помимо детерминированных стационарных линейных СТК, исследовать аналитическим методом возможно также простейшие стохастические системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями II порядка. В этом случае на основе теории марковских процессов решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова удается найти аналитическое выражение для плотности $W(\vec{\Delta})$ вероятности ошибки $\vec{\Delta}$ (1.6). Применительно к СТК других видов используют численный метод анализа. Для его выполнения из большого количества методов численного решения дифференциальных уравнений выбирают наиболее подходящий, учитывая при этом свойства системы (1.10) и особенности применяемой системы программирования и ПЭВМ.

Отметим, что численный анализ вероятностных систем часто называют прямым вероятностным моделированием. Для его проведения необходимо располагать: а) генераторами (реализуемыми наиболее часто программным способом) случайных и детерминированных процессов, имитирующих входные воздействия $\overline{U}_{вх}$, начальные условия $\overline{U}_{вых,0}$ и функции изменения параметров $\vec{\alpha}$; б) реализованной на ПЭВМ математической моделью исследуемой СТК (на-

пример в форме (1.1) или (1.10)), позволяющей получать решения $\overrightarrow{U}_{\text{вылх}}$ в виде случайных функций времени; в) алгоритмами и программами статистической обработки выборки из ансамбля $\{\overrightarrow{U}_{\text{вылх}}\}$. При помощи статистической обработки решений $\overrightarrow{U}_{\text{вылх}}$ находят необходимые статистические оценки ошибки $\overrightarrow{\Delta}$: математическое ожидание $m_{\overrightarrow{\Delta}}(t_1)$, дисперсию $\sigma_{\overrightarrow{\Delta}}^2(t_1)$, корреляционную функцию $R_{\overrightarrow{\Delta}}(t_1, t_2)$, плотность $W(\overrightarrow{\Delta}, t_1)$ вероятности. Прямое вероятностное моделирование — универсальный метод анализа СТК, который работает всегда, когда реализована на ПЭВМ математическая модель системы.

В целом теоретические методы анализа, реализующие технологию математического моделирования, обладают широкими возможностями: позволяют активно исследовать СТК изменением ее структуры и параметров в любых желаемых пределах; оценивают точность системы с высокой достоверностью при полноте математической модели; могут применяться на любой стадии разработки и эксплуатации СТК.

Достоинство экспериментальных методов анализа (лабораторных, полевых) — возможность устранения погрешностей, связанных с построением математической модели СТК. Недостатки же их прямо противоположны положительным свойствам математических методов.

1.5 Методы синтеза систем телекоммуникаций

В общей постановке задачи под синтезом СТК понимают нахождение принципа действия системы, обеспечивающего наилучшее сочетание нескольких показателей качества при произвольных (в пределах заданных ограничений) вариациях ее структуры и параметров. На начальной стадии проектирования и разработки СТК синтез обычно проводят по главному показателю качества — точности.

Синтез структуры можно выполнять математическим и инженерным методами (см. рисунок 1.2). При математическом синтезе аналитическим решением находят форму сигналов, алгоритм их преобразования и аппаратной реализации, т.е. структуру СТК, включая численные значения параметров $\overrightarrow{\alpha}$, обеспечивающие минимальное значение функции потерь. Метод широко применяется на практике, позволяя найти, по сравнению с другими методами синтеза, наилучший (оптимальный) вариант построения системы. В основе математического синтеза СТК по критерию (1.9) ($k=1$) минимума средних потерь, называемому еще критерием среднего риска, лежит теория статистических решений.

Инженерный синтез СТК подразделяется на эмпирически-интуитивный и эвристический. В первом случае исследователь на основе своего опыта и знаний предлагает несколько вариантов построения системы и соответствующих им функциональных (структурных) схем. По последним создают несколько физи-

ческих моделей (прототипов) проектируемой СТК. Далее проводят экспериментальные исследования прототипов (одновременно возможна оптимизация параметров), сравнивают их по показателю качества и выбирают лучший вариант. Недостатками этого метода являются а) большие материальные и временные затраты, особенно при проектировании сложных и дорогостоящих СТК; б) отсутствие гарантии оптимальности найденного решения.

При эвристическом методе исследователь также предлагает несколько вариантов (функциональных схем) СТК. Для каждого варианта строится математическая модель, реализуемая на ПЭВМ, и выполняется ее оптимизация. Оптимизированные варианты сравниваются по показателю точности и выбирается лучший, который обычно обеспечивает квазиоптимальное решение. Близость его к оптимальному варианту можно установить сравнением с результатами математического синтеза.

В частной постановке, когда структура проектируемой СТК задана, по крайней мере, с точностью до функциональной схемы, задача синтеза сводится к оптимизации параметров: выбору такого их сочетания, при котором обеспечивается оптимальное значение показателя качества. В общем существуют две постановки задачи оптимизации системы при заданной структуре. Одна из них — оптимизация параметров — предусматривает уточнение структуры СТК (например, определение числа каналов обработки или числа каскадов усилителя). Вторая — параметрическая оптимизация — предполагает структуру системы неизменной, она лишь уточняет численные значения параметров. Отсюда вытекает, что оптимизация параметров включает в себя параметрическую оптимизацию в качестве своего заключительного этапа.

Для пояснения особенностей параметрической оптимизации рассмотрим задание показателя точности СТК в форме (1.9) ($k=1$), представив его в виде

$$F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \int_0^T \left| U_{\text{вых.1j}}(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, t) - U_{\text{вых.1j}}^*(t) \right| dt, \quad (1.11)$$

где $U_{\text{вых.1j}}^*(t)$ ($U_{\text{вых.1j}}(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, t)$) — желаемая (фактическая) реакция; $\vec{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)$ — вектор оптимизируемых, а $\vec{\gamma} = (\alpha_{a+1}, \alpha_{a+2}, \dots, \alpha_s)$ — вектор неоптимизируемых параметров; $a \leq s$.

Тогда параметрическая оптимизация означает выполнение процедуры достижения минимума функции потерь ($F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \rightarrow \min$ при $\vec{\gamma} = \text{const}$), для чего, как известно, необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\text{grad}F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \nabla F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \partial F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) / \partial \vec{\beta} = 0. \quad (1.12)$$

В соответствии с ними суть процедуры заключается в последовательной настройке вектора параметров $\vec{\beta}$ так, чтобы при каждой последующей попытке значение $F(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ уменьшалось. Число a оптимизируемых параметров может быть велико. С учетом этого к настоящему времени разработано достаточное количество методов поиска оптимального решения.

Если оценку (1.11) удастся представить алгебраическим уравнением относительно вектора $\vec{\beta}$, то поиск оптимальных значений параметров выполняют на ПЭВМ в виде непрерывно протекающего процесса. Такая параметрическая оптимизация называется статической и относится к задачам линейного и нелинейного программирования. Изменение одного или нескольких значений вектора $\vec{\beta}$ немедленно изменяет показатель точности $F(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$. Параметрическая оптимизация существенно усложняется, если аналитическое решение системы (1.10), описывающей исследуемую СТК, отсутствует, что, как показано выше, характерно для большинства систем. Здесь изменение функции $F(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ потерь из-за вариации параметров $\vec{\beta}$ можно оценить только после решения системы дифференциальных уравнений и вычисления показателя точности с учетом полученного решения $U_{\text{вых.1j}}(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, t)$. Для оценки изменения показателя точности при последующем дискретном изменении вектора $\vec{\beta}$ требуется новое (численное) решение системы (1.10). Такая параметрическая оптимизация называется динамической. В отличие от статической она выполняется дискретно, шагами, и потому называется еще пошаговой.

1.6 Процедура математического моделирования

Методы анализа и синтеза СТК используют технологию математического моделирования, реализуемого в основном с применением ПЭВМ (см. рисунок 1.2) и называемого поэтому также машинным моделированием. Сама процедура математического моделирования состоит из совокупности последовательно выполняемых этапов, которые представлены блок-схемой на рисунке 1.3.

Формулировка задачи исследования включает: а) совокупность новых сведений, которые необходимо получить при моделировании СТК; б) определение границ моделируемой системы; в) совокупность ограничений и допущений, используемых при моделировании. После формулировки задачи выполняется этап сбора и оценки априорной информации. Объем исходной информации должен быть достаточным для построения состоятельной математической модели. Далее (третий этап) выбирается вид функции $F(\vec{\alpha})$ потерь (1.9) ($k=1$ либо $k=2$) для оценки точности исследуемой СТК, после чего принимается положительное либо отрицательное решение о моделировании объекта. Отказ от моделирования возможен в следующих случаях: на этапе сбора информации получены все искомые сведения; объем априорной информации не позволяет построить математическую модель.

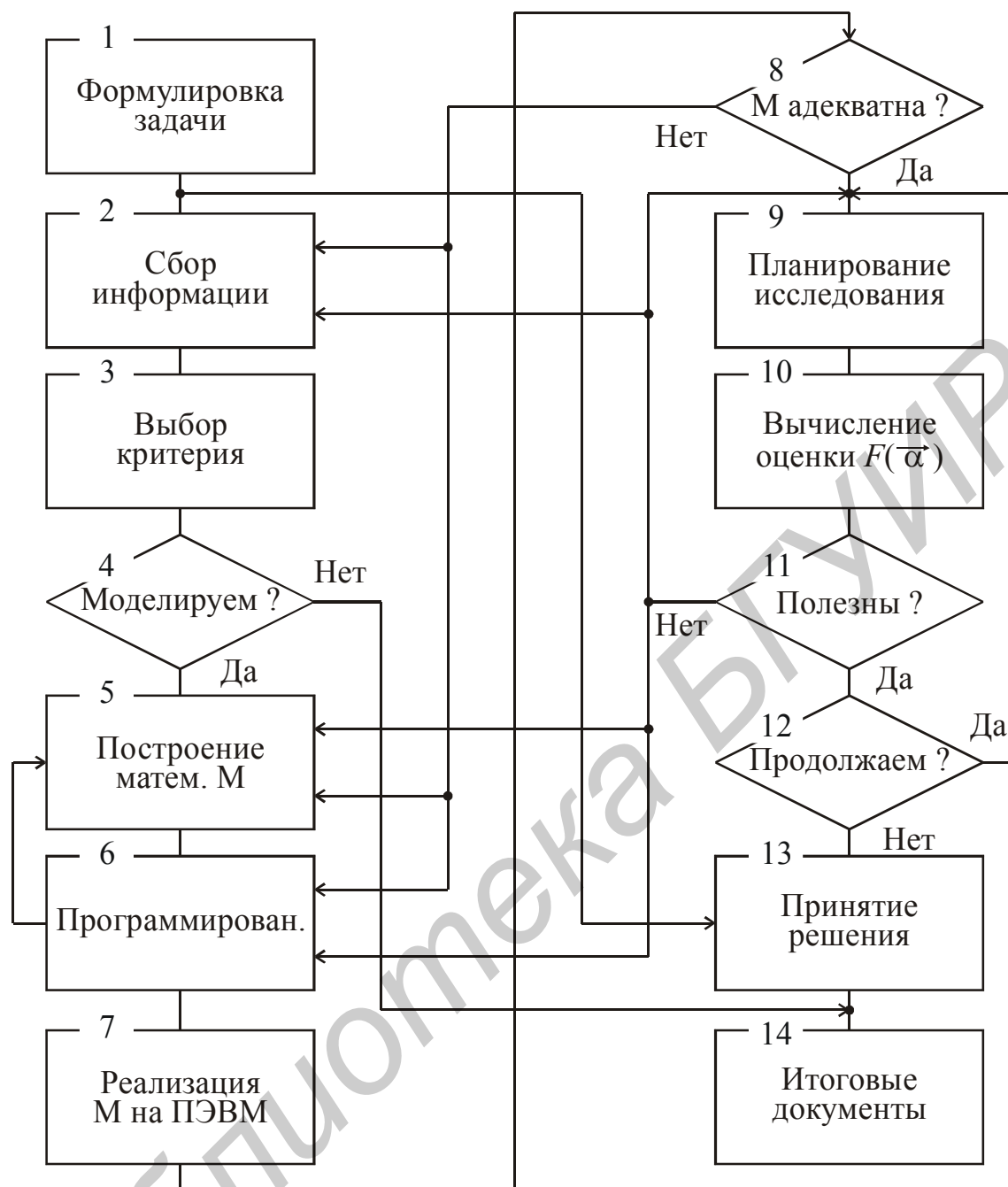


Рисунок 1.3 – Блок схема процедуры математического моделирования

Математическая модель — формальное описание исследуемой СТК совокупностью математических и логических операций. В общем случае она может быть представлена в незамкнутой и замкнутой (разрешенной) формах, что определяется свойствами системы (1.10) дифференциальных уравнений. Отсутствию аналитического решения системы соответствует незамкнутая, а наличию — замкнутая форма математической модели. Этап построения последней является сложным и многообразным и состоит, в свою очередь, из следующих последовательно выполняемых этапов: неформального описания; формального описания; оптимизации функциональной (структурной) схемы; оптимизации

моделей звеньев; оптимизации моделей сигналов; формирования математической модели системы.

На этапе программирования выбираются операционная система, система (язык) программирования и тип ПЭВМ, отбираются методы и алгоритмы решения задачи, разрабатываются блок-схема программы-оболочки и блок-схемы программ-процедур, а также сама моделирующая программа, реализующая математическую модель СТК. В процессе программирования возможна коррекция математической модели.

Реализация модели на ПЭВМ включает трансляцию и отладку программы. Отладка в случае сложной и громоздкой модели может занимать значительное время. Далее проверяется адекватность разработанной математической модели исследуемой СТК. С этой целью при средних (наиболее характерных) значениях параметров $\vec{\alpha}$ рассчитываются реакции $\vec{U}_{вых}$ системы на известные воздействия $\vec{U}_{вх}$ и значения функции $F(\vec{\alpha})$ потерь. Результаты расчетов сравниваются с ожидаемыми (известными из других исследований). Если оказывается, что модель не адекватна моделируемому объекту, то вносятся необходимые изменения в выполнение этапов сбора информации, построения математической модели и программирования (см. рисунок 1.3).

Целью планирования исследования является такая организация процесса математического моделирования, чтобы за минимальное время получить всю информацию, необходимую для принятия решения. Планирование включает определение типов и очередности подачи входных воздействий, выбор диапазонов и шагов изменения их мгновенных значений, определение перечней неоптимизируемых $\vec{\gamma}$ и оптимизируемых $\vec{\beta}$ параметров, диапазонов и шагов изменения последних. По разработанному плану рассчитываются значения реакций и функции потерь, после чего выполняется интерпретация полученных результатов (этап 11): построение выводов о функционировании объекта по данным моделирования. Если результаты являются: а) бесполезными (новая информация о системе отсутствует), то проводят ревизию предыдущих этапов (сбора информации, построения модели, программирования и планирования исследования); б) если полезными, но их объем недостаточен для принятия решения, то продолжают математическое моделирование, для чего составляют новую программу исследования; в) если полезными и достаточными, то их используют для принятия решения.

На этапе принятия решения исследователь, сопоставляя полученную информацию с поставленной задачей, принимает окончательное решение о структуре системы, оптимальных значениях параметров и ее поведении в реальных условиях. Решение оформляется в соответствующей форме в итоговых документах. Если результаты сопоставления неудовлетворительны, принимается решение о новом цикле математического моделирования: выполнении заново всех этапов, начиная с формулировки задачи исследования.

1.7 Особенности системы телекоммуникаций как объекта математического моделирования

СТК обладают общим для информационных систем триединым свойством: являются сложными, вероятностными и адаптивными (см. подразд. 1.1). Одновременно они как объекты математического моделирования обладают дополнительно следующими существенными особенностями, а именно:

являются быстродействующими системами, в которых одновременно присутствуют преобразования относительно низкочастотных информационных сигналов и переносящих их высокочастотных радиосигналов;

обладают большим количеством учитываемых показателей качества;

характеризуются многообразием и сложностью моделей воздействий (сигналов), многообразием и сложностью моделей линейных и нелинейных функциональных звеньев и, как следствие, сложностью формирования математической модели системы в целом;

математическое моделирование СТК требует большого объема вычислений, что необходимо учитывать при выборе (построении) моделей звеньев, сигналов и метода моделирования.

Сформулированные особенности существенно усложняют процедуру математического моделирования СТК, требуют от исследователя, помимо хорошего знания физических процессов в исследуемой системе, также глубоких знаний по математике, теории цепей и сигналов, программированию, другим дисциплинам, что возможно в редких случаях. Учитывая это, актуальной является разработка так называемых многофункциональных программ (пакетов программ), пригодных для математического моделирования различных СТК, не требующих от исследователя глубоких знаний по совокупности дисциплин, т.е. предназначенных для широкого круга специалистов в области телекоммуникаций.

Последующий анализ показывает, что подобная многофункциональная программа должна иметь развитый диалоговый режим работы и обязательно содержать в своем составе следующие модули: стационарную и оперативную библиотеки моделей сигналов; стационарную библиотеку моделей линейных и стационарную библиотеку моделей нелинейных звеньев; оперативную библиотеку моделей звеньев; модули формирования моделей модулированных и эквивалентных сигналов; модули преобразования моделей линейных звеньев и расчета их основных частотно-временных характеристик; модули расчета реакций в частотной и временной областях. Такая структура моделирующей программы позволяет до минимума сократить объем черновой подготовительной работы, обычно весьма существенный при моделировании СТК, а саму процедуру моделирования многократно упростить и свести ее в основном к выполнению четырех последовательных этапов: формированию моделей звеньев; формированию моделей сигналов; формированию модели системы; расчету и анализу реакций и функции потерь. Каждый из упомянутых этапов обеспечивается с помощью соответствующих модулей программы. Общение пользователя с про-

граммой осуществляется через программу-оболочку, имеющую выход на все модули.

1.8 Неформальное и формальное описание систем телекоммуникаций

Неформальное (концептуальное) описание СТК — совокупность сведений, достаточная для установления предполагаемого или фактического алгоритма ее работы. Неформальное описание должно заканчиваться составлением функциональной (структурной) схемы, которая отражает алгоритм функционирования системы.

Объем (полнота) неформального описания определяется условиями и задачами исследования СТК. Классифицируя их, можно выделить следующие основные случаи.

1. СТК разрабатывается, известен только предполагаемый алгоритм ее функционирования. Требуется выбрать по определенным критериям из нескольких вариантов построения системы лучший вариант и выполнить оптимизацию параметров последнего.

2. СТК разработана, функционирует, ее структура известна. Необходимо исследовать поведение системы в различных условиях и оптимизировать ее параметры по заданному показателю качества (наиболее часто – по точности), т.е. установить тем самым оптимальные режимы эксплуатации.

3. СТК разработана, функционирует, но ее структура неизвестна. Требуется изучить поведение системы в различных условиях, на основе чего оптимизировать типы и диапазоны изменения входных воздействий и, по возможности, установить предполагаемый алгоритм функционирования.

Случаю 1 соответствует обобщенное неформальное описание. Оно использует общие признаки СТК рассматриваемого класса. При обобщенном описании предполагаемые алгоритм функционирования и структуру исследуемой системы задают функциональными (структурными) схемами, пояснительными текстами, таблицами, графиками, математическими и логическими соотношениями для отдельных функциональных звеньев и воздействий. При этом необходимая информация может быть получена из патентно-информационных источников (априорно), аналитически и экспериментально.

Случаю 2 соответствует детальное неформальное описание — описание СТК, выделенной из рассматриваемого класса систем. Детальное описание состоит из обобщенного описания и описания признаков, присущих исследуемой СТК.

Случаю 3 соответствует разновидность неформального описания под названием идентификация. Сущность идентификации состоит в установлении (подборе) аппроксимирующих соотношений (зависимостей), более или менее полно отображающих поведение СТК. При этом предметом исследования являются только вектор $\overline{U}_{вх}$ воздействий и вектор $\overline{U}_{вых}$ реакций, структура самой же системы неизвестна и представляется “черным ящиком”. Принцип “черного

ящика” можно применять как к системе в целом, так и к отдельным функциональным блокам.

На основе неформального описания создается формальное описание (обобщенная математическая модель) — описание исследуемой СТК, составленное по ее функциональной (структурной, принципиальной) схеме с использованием определенных базисов операторов, которые задают свойства входных сигналов, сигналов связей и функциональных блоков. Объем формального описания должен быть достаточным для нахождения реакций на выходах каждого функционального блока и системы в целом.

Обычно формальное описание СТК получается сложным и громоздким: функциональная схема содержит несущественные (второстепенные) звенья и связи; описание сигналов и звеньев является сложным, выполнено в разных математических базисах, что дополнительно затрудняет построение математической модели исследуемой системы. Учитывая это, прежде чем приступить к формированию математической модели СТК, формальное описание целесообразно подвергнуть триединому процессу оптимизации, который включает оптимизацию функциональной (структурной) схемы, оптимизацию моделей звеньев и оптимизацию моделей сигналов.

1.9 Иерархическая структура и способы декомпозиции систем телекоммуникаций

В основе проектирования и разработки сложных информационных систем, в том числе СТК, лежит системный подход, основными принципами которого являются иерархичность, специализация и автоматизация. В соответствии с принципами иерархичности и специализации процесс проектирования СТК разбивают на ряд последовательно выполняемых этапов, включая проведение научно-исследовательской работы, разработку технического задания, эскизное проектирование и др. При этом каждый этап проектирования имеет следующие иерархические уровни: уровень идеологии СТК данного класса; уровень систем и подсистем; уровень устройств; уровень конструирования и технологии.

Уровень идеологии является верхним иерархическим уровнем. Он требует привлечения специалистов наиболее высокой квалификации. На каждом уровне проектирования общая задача разбивается на ряд частных, решаемых специалистами разных специальностей (направлений). Такой подход позволяет рассмотреть значительное количество вариантов построения СТК, существенно уменьшает материальные, интеллектуальные и временные затраты. Принципы иерархичности, специализации и автоматизации наиболее эффективны при использовании математического моделирования на ПЭВМ.

Применение принципов иерархичности и специализации при математическом моделировании предполагает расчленение исследуемой СТК на отдельные блоки и последующее их изучение с учетом функционирования системы в целом. Такое представление СТК достигается декомпозицией, которая представ-

ляет собой процедуру рассеечения (устранения) несущественных и фиксации существенных динамических, информационных, конструктивных и других связей.

Декомпозиция рассеечением динамических связей основана на разбиении процесса функционирования СТК на ряд последовательно и параллельно протекающих во времени этапов, на каждом из которых системой решается частная задача. Взаимодействие отдельных блоков СТК на любом выделенном этапе ее работы отражается информационными (называемыми также функциональными) связями. Их рассеечение, фиксация и изучение — важнейший элемент анализа и синтеза СТК. При декомпозиции на основе функциональных связей исследуемая СТК разбивается на функциональные блоки, каждый из которых выполняет определенные функции (операции) над сигналами. Такое представление СТК позволяет составить и оптимизировать ее функциональную схему, являющуюся основой для построения математической модели системы.

Возможный вариант декомпозиции СТК на основе функциональных связей приведен на рисунке 1.4.

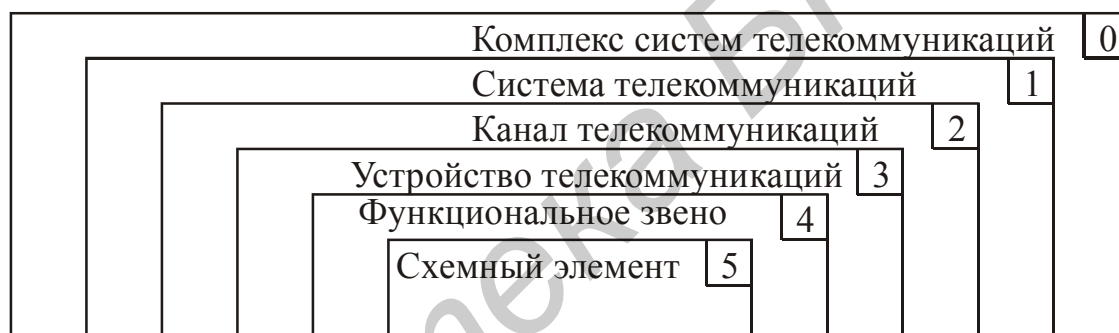


Рисунок 1.4 – Вариант декомпозиции систем телекоммуникаций

Рассматриваемый вариант декомпозиции предусматривает представление моделируемой СТК на шести иерархических уровнях. При этом отметим, что под комплексом СТК понимают совокупность СТК, решающих общую (глобальную) задачу передачи и распределения информации. Устройство телекоммуникаций состоит из функциональных звеньев и выполняет задачу по формированию и передаче (приему и преобразованию) радиосигналов: например, передающее (приемное) устройство СТК. Функциональное звено — часть устройства телекоммуникаций, выполняющая заданную функцию по формированию или преобразованию информационных сигналов, высокочастотных радиосигналов и электромагнитных полей (демодуляция радиосигнала, преобразование частоты, усиление). Функциональные звенья, в свою очередь, состоят из схемных элементов (простейших компонентов СТК): полупроводниковых и электровакуумных приборов, резисторов, конденсаторов и катушек индуктивностей.

Необходимо отметить, что обычно проектированию на уровне идеологии СТК данного класса соответствует представление функциональной схемы на нулевом и первом иерархических уровнях, проектированию на уровне систем и подсистем — на I-IV, на уровне устройств — на III-V, на уровне конструирования и технологии — на V иерархических уровнях (см. рисунок 1.4). При этом наиболее широко используется представление на уровне функциональных звеньев, из которых составляют функциональные схемы устройств, каналов и систем телекоммуникаций.

1.10 Переход от формального описания к математической модели

Обычно формальное описание СТК получается сложным и громоздким. Поэтому переход от него к формированию математической модели исследуемой системы осуществляется через триединый процесс оптимизации, включающий оптимизацию функциональной (структурной) схемы, оптимизацию моделей звеньев и оптимизацию моделей сигналов. Этот переход основывается на ряде допущений и ограничений к функциональным блокам и СТК в целом, вследствие чего его нельзя формализовать: многое зависит от знаний, опыта и интуиции исследователя. Вместе с тем при выполнении процесса оптимизации необходимо руководствоваться следующими пятью основными принципами: специализации математической модели; декомпозиции системы; ограничения диапазонов изменения параметров и сигналов; эквивалентирования; воспроизведения преобразований информационного сигнала.

В соответствии с принципом специализации строится не одна сложная, а несколько простых математических моделей. Каждая из них оценивает эффективность исследуемой СТК по заданному показателю качества. На практике могут использоваться математические модели надежности, точности, помехоустойчивости, пропускной способности.

Принцип декомпозиции предусматривает разбиение процесса функционирования СТК на отдельные этапы и построение для каждого этапа собственной математической модели. Это возможно потому, что в большинстве случаев решение общей задачи, стоящей перед исследуемой системой, обеспечивается решением частных задач. Для каждого этапа работы СТК составляется своя функциональная схема и выполняется ее последующее преобразование: устранение несущественных и фиксация существенных блоков и функциональных связей. В процессе преобразования часть блоков функциональной схемы может изыматься и заменяться эквивалентными воздействиями, часть блоков — заменяться идеальными связями, что соответствует описанию оператором тождественного преобразования, а часть блоков — объединяться в более крупные и описываться единым оператором.

Принцип ограничения диапазонов изменения параметров сигналов предполагает исключение из рассмотрения некоторых малых воздействий, а также введение ограничений и допущений, в рамках которых возможно выполнение

этапов замораживания параметров и линеаризации. Реализация последних, как показано в подразд. 1.4, приводит к детерминированной стационарной линейной СТК, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Принцип эквивалентирования широко используется для оптимизации формального описания СТК. Существуют два подхода к его применению. При первом из них в функциональной схеме системы сохраняют все связи между блоками, а каждый упрощаемый функциональный блок заменяют соответствующим динамическим или статистическим эквивалентом. Это обеспечивает сохранение в целом структуры (функциональной схемы) СТК и существенное упрощение ее математической модели. При втором подходе из функциональной схемы устраняют один или несколько блоков, заменяя их эквивалентными воздействиями $\overline{U}_{\text{экв}}$. Причем если удаляемые блоки являются стохастическими, то вероятностные характеристики воздействий $\overline{U}_{\text{экв}}$ вычисляют на основе автономного анализа этих блоков.

В соответствии с принципом воспроизведения преобразований информационного сигнала процесс модуляции таким сигналом высокочастотного радиосигнала, прохождения модулированного радиосигнала через высокочастотные цепи, детектирования и образования на выходе системы информационного сигнала заменяется прохождением исходного информационного сигнала через эквивалентный низкочастотный четырехполюсник (фильтр). Последнее означает, что в исходной функциональной схеме СТК вся высокочастотная часть (от входа модулятора на передающей стороне до выхода детектора на приемной стороне) замещается эквивалентным четырехполюсником. Использование рассматриваемого принципа особенно эффективно в случае узкополосных систем с двухполосной амплитудной модуляцией несущей, где он обеспечивает колоссальное упрощение математической модели при сохранении высокой точности моделирования.

Как показано в подразд. 1.8, формальное описание, в зависимости от полноты неформального описания, может быть выполнено на основе не только функциональной, но также структурной и принципиальной схем. При этом наличие функциональной схемы обязательно, иначе отсутствует предмет исследования. Наличие же структурной схемы желательно, ибо она является удобной формой формального описания СТК, представленной функциональной или (и) принципиальной схемой. В структурной схеме каждой математической операции преобразования сигналов, имеющей место в функциональной схеме, соответствует определенное звено (элемент). Элементным базисом для построения структурных схем СТК являются линейные инерционные (динамические), а также линейные и нелинейные безынерционные звенья. В общем случае структурную схему можно получить из функциональной, однако для детализации ее параметров часто приходится анализировать и принципиальную схему, которая наиболее полно описывает СТК. На основе принципиальной схемы исследуемой системы можно составить функциональную и структурные схемы. При

этом, однако, необходимо учитывать, что принципиальной схемой исследователь не всегда располагает даже при анализе СТК. В случае синтеза системы она формируется в процессе разработки и в окончательном виде появляется после ее завершения.

После составления формального описания СТК исследователь, руководствуясь изложенными выше пятью принципами, осуществляет триединый процесс его оптимизации, начиная с этапа оптимизации функциональной (структурной) схемы. Этот этап можно выполнять либо методом прямого воспроизведения, либо одним из методов эквивалентов: формульным методом; методом статистических эквивалентов; методом структурных схем; методом информационного параметра.

В случае метода прямого воспроизведения состав преобразованной (оптимизированной) функциональной схемы, свойства ее блоков и связей воспроизводят все физические преобразования сигналов, происходящие в исследуемой СТК. Использование метода позволяет построить наиболее полную и универсальную математическую модель.

В методе эквивалентов рассчитывается сигнал в заданной точке системы (вплоть до определения его статистических характеристик в случае стохастической СТК) и синтезируется эквивалент (имитатор), которым заменяется соответствующая часть функциональной схемы. При этом в случае формульного метода эквивалент представляется совокупностью математических звеньев, не имеющих отношения к реальным звеньям системы, на выходе формируется требуемая аналитическая зависимость для выходного сигнала.

Метод статистических эквивалентов применяют для замещения высокочастотных блоков СТК, находящихся под влиянием случайных воздействий. По нему функциональный блок со входным воздействием $U(X(t))$ и выходным процессом $V(X(t))$ заменяют низкочастотным статистическим эквивалентом с воздействием $X(t)$ и реакцией $V_{\text{экв}}(X(t))$, статистически адекватной (в рамках выбранного критерия) процессу $V(X(t))$. Такой эквивалент можно построить в результате анализа принципиальной схемы исследуемой СТК. В случае формального описания на основе функциональной либо структурной схемы его задают, опираясь на анализ подобных систем.

Метод структурных схем реализует принцип воспроизведения преобразований информационного сигнала и позволяет построить математическую модель СТК, в которой высокочастотная часть заменяется детерминированным динамическим эквивалентом. Метод широко применяется при моделировании систем на любом иерархическом уровне. Для его реализации необходимо располагать структурной схемой, которую можно получить из функциональной либо принципиальной схемы.

Метод информационного параметра сводится к замене всей моделируемой СТК низкочастотным эквивалентом со входным $X(t)$ и выходным

$X^*(t)$ низкочастотными информационными сигналами. Очевидно, он является обобщением методов структурных схем и статистических эквивалентов.

После оптимизации функциональной (структурной) схемы выполняют этап оптимизации математических моделей звеньев (блоков). Задачей этапа является выбор наиболее подходящего математического описания свойств звеньев. Для ее выполнения проводится анализ, на основании которого звенья подразделяют на линейные стационарные, линейные нестационарные, нелинейные безынерционные и нелинейные инерционные. Точное математическое описание нелинейных инерционных звеньев, соответствующее так называемому нефункциональному моделированию, требует привлечения очень сложного математического аппарата и не всегда возможно. Учитывая это, к этим звеньям применяют функциональное моделирование.

В соответствии с основным принципом функционального моделирования модель считается эквивалентной оригиналу, если она достаточно полно воспроизводит лишь некоторые его существенные признаки. При функциональном моделировании нелинейные инерционные звенья представляют совокупностью типовых звеньев: линейных инерционных и линейных (нелинейных) безынерционных. Причем считается, что между соединяемыми звеньями отсутствует взаимное влияние и присоединение одного звена к другому не изменяет характеристик каждого из них.

Очевидно, применение функционального моделирования на этапе оптимизации моделей звеньев дополнительно изменяет функциональную (структурную) схему. В окончательном варианте она содержит только типовые звенья. Методы их математического описания сравнительно просты и хорошо разработаны. Основываясь на них, формируется подходящее математическое описание каждого звена системы. Желательно при этом, чтобы применительно ко всем звеньям оно выполнялось в одном математическом базисе, например в базисе функций комплексного переменного, что существенно упрощает математическую модель СТК в целом.

Задачей этапа оптимизации моделей сигналов является выбор наиболее подходящего математического описания каждого из них. Его осуществляют, основываясь на известных и хорошо разработанных методах описания детерминированных и случайных сигналов. Желательно, чтобы описание всех сигналов также выполнялось в одном математическом базисе, в том же, что и описание функциональных звеньев.

После оптимизации формального описания приступают к этапу формирования математической модели исследуемой СТК. Ключевым моментом его выполнения является правильный выбор метода математического моделирования, который позволяет по известным моделям звеньев и сигналов найти реакции $\overrightarrow{U}_{вых}$ системы. От метода существенно зависят возможности моделирования, сложность математической модели, точность моделирования и временные затраты. Отметим при этом, что известны различные методы математического моделирования: во временной области; в частотной области; на комплексной

плоскости. Выбор одного из них должен происходить с учетом используемого математического описания звеньев и сигналов.

Таким образом, построение адекватной математической модели является сложным и многообразным процессом. Он состоит из следующих последовательно выполняемых этапов: неформального описания; формального описания; оптимизации функциональной (структурной) схемы; оптимизации моделей звеньев; оптимизации моделей сигналов; формирования математической модели СТК. Возможности и сложность модели системы существенно зависят от выбранных моделей сигналов, звеньев и метода моделирования.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

2.1 Виды сигналов и помех в системах телекоммуникаций

В общем случае под информацией понимают совокупность сведений о событиях, явлениях или предметах. Её представляют в определенной форме с помощью различных символов: букв, цифр, математических знаков, рисунков. Совокупность символов, содержащих информацию, образует сообщение. Сообщения передают записанными на специальный носитель (например магнитную ленту) или с помощью физического процесса (электрического тока, электромагнитных либо акустических колебаний), называемого в широком смысле сигналом. В СТК используют электрические и оптические сигналы.

С информационной точки зрения сигналы делятся на детерминированные и случайные. Мгновенные значения детерминированных сигналов, называемых часто детерминированными колебаниями, в любой момент времени можно предсказать с вероятностью, равной единице. Случайные сигналы и помехи, имеющие (в основном) случайный характер, объединяют термином случайные колебания (процессы).

Сигналы, используемые при моделировании СТК, можно классифицировать по следующим критериям: времени существования; способу задания; согласованию с линией связи. По времени существования различают периодические, непериодические финитные (заданные на конечном отрезке времени) и непериодические бесконечно протяженные сигналы. По способу задания они подразделяются на континуальные, дискретные, квантованные и цифровые.

Континуальные сигналы определяют как произвольные по величине и непрерывные по времени. Они могут принимать любое из определенного диапазона мгновенных значений, задаются по оси времени на несчетном множестве точек (несчетные множества называют континуальными) и, являясь функциями непрерывной переменной, могут допускать разрывы первого рода. Последнее означает, что сигналы, отражающие реальные физические процессы (протекающие с конечной скоростью) и называемые обычно аналоговыми или непрерывными, образуют подмножество континуальных сигналов.

Дискретные сигналы являются произвольными по величине и дискретными по времени. Они являются результатом дискретизации по времени непрерывных сигналов, поэтому также могут принимать любое значение из определенного диапазона. Являясь функциями дискретной переменной, дискретные сигналы задаются по оси времени на счетном множестве точек.

Квантованные сигналы есть результат дискретизации по уровню непрерывных сигналов (дискретизацию по уровню называют квантованием). Они являются непрерывными по времени и квантованными по величине, поэтому задаются на несчетном множестве точек и могут принимать лишь дискретные значения из определенного диапазона.

Цифровые сигналы являются дискретными по времени и квантованными по величине. Они представляют результат цифрового кодирования последовательности дискретных значений квантованных сигналов.

В СТК для передачи по линии связи относительно низкочастотные информационные сигналы модулируют по тому или (и) иному параметру несущие колебания, образуя высокочастотные модулированные радиосигналы (оптические сигналы). Учитывая это, по критерию согласования с линией связи сигналы подразделяют на модулирующие и модулированные.

Наиболее полной характеристикой любого случайного процесса является (многомерный) закон распределения. По виду его в основном и классифицируют случайные процессы. При анализе и синтезе СТК используют процессы с разными законами распределения, в большинстве случаев – с нормальным. Методы исследования процессов с нормальным законом распределения наиболее просты и хорошо разработаны. Поэтому при исследовании систем реальные процессы, по возможности, стараются свести к процессам с нормальным законом распределения, к которым часто реальные процессы близки по свойствам (например флуктуационный шум).

Для СТК характерно большое многообразие помех, которые можно классифицировать по двум критериям: влиянию на полезный сигнал; происхождению. При этом по влиянию на полезный сигнал помехи делятся на аддитивные и мультипликативные.

В общем случае процесс $U_{\text{вых}}(t)$ на выходе звена СТК, на которое воздействуют сигнал $U_{\text{ex}}(t)$ и помеха $U_n(t)$, можно описать некоторым оператором Θ :

$$U_{\text{вых}}(t) = \Theta(U_{\text{ex}}(t), U_n(t)). \quad (2.1)$$

Причем если оператор (2.1) вырождается в сумму

$$U_{\text{вых}}(t) = aU_{\text{ex}}(t) + bU_n(t), \quad (2.2)$$

то помеха является аддитивной, если в произведение

$$U_{\text{вых}}(t) = K(t) \cdot U_{\text{ex}}(t), \quad (2.3)$$

мультипликативной. В выражениях (2.2) и (2.3) a, b – константы; $K(t) = \Psi(U_n(t))$ – случайный процесс, зависящий от помехи.

Аддитивная помеха, являясь слабой по уровню, не изменяет положения рабочих точек активных элементов, поэтому она линейно складывается с сигналом, не влияя на его прохождение. Характерным примером аддитивной помехи является флуктуационный шум. В отличие от аддитивной, мультипликативная помеха, в основном являясь большой по уровню, существенно изменяет положения рабочих точек и, значит, активные и реактивные параметры звеньев. Она напрямую влияет на прохождение сигнала. Классическая мультипликативная помеха действует по принципу “есть помеха – есть сигнал, нет помехи – нет сигнала” (см. выражение (2.3)). Во многих реальных случаях на СТК (функциональное звено) воздействуют одновременно аддитивные и мультипликативные помехи, что с учетом соотношений (2.2) и (2.3) соответствует выходному процессу

$$U_{вых}(t) = K(t) \cdot U_{вх}(t) + bU_n(t). \quad (2.4)$$

Помехи, присутствующие в СТК, по происхождению делятся на атмосферные, промышленные, космические, помехи проводных каналов, внутренние, помехи других СТК.

В СТК, работающих по радиоканалу, существенное влияние оказывают атмосферные помехи, обусловленные электрическими процессами в атмосфере Земли. Их энергия в основном сосредоточена в диапазонах низких, средних, высоких и очень высоких частот, где их мешающее действие является наиболее сильным. Особым видом атмосферных помех, происходящих вследствие поляризации верхних слоев тропосферы, являются замирания – квазипериодические изменения уровня напряженности электромагнитного поля в месте приема. Одним из эффективных методов борьбы с ними, используемым на практике, является разнонаправленный прием. Замираниям наиболее подвержены диапазоны высоких и очень высоких частот.

Большое влияние на работу СТК оказывают промышленные помехи, создаваемые различными промышленными установками. Их энергетический спектр, резко спадая с ростом частоты, захватывает диапазон высоких частот. Наибольшее действие они оказывают в диапазонах низких и средних частот.

В диапазоне ультравысоких частот и выше по частотному диапазону воздействие промышленных помех практически не сказывается, а атмосферные помехи имеют небольшой уровень. В этих условиях существенное влияние оказывают космические помехи, возникающие вследствие процессов на Солнце и других звездах.

Специфическим видом помех, поражающих проводные каналы СТК, являются импульсные помехи и прерывания (кратковременные) связи. Эти помехи, имеющие импульсный характер, отличаются относительно высоким уровнем и низкочастотным энергетическим спектром и оказывают сильное мешающее действие.

Уровень и энергетический спектр помех, источниками которых являются другие СТК, определяются электромагнитной обстановкой в конкретном районе. Вследствие бурного развития СТК влияние этого вида помех все более

возрастает. Особенно оно сказывается в крупных промышленных центрах, имеющих большое количество различных систем.

Наконец, внутренние шумы, возникающие в активных и пассивных элементах самой исследуемой СТК, имеют значение во всех частотных диапазонах, но особенно сказываются, как и космические помехи, в диапазоне ультравысоких частот и выше по частотному диапазону. Внутренние шумы делятся на тепловые, которые возникают в активных сопротивлениях вследствие броуновского колебательно-вращательного движения атомов и молекул, и дробовые, являющиеся следствием дискретности заряда и возникающие при его направленном перемещении (протекании тока).

2.2 Представление континуальных детерминированных сигналов ортогональной системой функций

При анализе и синтезе СТК часто используют представление рассматриваемого детерминированного сигнала $f(t)$ (периодического, непериодического) совокупностью базовых сигналов. Математически задача сводится к разложению заданной функции $f(t)$ по различным ортогональным системам функций.

Определение. Бесконечная система комплекснозначных функций

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n.re}(t) + j\varphi_{n.im}(t), \quad n = -\infty, \infty \quad (2.5)$$

называется ортогональной на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, если

$$\int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_m^*(t) \rho(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\varphi_m^* = \varphi_{m.re}(t) - j\varphi_{m.im}(t)$ комплексно-сопряженная функция.

Условие (2.6) означает, что: а) ортогональны строго не сами функции $\varphi_n(t)$, а функции $\sqrt{\rho(t)}\varphi_n(t)$; б) ни одна из функций системы не равна тождественно нулю.

Величина

$$\|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_n^*(t) \rho(t) dt} = \sqrt{\int_a^b |\varphi_n(t)|^2 \rho(t) dt} \quad (2.7)$$

норма функции $\varphi_n(t)$. Если она равна единице, то функция $\varphi_n(t)$ является нормированной с весом $\rho(t)$, а бесконечная система (2.5) нормированных функций – ортонормированной.

Теорема. Если существует бесконечная система (2.5) функций, ортогональная на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, то произвольная кусочно-непрерывная действительная функция $f(t)$, имеющая на этом отрезке конечное число раз-

рывов первого рода и удовлетворяющая условию $\int_a^b f^2(t)dt < \infty$ интегрируемости с квадратом, может быть представлена здесь обобщенным рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n(t), \quad (2.8)$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{\|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\|^2} \int_a^b f(t)\varphi_n^*(t)\rho(t)dt. \quad (2.9)$$

Выражение для коэффициентов C_n получается посредством умножения обеих частей равенства (2.8) на функцию $\varphi_n^*(t)\rho(t)$ и последующего почленно-го интегрирования с учетом условия (2.6) ортогональности. Коэффициенты C_n , полностью определяющие функцию (представляемый сигнал) $f(t)$, называют спектром функции (сигнала) в ортогональной (с весом $\rho(t)$) системе (2.5).

На практике количество учитываемых членов ряда (2.8) ограничивают и описываемый сигнал представляют конечной суммой

$$f_{\Pi}(t) = \sum_{n=-N}^N C_n \varphi_n(t). \quad (2.10)$$

При этом возникает некоторая ошибка представления, которую обычно оценивают критерием (1.9) средней квадратической погрешности.

Установлено, что

$$M = \left(\int_a^b \left(f(t) - \sum_{n=-N}^N a_n \varphi_n(t) \right)^2 dt \right)^{1/2} = M_{min}, \quad (2.11)$$

если $a_n = C_n$. Последнее означает следующее: при заданной системе (2.5) базовых функций минимальная средняя квадратическая погрешность обеспечивается при представлении сигнала конечной суммой обобщенного ряда Фурье. При этом

$$M_{min} = \|f(t)\|^2 - \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 \|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\|^2, \quad (2.12)$$

где $\|f(t)\|^2 = \int_a^b f^2(t)dt$ – квадрат нормы (с весом $\rho(t) = 1$) функции $f(t)$.

Из выражения (2.12) с учетом $M_{min} \geq 0$ вытекает известное неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=-N}^N |C_n|^2 \|\varphi_n(t)\sqrt{\rho(t)}\|^2 < \|f(t)\|^2, \quad (2.13)$$

справедливое для любой ортогональной системы. Последняя называется полной, если $M_{min} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. выполняется равенство Бесселя

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \|\varphi_n(t) \sqrt{\rho(t)}\|^2 = \|f(t)\|^2. \quad (2.14)$$

Выполнение условия (2.14) означает, что ряд (2.8) сходится к функции $f(t)$ в среднем. В отдельных точках $t_k \in [a, b]$, обычно соответствующих разрывам (первого рода) функции $f(t)$, его сумма $f_{\text{экс}}(t)$ может отличаться от последней: $|f(t_k) - f_{\text{экс}}(t_k)| \neq 0$. Эти отличия представляют собой бесконечно тонкие функции $\xi(t - t_k) = f(t_k) - f_{\text{экс}}(t_k)$ конечной величины – так называемые игольчатые функции, суммарная площадь которых равна нулю.

Из условия (2.14) полноты вытекает, что на интервале времени (a, b) энергия сигнала равна

$$\mathcal{E}_{ab} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \|\varphi_n(t) \sqrt{\rho(t)}\|^2, \quad (2.15)$$

а средняя мощность

$$P_{ab} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \|\varphi_n(t) \sqrt{\rho(t)}\|^2. \quad (2.16)$$

Соотношения (2.5) – (2.16) описывают общую процедуру разложения исследуемого сигнала по произвольной ортогональной системе базовых функций. В настоящее время известно значительное количество таких систем. Некоторые из них содержат в себе функции только с положительными номерами, некоторые – не комплекснозначные, а действительные функции $\varphi_n(t)$. Поэтому в первом случае в выражениях (2.15) – (2.16) операцию суммирования выполняют в пределах от 0 до $\infty(N)$, а во втором случае учитывают, что $\varphi_n(t) = \varphi_{n.re}(t)$, а значит, $\varphi_n(t) = \varphi_n^*(t)$, $|\varphi_n(t)|^2 = \varphi_n^2(t)$ и $|C_n| = C_n$.

2.3 Выбор подходящей ортогональной системы функций

При анализе и синтезе современных СТК часто возникают задачи описания сигналов или характеристик рядом по ортогональной системе функций. В математической формулировке такие задачи сводятся к трем основным.

1. Требуется с заданной точностью аппроксимировать кусочно-непрерывную действительную функцию $f(t)$ на конечном отрезке $[a, b]$. За пределами этого отрезка точность представления не регламентируется (рисунок 2.1, а).

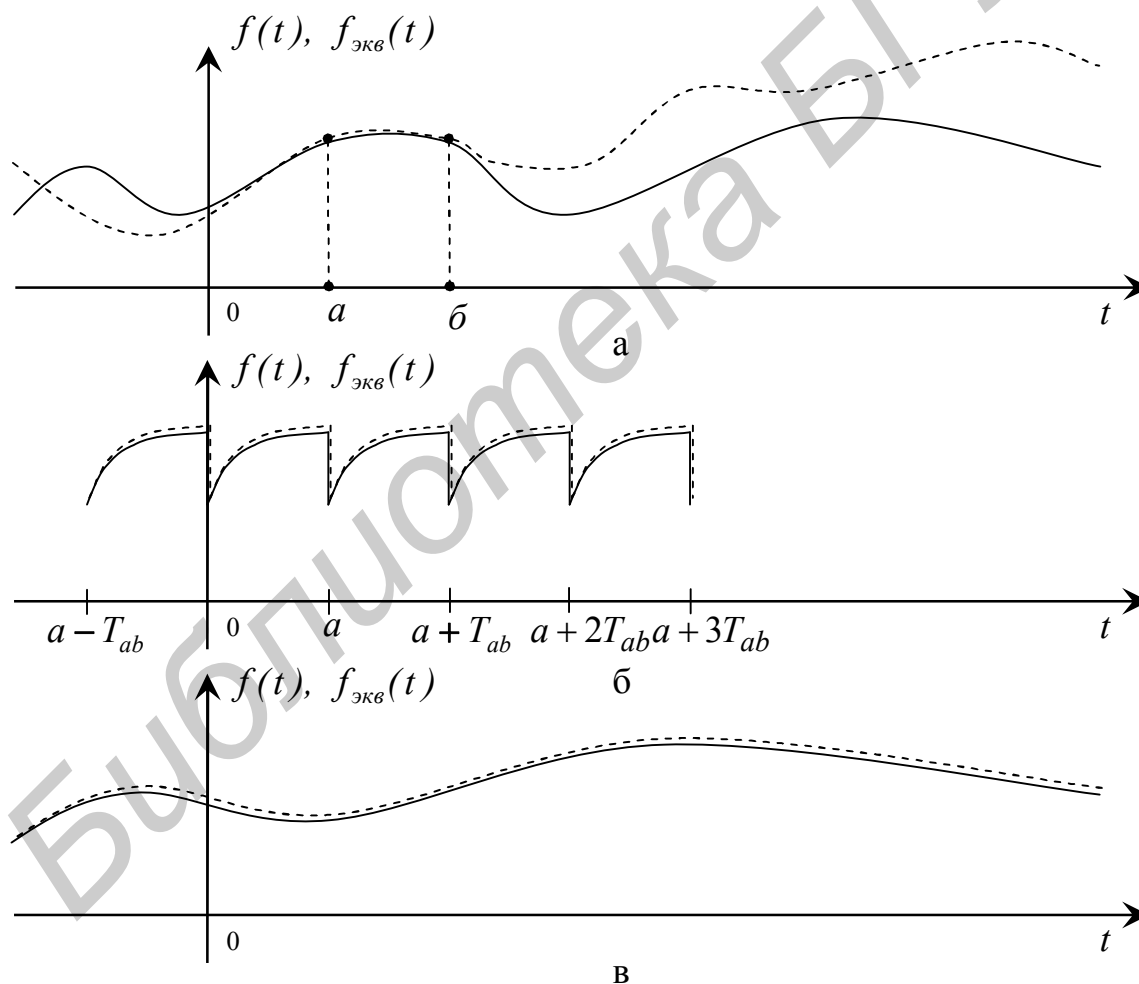
2. Требуется с заданной точностью на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ аппроксимировать периодическую (с периодом $T_{ab} = b - a$) кусочно-непрерывную действительную функцию $f(t) = f(t + T_{ab})$ (рисунок 2.1, б).

3. Требуется с заданной точностью на бесконечном (полубесконечном) интервале аппроксимировать непериодическую кусочно-непрерывную действительную функцию $f(t)$ (рисунок 2.1, в).

Обычно при решении сформулированных задач, помимо достижения необходимой точности представления функции $f(t)$, требуется также обеспечить минимальное количество учитываемых членов ряда (2.8). Чем оно меньше, тем ряд быстрее сходится. Сходимость ряда напрямую зависит от свойств ортогональной системы. С учетом этого необходимо руководствоваться следующими указаниями при выборе ортогональной системы.

При аппроксимации функции $f(t)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (первая задача) принципиально можно использовать любую систему, ортогональную на этом отрезке. Базовые функции $\varphi_n(t)$ этой системы могут быть как периодическими, так и непериодическими.

В случае аппроксимации периодической функции $f(t) = f(t + T_{ab})$ (вторая задача) набор возможных ортогональных систем существенно меньше: можно применять только такие, все базовые функции $\varphi_n(t)$ которых являются периодическими с периодом T_{ab} .



- аппроксимируемая функция $f(t)$;
- - - аппроксимирующая кривая (сумма ряда) $f_{экр}(t)$

Рисунок 2.1 – Разновидности задач аппроксимации

При аппроксимации непериодической функции $f(t)$ на бесконечном (полубесконечном) интервале (третья задача) набор возможных ортогональных систем по сравнению с первой задачей также существенно меньше. В этом случае подходят только такие системы, базовые функции $\varphi_n(t)$ которых являются непериодическими.

Общей рекомендацией при решении всех задач аппроксимации является выбор из возможного круга системы, ортогональной на рассматриваемом отрезке с весом $\rho(t) = 1$. Разложение по такой системе базовых функций существенно улучшает сходимость обобщенного ряда Фурье. В случае представления функции $f(t)$, имеющей разрывы первого рода, улучшению сходимости при прочих равных условиях способствует выбор ортогональной системы, построенной из кусочно-непрерывных функций $\varphi_n(t)$.

2.4. Моделирование сигналов рядом Фурье

В задачах математического и физического моделирования СТК в качестве входных воздействий широко используют континуальные детерминированные периодические сигналы, которые часто раскладывают по ортогональной системе гармонических функций кратных частот (в ряд Фурье). Такое представление во многих случаях существенно упрощает анализ искажений этих сигналов, поскольку: а) гармоническое колебание является единственным из возможных воздействий, не изменяющим своей формы при прохождении через линейное звено СТК; б) разложение в ряд Фурье позволяет применять символический метод расчета, отличающийся своей простотой.

При разложении периодического сигнала $f(t) = f(t + T)$ в ряд Фурье используют систему действительных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \cos(n\omega_1 t), & n = 0, \overline{\infty} \\ \sin(n\omega_1 t), & n = \overline{1, \infty} \end{cases} \quad (2.17)$$

или соответствующую ей систему комплекснозначных функций

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_1 t}, \quad n = \overline{-\infty, \infty}. \quad (2.18)$$

Эти системы базовых функций являются ортогональными с единичным весом ($\rho(t) = 1$) на любом отрезке $[a, b]$ длительностью $T_{ab} = b - a = T = 2\pi / \omega_1$, а квадрат нормы каждой функции $\varphi_n(t)$ равен $\|\varphi_n(t)\|^2 = T$.

Теорема разложения в обобщенный ряд Фурье (см. подразд. 2.2) устанавливает общие (достаточно жесткие) требования к представляемой функции $f(t)$ и ортогональной системе. В случае некоторых ортогональных систем эти требования дополнительно уточнены с целью их ослабления. Так, для возможности описания рядом Фурье кусочно-непрерывная функция $f(t)$ должна

а) удовлетворить условию $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$ абсолютной интегрируемости;

б) быть ограниченной и иметь на отрезке $[-T/2, T/2]$ конечное число относительных максимумов, относительных минимумов и разрывов первого рода, т.е. удовлетворять условиям Дирихле (ограниченной вариации).

При выполнении этих условий периодическая кусочно-непрерывная функция (сигнал) $f(t)$ раскладывается в ряд Фурье, удобно представляемый в комплексном виде:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.19)$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \text{ (сравните с (2.8) и (2.9)).} \quad (2.20)$$

Ряд (2.19) в каждой точке $t \in (-\infty, \infty)$ сходится к значению $(f(t-0) + f(t+0))/2$. Он соответствует ортогональной системе (2.18).

Спектральные коэффициенты ряда Фурье, являющиеся комплексными числами, можно представить в форме

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = C_{nc} - jC_{ns} = |C_n| e^{j\Theta_n}, \quad (2.21)$$

$$\text{где } |C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}; \quad \Theta_n = -\arctg \frac{C_{ns}}{C_{nc}}. \quad (2.22)$$

При их нахождении операцию интегрирования в выражениях (2.20) и (2.21) можно выполнять не только на отрезке $[-T/2; T/2]$, но на любом отрезке длительностью T , например, на отрезке $[0, T]$. Модуль $|C_n|$ и аргумент Θ_n спектральных коэффициентов описывают дискретные математические спектры периодического сигнала: амплитудный и фазовый соответственно.

Очевидно, $|C_n| = |C_{-n}|$ и $\Theta_n = -\Theta_{-n}$, т.е. амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функциями частоты. С учетом последнего, выполняя попарное суммирование в ряде (2.19) членов с номерами n и $-n$, переходят к тригонометрическому ряду Фурье

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \Theta_n), \quad (2.23)$$

часто представляемому в математической и технической литературе также в форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \Theta_n), \quad (2.24)$$

где $a_n = 2C_{nc}$; $b_n = 2C_{ns}$; $A_n = 2|C_n|$.

Форма (2.24), соответствующая ортогональной системе функций (2.17), удобна для моделирования и широко используется на практике. Коэффициенты A_n и Θ_n описывают дискретные физические спектры исследуемого периодического сигнала: соответственно амплитудный и фазовый. Анализ ряда (2.24) с учетом соотношений (2.21) – (2.23) также показывает, что в случае четной раскладываемой функции ($f(t) = f(-t)$) $b_n = C_{ns} = 0$, $\Theta_n = 0$ ($\Theta_n = \pi$), а в случае нечетной ($f(t) = -f(-t)$) – $a_n = C_{nc} = 0$ и $\Theta_n = \pm\pi/2$.

Важной характеристикой периодического сигнала $f(t)$, определяемой при его математическом моделировании, является средняя мощность P_{cp} . Воспользовавшись общим соотношением (2.16) и учитывая соотношения (2.22) – (2.24), можно получить

$$P_{cp} = P_{ab} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}. \quad (2.25)$$

Выражение (2.25), полученное с самых общих позиций, подтверждает известное свойство: средняя мощность периодических сигналов произвольной формы равна сумме средних мощностей постоянной составляющей и гармоник и не зависит от начальных фаз последних. Это выражение часто используют для нахождения средней мощности сигнала на входе и выходе моделируемого звена СТК.

В заключение необходимо отметить, что ряд Фурье характеризуется плохой сходимостью, особенно в случае представления сигналов, описываемых функциями с разрывами первого рода. Для достижения высокой точности аппроксимации количество N учитываемых членов ряда (2.24) приходится часто выбирать из условия $N \geq 1000$, что существенно увеличивает время моделирования на ПЭВМ. Но даже при $N \rightarrow \infty$ в точках разрыва первого рода в аппроксимирующей функции $f_{экс}(t)$ (сумме ряда Фурье) возникают бесконечно тонкие игольчатые выбросы (игольчатые функции) весьма значительной величины. Эту особенность ряда Фурье называют явлением Гибса.

2.5 Моделирование сигналов рядом Котельникова

В СТК важную роль играет описание сигналов рядом Котельникова, которое лежит в основе одноименной теоремы об их дискретном представлении. Образующие ряд функции $\varphi_n(t)$ обладают уникальными свойствами. Они широко используются при синтезе устройств коррекции формы телекоммуникационных сигналов. На их основе можно построить эффективные измерительные сигналы. В последнее время в связи с новыми возможностями при математиче-

ском и физическом моделировании функций $\varphi_n(t)$ ряда Котельникова область их применения дополнительно расширяется.

Ряд Котельникова образует бесконечная система действительных функций

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad \Delta t = \pi/\omega_m, \quad n = \overline{-\infty, \infty}, \quad (2.26)$$

которые по сравнению с функциями всех других ортогональных систем имеют одинаковую форму и отличаются только расположением на оси абсцисс (времени). Система (2.26) функций обладает следующими свойствами:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & t = n\Delta t, \\ 0, & t = k\Delta t \quad (k \neq n), \end{cases} \quad (2.27)$$

т.е. функции $\varphi_n(t)$ являются четными относительно точки $t = n\Delta t$ и принимают нулевые значения через равные интервалы Δt времени (рисунок 2.2, а);

функции $\varphi_n(t)$ имеют модуль

$$|S_\varphi(\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2f_m}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_m \end{cases} \quad (2.28)$$

спектральной плотности и, значит, характеризуются равномерным и ограниченным по частоте амплитудным спектром (рисунок 2.2, б), тем самым косвенно подтверждая, что спектром конечной ширины могут обладать только бесконечно протяженные сигналы и, наоборот, финитные сигналы имеют спектр бесконечной протяженности;

система функций $\varphi_n(t)$ является ортогональной с весом $\rho(t) = 1$ на бесконечном интервале $(-\infty; \infty)$, при этом $\|\varphi_n(t)\|^2 = \Delta t$.

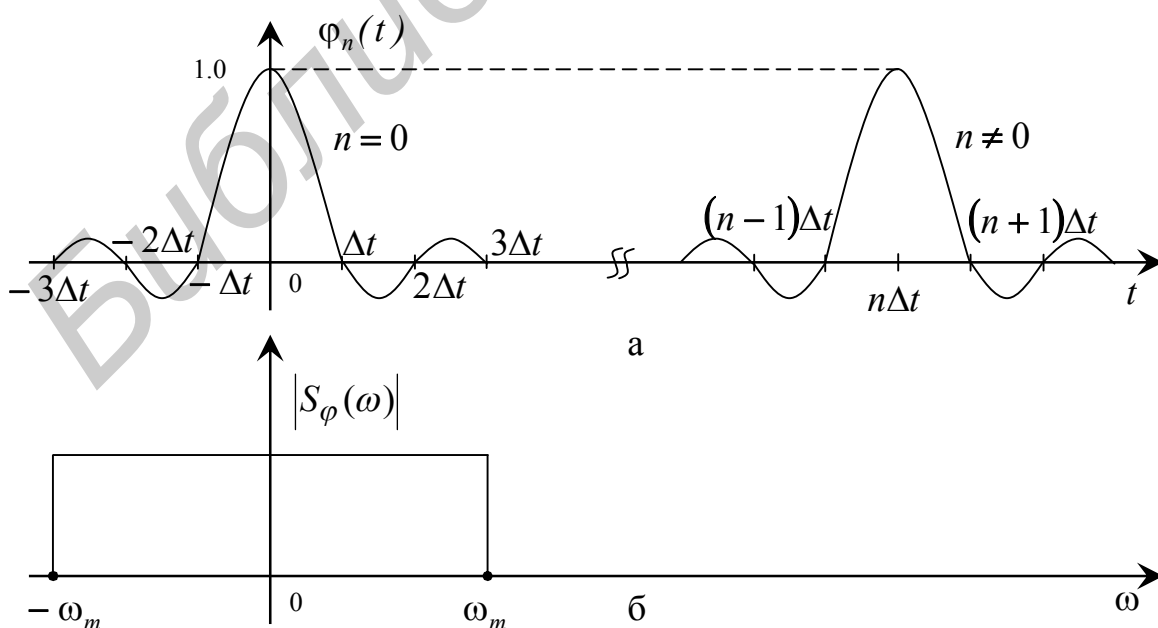


Рисунок 2.2 – Временные (а) и частотные (б) свойства функций ряда Котельникова

С учётом этих свойств любой сигнал (функция $f(t)$), ограниченный по спектру верхней граничной частотой $\omega_m = 2\pi f_m$, представляется рядом Котельникова:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad (2.29)$$

где $C_n = f(n\Delta t)$. При этом ряд сходится к функции $f(t)$ в любой точке $t \in (-\infty; \infty)$. Последнее обеспечивается благодаря тому, что при ограничении спектра сигнал описывается плавной функцией, которая не содержит разрывов и изломов (в окрестности любой точки раскладывается в ряд Тейлора). Коэффициенты C_n и ряд (2.29) в целом получены на основе общих соотношений (2.5) – (2.9). Это позволяет утверждать, что известная теорема Котельникова с математической точки зрения является частным случаем разложения функции $f(t)$ в обобщенный ряд Фурье по специальной ортогональной системе (2.26).

Рассмотрим случай, когда длительность сигнала $f(t)$ конечна и равна τ , а его спектр ограничен частотой f_m . Как показано выше, эти условия строго не совместимы. Однако практически всегда можно выбрать такое значение f_m , чтобы “хвосты” функции времени, обусловленные отсеканием спектральных компонент на частотах $f > f_m$ и выходящие за пределы интервала длительностью τ , содержали пренебрежимо малую энергию по сравнению с энергией исходного сигнала $f(t)$. При таком допущении рассматриваемый финитный сигнал представляется конечной суммой ряда Котельникова (левая граница сигнала совмещена с началом координат)

$$f(t) = \sum_{n=0}^N f(n\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - n\Delta t)}{\omega_m(t - n\Delta t)}, \quad (2.30)$$

где $N = \tau/\Delta t = 2\tau f_m$ – так называемое число степеней свободы, или база сигнала.

Воспользовавшись общими соотношениями (2.15) и (2.16), можно определить энергию

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^N f^2(n\Delta t) \|\varphi_n(t)\|^2 = \Delta t \sum_{n=0}^N f^2(n\Delta t) \quad (2.31)$$

и среднюю на интервале мощность

$$P_{cp} = \mathcal{E}/\tau = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f^2(n\Delta t) \quad (2.32)$$

континуального финитного сигнала. Последняя, как показывает выражение (2.32), численно равна среднему квадрату отсчетных значений $f(n\Delta t)$.

2.6 Моделирование сигналов полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита

При описании сигналов и (реже) звеньев СТК используются полиномы Лежандра первого рода, Чебышева первого рода, Лагерра и Эрмита. Все они образуют ортогональные системы функций, которые существенно расширяют возможности математического моделирования.

Полиномы Лежандра первого рода

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left((t^2 - 1)^n \right)^{(n)}, \quad n = \overline{0, \infty} \quad (2.33)$$

обладают следующими свойствами:

являются полиномами с рациональными вещественными коэффициентами, например, $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = (3t^2 - 1)/2$, $P_3(t) = (5t^3 - 3t)/2$,

$$P_4(t) = (35t^4 - 30t^2 + 3)/8;$$

образуют систему функций, ортогональную с весом $\rho(t) = 1$ на отрезке $[-1; 1]$;

с учетом (2.7) квадрат нормы функции $P_n(t)$ равен $\|P_n(t)\|^2 = 2/(2n+1)$;

в соответствии с условиями теоремы разложения в обобщенный ряд Фурье (см. подразд. 2.2) моделируемая функция (сигнал) $f(t)$ может быть представлена на (нормированном) отрезке $[-1; 1]$ рядом (по полиномам Лежандра)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(t), \quad (2.34)$$

где $C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt$ (сравните с формулой (2.9)).

Полиномы Чебышева первого рода

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-t^2} \left(\left(\sqrt{1-t^2} \right)^{2n-1} \right)^{(n)}, \quad n = \overline{0, \infty} \quad (2.35)$$

обладают следующими свойствами:

являются полиномами с целочисленными вещественными коэффициентами, например, $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, $T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$;

из всех полиномов (с целочисленными коэффициентами) степени n и одинаковыми коэффициентами при старшем члене меньше всего уклоняются от нуля на отрезке $[-1; 1]$, при этом $|T_n(t)| \leq 1$;

за пределами отрезка $[-1; 1]$ быстро и неограниченно возрастают $\left(\lim_{|t| \rightarrow \infty} |T_n(t)| = 2^{n-1} |t|^n \right)$. Благодаря этому и предыдущему свойству их также применяют для аппроксимации частотных характеристик звеньев (фильтров) СТК;

образуют систему функций, ортогональную с весом $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ на отрезке $[-1; 1]$;

в соответствии с (2.7) имеют норму $\|T_0(t)\sqrt{\rho(t)}\| = \sqrt{\pi}$ и $\|T_n(t)\sqrt{\rho(t)}\| = \sqrt{\pi/2}$ ($n > 0$);

согласно условиям теоремы разложения в обобщенный ряд Фурье представляют моделируемую функцию $f(t)$ на (нормированном) отрезке $[-1; 1]$ рядом (по полиномам Чебышева)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(t), \quad (2.36)$$

где согласно выражению (2.9)

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (n > 0).$$

Полиномы Лагерра

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} (t^n e^{-t})^{(n)}, \quad n = 0, \infty \quad (2.37)$$

обладают следующими свойствами:

являются полиномами с рациональными вещественными коэффициентами, например, $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = -t + 1$, $L_2(t) = t^2/2 - 2t + 1$, $L_3(t) = -t^3/6 + 3t^2/2 - 3t + 1$;

образуют систему функций Лагерра, ортонормированную с единичным весом на полубесконечном интервале $[0, \infty)$

$$l_n(t) = e^{-t/2} L_n(t); \quad (2.38)$$

в соответствии с условиями теоремы разложения в обобщенный ряд Фурье представляют моделируемую функцию $f(t)$ на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ рядом (по функциям Лагерра)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n l_n(t), \quad (2.39)$$

где $C_n = \int_0^{\infty} f(t) l_n(t)$.

Функции Лагерра по форме схожи с импульсными характеристиками функциональных блоков СТК, представляющих последовательное соединение

простых линейных звеньев. Поэтому они применяются при моделировании СТК и измерительных систем во временной области.

Полиномы Эрмита

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \left(e^{-t^2} \right)^{(n)}, \quad n = \overline{0, \infty} \quad (2.40)$$

обладают следующими свойствами:

являются полиномами с целочисленными вещественными коэффициентами, например, $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$, $H_3(t) = 8t^3 - 12t$, $H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$;

образуют ортогональную с единичным весом на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ систему функций Эрмита

$$h_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t), \quad (2.41)$$

имеющих норму $\|h_n(t)\| = \sqrt{2^n \sqrt{\pi n!}}$;

в соответствии с условиями теоремы разложения в обобщенный ряд Фурье представляют моделируемую функцию $f(t)$ на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ рядом (по функциям Эрмита)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n(t), \quad (2.42)$$

где с учетом (2.9) $C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h_n(t) dt$.

2.7 Моделирование сигналов функциями Уолша

Рассмотренные в подразд. 2.5 и 2.6 ортогональные системы, различающиеся видом образуемых их функций, интервалами ортогональности и возможностями использования, имеют одно общее свойство: они состоят из плавных функций, которые не содержат разрывов и изломов. В этом смысле особое место занимает система функций Уолша. Она построена из функций с разрывами первого рода, повторяющих по форме идеальные прямоугольные колебания. Ряд по функциям Уолша широко применяется в задачах математического и физического моделирования СТК и измерительных систем (устройств), поскольку характеризуется быстрой сходимостью (существенно лучшей, например, чем ряд Фурье) и позволяет избежать во многих случаях аппроксимации кусочно-непрерывных функций возникновения игольчатых выбросов в точках их разрыва.

Известны разные способы определения функций Уолша. Наиболее распространенный из них основан на взаимосвязи функций Уолша с функциями Радемахера.

Функции Радемахера аналитически задаются в виде

$$r_k(\tau) = \text{sign}(\sin(2^k \pi \tau)), \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (2.43)$$

где k – порядок функции; $\tau = t/T$ – безразмерный аргумент (безразмерное время), нормированный относительно произвольного (заданного) интервала длительностью T ; $\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Функции Радемахера являются периодическими, образуют ортонормированную с единичным весом на отрезке $[0, 1]$ систему функций, которая однако не является полной. Объясняется это тем, что функции $r_k(\tau)$ являются нечетными относительно точки $\tau = 0,5$ (рисунок 2.3, а-в) и могут быть использованы для аппроксимации только нечетных функций. По этой причине переходят к функциям Уолша (рисунок 2.3, г-е).

Способ задания функций Уолша через функции Радемахера основан на том, что каждая функция $wal(w, \tau)$ Уолша порядка w , входящая в систему из $N = 2^n$ функций, является произведением функций Радемахера (в соответствующих степенях) первых n порядков:

$$wal(w, \tau) = \prod_{k=1}^n (r_k(\tau))^{a_k \oplus a_{k-1}}, \quad w = 0, 2^n - 1, \quad (2.44)$$

где a_k, a_{k-1} – коэффициенты, представляющие число $w = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_k 2^k + \dots + a_n 2^n$ в $(n+1)$ -разрядной двоичной системе исчисления. Основываясь на алгоритме (2.44), можно, в частности, установить, что $wal(0, \tau) = r_1^0(\tau) \cdot r_2^0(\tau) \cdot r_3^0(\tau)$, $wal(3, \tau) = r_1^0(\tau) \cdot r_2^1(\tau) \cdot r_3^0(\tau)$ и $wal(6, \tau) = r_1^1(\tau) \cdot r_2^0(\tau) \cdot r_3^1(\tau)$.

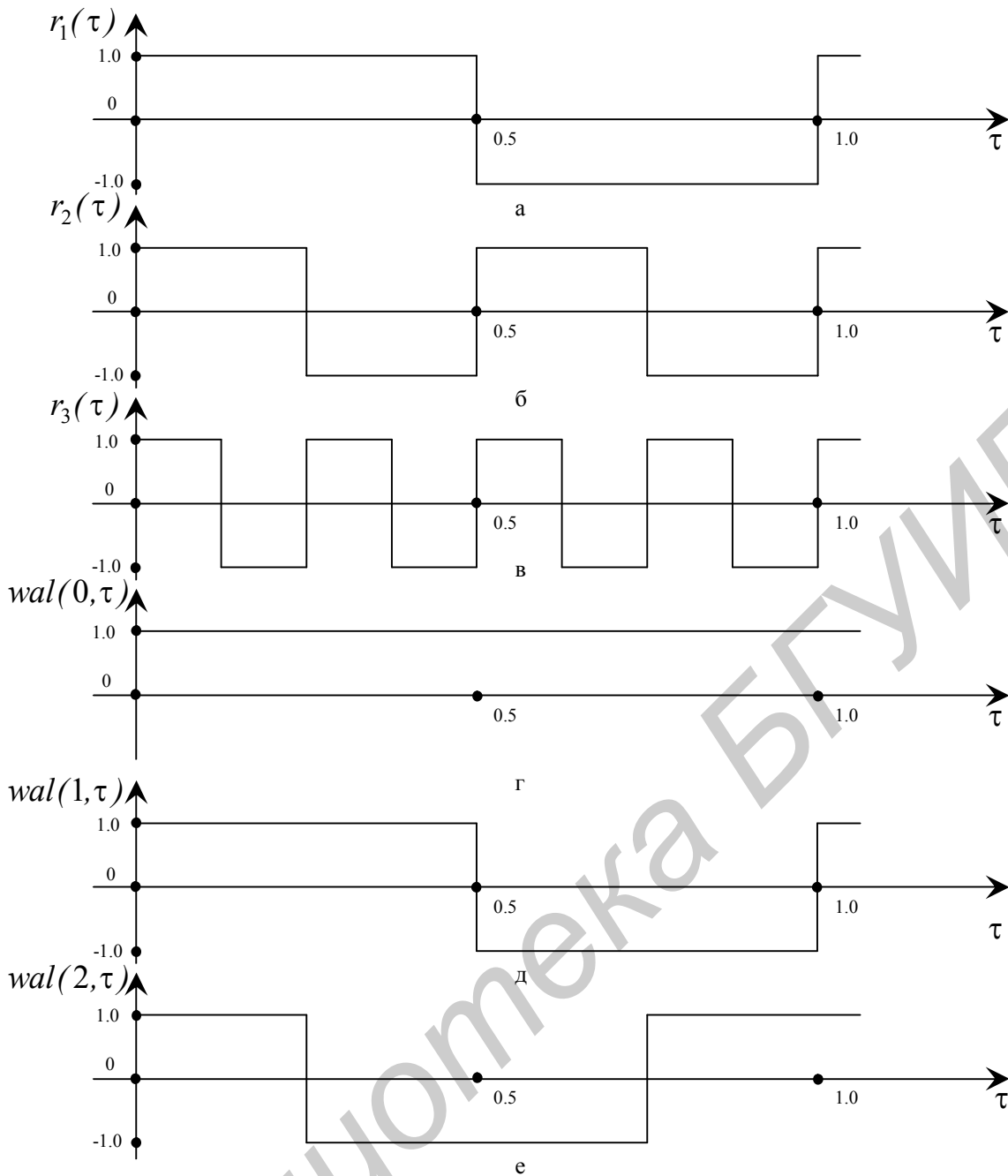


Рисунок 2.3 – Функции Радемахера (а-в) и Уолша (г-е)

Функции Уолша обладают следующими свойствами:
являются периодическими с периодом, равным единице;
функции четных порядков ($wal(2j, \tau)$) являются четными, а нечетных ($wal(2j-1, \tau)$) – нечетными относительно точки $\tau = 0,5$ (см. рисунок 2.3, г-е),
вследствие чего по аналогии с тригонометрическими функциями $\cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)$ и $\sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)$ их
иногда обозначают соответственно $wal(2j, \tau) = cal(j, \tau)$ и $wal(2j-1, \tau) = sal(j, \tau)$;

имеют свойство мультипликативности $wal(k, \tau) \cdot wal(i, \tau) = wal(k \oplus i, \tau)$, т.е. перемножение двух функций Уолша дает новую функцию;

обладают свойством симметрии относительно порядка и аргумента (времени), с учетом которого предыдущее свойство мультипликативности можно представить также в виде $wal(i, \tau_1) \cdot wal(i, \tau_2) = wal(i, \tau_1 \oplus \tau_2)$;

образуют полную систему функций, ортонормированную с единичным весом на отрезке $[0, 1]$;

в соответствии с условиями теоремы разложения в обобщенный ряд Фурье представляют моделируемую функцию $f(\tau)$ (нормированного аргумента) на отрезке $[0, 1]$ рядом (по функциям Уолша)

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n wal(n, \tau), \quad (2.45)$$

$$\text{где } C_n = \int_0^1 f(\tau) wal(n, \tau) d\tau, \quad (\tau = t/T).$$

Функции Уолша периодичны, поэтому ряд (2.45) в основном используют для аппроксимации периодических функций $f(\tau) = f(\tau + 1)$. При нахождении спектральных коэффициентов C_n (по аналогии с рядом Фурье) операцию интегрирования можно выполнять не только на отрезке $[0, 1]$, но на любом отрезке единичной длительности. Функции Уолша являются базисом спектрального (негармонического) представления сигналов.

2.8 Моделирование сигналов на основе преобразования Фурье

Ортогональные системы базовых функций описывают исследуемые сигналы на оси времени (во временной области). Наряду с этим в задачах моделирования СТК широко используют их представление в частотной области и на комплексной плоскости. Описание сигналов в частотной области осуществляют с помощью преобразования Фурье. Большинство современных программ математического моделирования искажений сигналов реализуют классическое (непрерывное) преобразование Фурье или его последующее развитие в вариантах дискретного и быстрого преобразований.

Как известно, прямое преобразование Фурье ставит во взаимно однозначное соответствие $f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$ исходному сигналу $f(t)$ (функции времени) спектральную плотность (спектральную характеристику)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.46)$$

являющуюся в общем случае комплекснозначной функцией частоты ω . Обратный переход от спектральной плотности $S(\omega)$ к сигналу $f(t)$ выполняется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.47)$$

Для представления интегралом (2.46) Фурье функция (сигнал) $f(t)$ должна удовлетворять на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ тем же условиям Дирихле и абсолютной интегрируемости, что и в случае ряда Фурье (см. подразд. 2.4). Отметим при этом, что условию абсолютной интегрируемости отвечают непериодические финитные сигналы и непериодические бесконечно протяженные сигналы, описываемые функциями $f(t)$ с быстро спадающими “хвостами”.

По аналогии со спектральными коэффициентами C_n ряда Фурье (см. (2.20)-(2.22)) спектральную плотность $S(\omega)$ можно представить в виде

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}, \quad (2.48)$$

$$\text{где } |S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad \Theta(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Модуль $|S(\omega)|$ спектральной плотности является четной, а аргумент $\Theta(\omega)$ – нечетной функциями частоты. Они описывают непрерывные математические спектры непериодического сигнала: амплитудный и фазовый соответственно. Значение $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ спектральной плотности $S(\omega)$ численно равно площади (с учетом знака) под кривой $f(t)$ сигнала.

Основываясь на соотношении (2.48), обратное преобразование (2.47) представляют также в форме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| e^{j\Theta(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \Theta(\omega)) d\omega, \quad (2.49)$$

которая широко применяется в практике моделирования, особенно при использовании численных методов.

Рассмотрим непериодический финитный сигнал $f_T(t)$ произвольной формы длительностью $\tau \leq T$. Периодическим повторением с периодом T образуем соответствующий ему периодический сигнал $f(t)$. Очевидно, сигнал $f_T(t)$ описывается спектральной плотностью $S(\omega)$ (2.46), сигнал $f(t)$ – спектральными коэффициентами C_n (2.20). Сравнивая эти выражения, устанавливаем:

$$S(n\omega_1) / T = C_n. \quad (2.50)$$

Последнее означает, что непрерывный амплитудный спектр непериодического сигнала и огибающая дискретного амплитудного спектра соответствующего ему периодического сигнала совпадают по форме. Соотношение (2.50) рекомендуется использовать при моделировании. Оно позволяет, зная выражение

для спектральных коэффициентов, сразу перейти к выражению для спектральной плотности и, наоборот, от спектральной плотности к спектральным коэффициентам.

Нахождение спектральной плотности $S(\omega)$ непосредственно по выражению (2.46) требует во многих случаях очень хорошей математической подготовки и весьма значительных затрат времени, без чего можно успешно обойтись, если использовать известные свойства преобразования Фурье. Анализ задач, решаемых при моделировании, показывает, что в основном применяются следующие свойства.

Свойство линейности. Если $f_i(t) \Leftrightarrow S_i(\omega)$ ($i = \overline{1, N}$), то $f(t) = \sum_{i=1}^N A_i f_i(t) \Leftrightarrow S(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i S_i(\omega)$ (A_i – постоянные коэффициенты), т.е. линейной суперпозиции сигналов $f_i(t)$ соответствует линейная суперпозиция их спектральных плотностей $S_i(\omega)$. Доказательство свойства выполняется подстановкой $f(t)$ в интеграл (2.46) Фурье.

Свойство сдвига по времени. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то $f_2(t) = f_1(t - t_0) \Leftrightarrow S_2(\omega) = S_1(\omega) e^{-j\omega t_0}$, т.е. запаздывающий (опережающий) сдвиг по времени исходного сигнала $f_1(t)$ изменяет только его фазовый спектр: начальная фаза $\Theta(\omega)$ каждой спектральной компоненты получает отрицательное (положительное) приращение на угол ωt_0 , прямо пропорциональный частоте ω и времени t_0 . Доказательство свойства выполняют по следующей схеме: рассматривают произвольный финитный сигнал $f_1(t)$, заданный на отрезке $[t_1, t_2]$, переходят к сигналу $f_2(t)$ на отрезке $[t_1 + t_0, t_2 + t_0]$, подвергают последний преобразованию (2.46), используя при интегрировании замену $t = t_0 + \tau$ переменной.

Свойство изменения масштаба по времени. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то $f_2(t) = f_1(nt) \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$, т.е. растяжению ($n < 1$) или сжатию ($n > 1$) исходного сигнала по времени в n раз соответствует такое же по величине сжатие (растяжение) его спектральной плотности по частоте при одновременном увеличении (уменьшении) амплитуд спектральных компонент в n раз. Доказательство свойства выполняют по следующей схеме: рассматривают произвольный финитный сигнал $f_1(t)$, заданный на отрезке $[0, t_1]$, переходят к сигналу $f_2(t)$ на отрезке $[0, t_1/n]$, который подставляют в интеграл (2.46) с последующей заменой $t = \tau/n$ в нем переменной.

Свойство смещения спектра сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то $f_2(t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t + \Theta_0) \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{2} (e^{j\Theta_0} S_1(\omega - \omega_0) + e^{-j\Theta_0} S_1(\omega + \omega_0))$, т.е.

умножение исходного сигнала $f_1(t)$ на гармоническое колебание с частотой ω_0 приводит к расщеплению его спектра на две составляющие, смещаемые по частоте на $\pm \omega_0$. Доказательство свойства выполняется подстановкой $f_2(t)$ в интеграл (2.46) и представлением функции $\cos(\omega_0 t + \Theta_0)$ по формуле Эйлера.

Свойство дифференцирования сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$f_2(t) = f_1'(t) \Leftrightarrow S_2(\omega) = j\omega S_1(\omega) = \omega S_1(\omega) e^{j\frac{\pi}{2}}$, т.е. операция дифференцирования приводит к относительному уменьшению (увеличению) амплитуд низкочастотных (высокочастотных) спектральных компонент исходного сигнала и дополнительному (опережающему) приращению их начальных фаз на угол $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Доказательство свойства осуществляется подстановкой $f_2(t)$ в интеграл (2.46) и вычислением последнего с помощью метода интегрирования по частям. Как известно, физическую реализацию математической операции дифференцирования сигнала (функции) $f_1(t)$ с определенной погрешностью выполняет простейшая дифференцирующая $C-R$ — цепь, причем величина погрешности тем меньше, чем меньше постоянная $\tau = RC$ этой цепи.

Свойство интегрирования сигнала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$, то

$f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(t) dt \Leftrightarrow S_2(\omega) = \frac{1}{j\omega} S_1(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, т.е. операция интегрирования приводит к относительному увеличению (уменьшению) амплитуд низкочастотных (высокочастотных) спектральных компонент исходного сигнала и дополнительному (запаздывающему) приращению их начальных фаз на угол $\Theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. Доказательство свойства наиболее просто выполняется представлением сигнала $f_1(t)$ в виде $f_1(t) = f_2'(t)$ и последующим использованием свойства дифференцирования. Свойство интегрирования применимо только к тем сигналам, которые имеют нулевую (с учетом знака) площадь $\left(\lim_{\omega \rightarrow 0} S_1(\omega) = 0 \right)$.

Физическую реализацию математической операции интегрирования сигнала (функции) $f_1(t)$ с погрешностью выполняет простейшая интегрирующая $R-C$ — цепь, причем величина погрешности тем меньше, чем больше постоянная $\tau = RC$ этой цепи.

Свойство произведения сигналов. Если $f_1(t) \Leftrightarrow S_1(\omega)$ и $f_2(t) \Leftrightarrow S_2(\omega)$,

то произведение $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega - x) S_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x) S_2(\omega - x) dx$, т.е. произведению исходных сигналов соответствует свертка их спектральных плотностей. Доказательство свойства выполняют по

следующей схеме: подставляют сигнал $f(t)$ в интеграл (2.46), представляют сигнал $f_2(t)$ ($f_1(t)$) обратным преобразованием (2.47) Фурье, переходят к двойному интегралу и заменяют порядок интегрирования.

Из свойства произведения сигналов при $\omega = 0$ вытекает важное для практики моделирования следствие: $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = S(0) =$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x) \cdot S_2(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) \cdot S_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(\omega) \cdot S_2(\omega) d\omega$, где $S_1^*(\omega)$ ($S_2^*(\omega)$) – функция, комплексно-сопряженная функции (спектральной плотности) $S_1(\omega)$ ($S_2(\omega)$). Очевидно, следствие определяет энергию взаимодействия сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ через их спектральные плотности $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$.

Свойство произведения спектров. Если $S_1(\omega) \Leftrightarrow f_1(t)$ и $S_2(\omega) \Leftrightarrow f_2(t)$, то $S(\omega) = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$, т.е.

произведению спектральных плотностей исходных сигналов соответствует свертка этих сигналов. Доказательство осуществляется аналогично предыдущему свойству. Из свойства произведения спектров вытекает известный метод моделирования по формуле Дюамеля.

Свойство взаимозаменяемости времени и частоты. Если $f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то $S(t) \Leftrightarrow F(\omega) = 2\pi f(\omega)$, т.е. сигналу $S(t)$, повторяющему по форме спектральную плотность $S(\omega)$ исходного сигнала $f(t)$, соответствует спектральная плотность $F(\omega) = 2\pi f(\omega)$, повторяющая по форме исходный сигнал. Свойство справедливо для сигнала, описываемого четной функцией $f(t)$. Его спектральная плотность $S(\omega)$ также представляет собой вещественную четную функцию. Поэтому обратное преобразование Фурье можно представить в виде $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$. Формально выполняя в последнем интеграле замену ω на t и t на ω , приходим к выражению для спектральной плотности $F(\omega)$ сигнала $S(t)$.

Равенство Парсеваля. Если $f(t) \Leftrightarrow S(\omega)$, то $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt =$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$. Равенство Парсеваля является частным случаем ($f_1(t) = f_2(t) = f(t)$) следствия из свойства произведения сигналов. Оно

определяет энергию непериодического сигнала $f(t)$ через спектральную плотность $|S(\omega)|^2$ энергии, показывает, что последняя не зависит от начальных фаз спектральных компонент. Равенство Парсеваля широко применяется в СТК при моделировании энергетических характеристик сигналов, включая определение уровней внеполосных излучений.

В качестве примера использования свойств преобразования Фурье найдем спектральную плотность $S(\omega)$ финитного радиосигнала $f(t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t + \Theta_0)$ с частотой ω_0 заполнения, начальной фазой $\Theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и огибающей $f_1(t)$, составленной из трех идеальных прямоугольных импульсов разной длительности и амплитуды (рисунок 2.4, а, б).

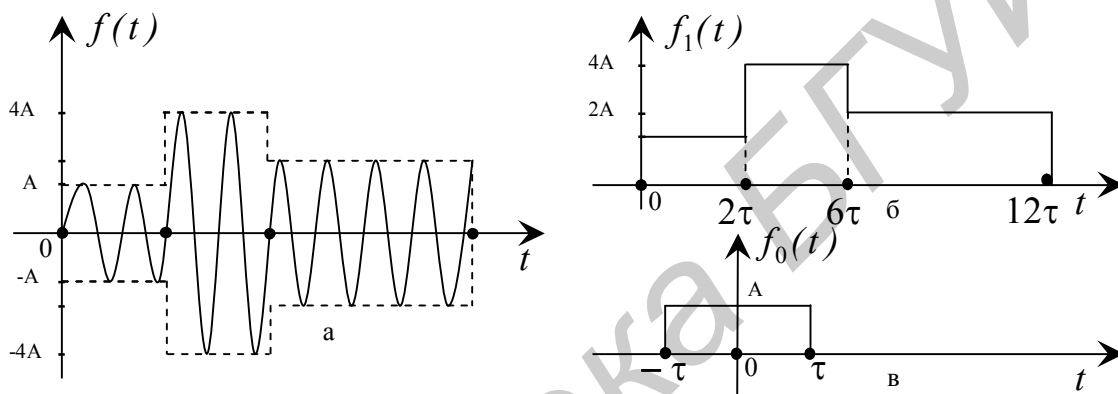


Рисунок 2.4 – Определение спектральной плотности непериодического радиосигнала $f(t)$

Для упрощения решения задачи введем в рассмотрение элементарный сигнал $f_0(t)$ (назовем его базовым) (рисунок 2.4, в), с помощью которого можно описать огибающую $f_1(t)$. Его спектральная плотность, найденная с помощью прямого преобразования Фурье (2.46), равна $S_0(\omega) = (2A \sin \omega\tau) / \omega$. Очевидно, что $f_1(t) = f_0(t - \tau) + 4f_0(\frac{1}{2}(t - 4\tau)) + 2f_0(\frac{1}{3}(t - 9\tau))$. Поэтому воспользуемся свойствами линейности, сдвига по времени и изменения масштаба, с помощью которых сразу определяем спектральную плотность огибающей: $S_1(\omega) = S_0(\omega)e^{-j\omega\tau} + 8S_0(2\omega)e^{-j4\omega\tau} + 6S_0(3\omega)e^{-j9\omega\tau}$. Зная последнюю, с помощью свойства смещения спектра переходим к искомой спектральной плотности $S(\omega) = \frac{1}{2} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}} S_1(\omega - \omega_0) + e^{+j\frac{\pi}{2}} S_1(\omega + \omega_0) \right)$. Далее остается выполнить окончательные преобразования с учетом выражения для спектральной плотности $S_0(\omega)$.

2.9 Дельта-функция и её свойства

В теории информационных систем, включая СТК, особое место принадлежит δ -функции, на базе которой, в частности, построены дискретное преобразование Фурье и Z -преобразование. Совместное применение преобразования Фурье и δ -функции позволяет во многих случаях обойти ограничения, связанные с выполнением условия абсолютной интегрируемости.

δ -функцию, называемую также единичным импульсом, импульсной функцией и функцией Дирака, можно ввести предельным переходом под знаком многих функций, например, в виде

$$\delta(t - t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_2(t) = \lim_{f_m \rightarrow \infty} f_3(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\text{где } f_1(t) = \begin{cases} 1/t_1, & [t_0 - t_1/2, t_0 + t_1/2], \\ 0, &]t_0 - t_1/2, t_0 + t_1/2[\end{cases} \quad f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2a^2}};$$

$$f_3(t) = \frac{\sin 2\pi f_m(t - t_0)}{\pi(t - t_0)}.$$

Как следует из выражения (2.51), она существует в единственной точке $t = t_0$ (при $t_0 = 0$ $\delta(t - t_0) = \delta(t)$) (рисунок 2.5, а), обладает размерностью

$$[\delta(t - t_0)] = c^{-1} \text{ и площадью } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Важное значение для применения δ -функции имеет её фильтрующее (стробирующее) свойство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.52)$$

Очевидно, спектральная плотность $S_\delta(\omega)$ δ -функции равна

$$S_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (2.53)$$

Её модуль, являясь безразмерным, равен $|S_\delta(\omega)| = 1$. Последнее в соответствии с равенством Парсеваля означает, что энергия δ -функции равна $\mathcal{E}_\delta = \infty$. При $t_0 = 0$ спектральная плотность $S_\delta(\omega)$ является вещественной функцией: все гармонические составляющие единичного импульса, суммируясь при нулевых начальных фазах, образуют в момент времени $t_0 = 0$ пик бесконечно большой величины.

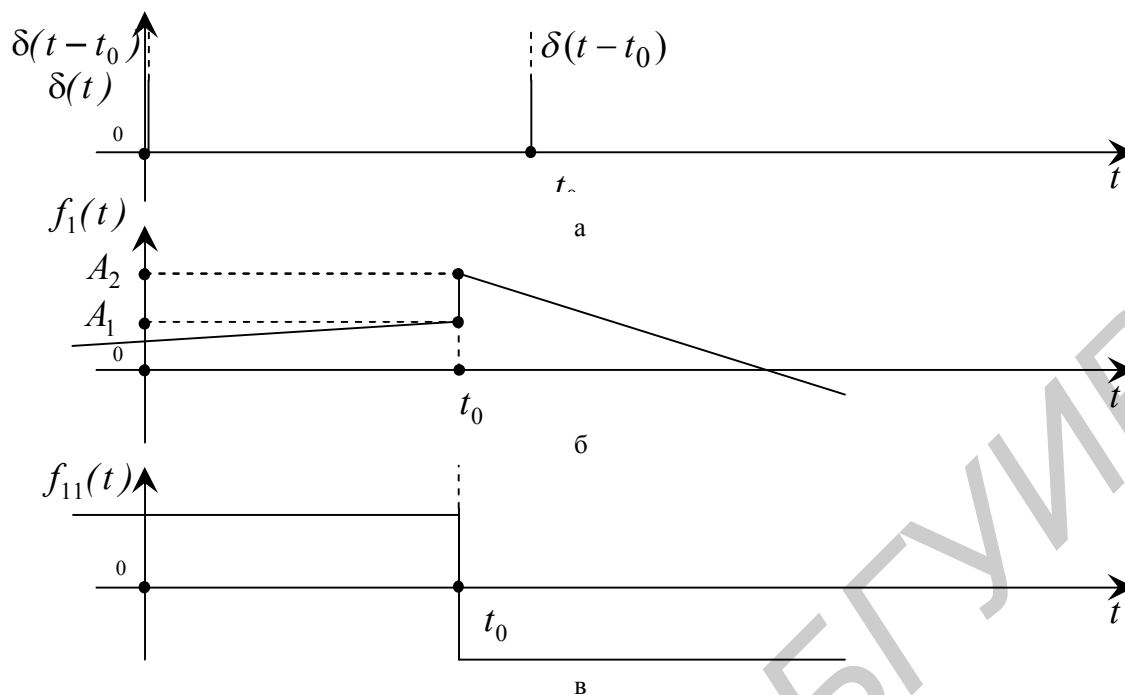


Рисунок 2.5 – δ - функция и её применение при дифференцировании

Применяя к спектральной плотности $S_{\delta}(\omega)$ обратное преобразование Фурье, получаем

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (2.54)$$

Выражение (2.54) можно рассматривать как ещё одно определение функции $\delta(t-t_0)$ (через частотную область). Формально заменяя в нем время $t(t_0)$ на частоту $\omega(\omega_0)$, а частоту $\omega(\omega_0)$ на время $t(t_0)$, приходим к определению

$$\delta(\omega-\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm(\omega-\omega_0)t} dt \quad (2.55)$$

δ -функции на оси частот, которая, как и функция $\delta(t-t_0)$ на оси времени, применяется при моделировании СТК.

В практике математического моделирования широко используются сигналы, описываемые кусочно-непрерывными функциями. Учитывая это, рассмотрим функцию $f_1(t)$, имеющую при $t = t_0$ разрыв первого рода (рисунок 2.5, б). С позиции классического математического анализа она является дифференцируемой при всех $t \in (-\infty; \infty)$, за исключением точки $t = t_0$. Введем

далее функцию $f_{11}(t) = f_1'(t)$. Тогда $f_1(t) = \int_{-\infty}^t f_{11}(t) dt$. С учетом последнего и

свойств δ -функции вытекает, что функция $f_1(t)$ в точке $t = t_0$ разрыва первого рода имеет производную (рисунок 2.5, в)

$$f_{11}(t_0) = (A_2 - A_1)\delta(t - t_0), \quad (2.56)$$

$$\text{где } A_1 = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f_1(t); \quad A_2 = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f_1(t).$$

Таким образом, дополнительное использование свойства (2.56) распространяет обычные правила дифференцирования также на кусочно-непрерывные функции с разрывами первого рода.

2.10 Совместное применение свойств преобразования Фурье и дельта-функции при моделировании сигналов

Важной задачей при синтезе СТК является правильный выбор формы сигнала, которая определяет скорость уменьшения с ростом частоты амплитуд его спектральных компонент и, значит, эффективную ширину спектра. Оказывается, скорость убывания спектра зависит от порядка n производной $f^{(n)}(t)$ (функции $f(t)$, описывающей сигнал), в которой возникает δ -функция. Для выяснения этой закономерности рассмотрим функцию $f_1(t)$ и её производную $f_{11}(t)$ (рисунок 2.6, а, б):

$$f_1(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & \alpha > 0, \quad t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f_{11}(t) = \begin{cases} A\delta(t) - A\alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Нетрудно установить, что спектральная плотность $S_{11}(\omega)$ функции $f_{11}(t)$ равна $S_{11}(\omega) = j\omega A / (\alpha + j\omega)$. Очевидно, $S_{11}(0) = 0$. Это позволяет, воспользовавшись свойством интегрирования, сразу перейти к спектральной плотности $S_1(\omega)$ функции $f_1(t)$: $S_1(\omega) = A / (\alpha + j\omega)$. Отсюда вытекает, что

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_1(\omega)| = \frac{A}{\omega} \sim \frac{1}{\omega}$, т.е. амплитудный спектр на высоких частотах убывает по закону $1/\omega$.

Рассмотрим далее функцию $f_2(t)$, её первую $f_{21}(t)$ и вторую $f_{22}(t)$ производные (рисунок 2.6, в-д):

$$f_2(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & \alpha > 0, \quad t \geq 0, \\ Ae^{\alpha t}, & t < 0, \end{cases} \quad f_{21}(t) = \begin{cases} -A\alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ A\alpha e^{\alpha t}, & t < 0. \end{cases}$$

$$f_{22}(t) = \begin{cases} -2A\alpha\delta(t) + A\alpha^2 e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ A\alpha^2 e^{\alpha t}, & t < 0. \end{cases}$$

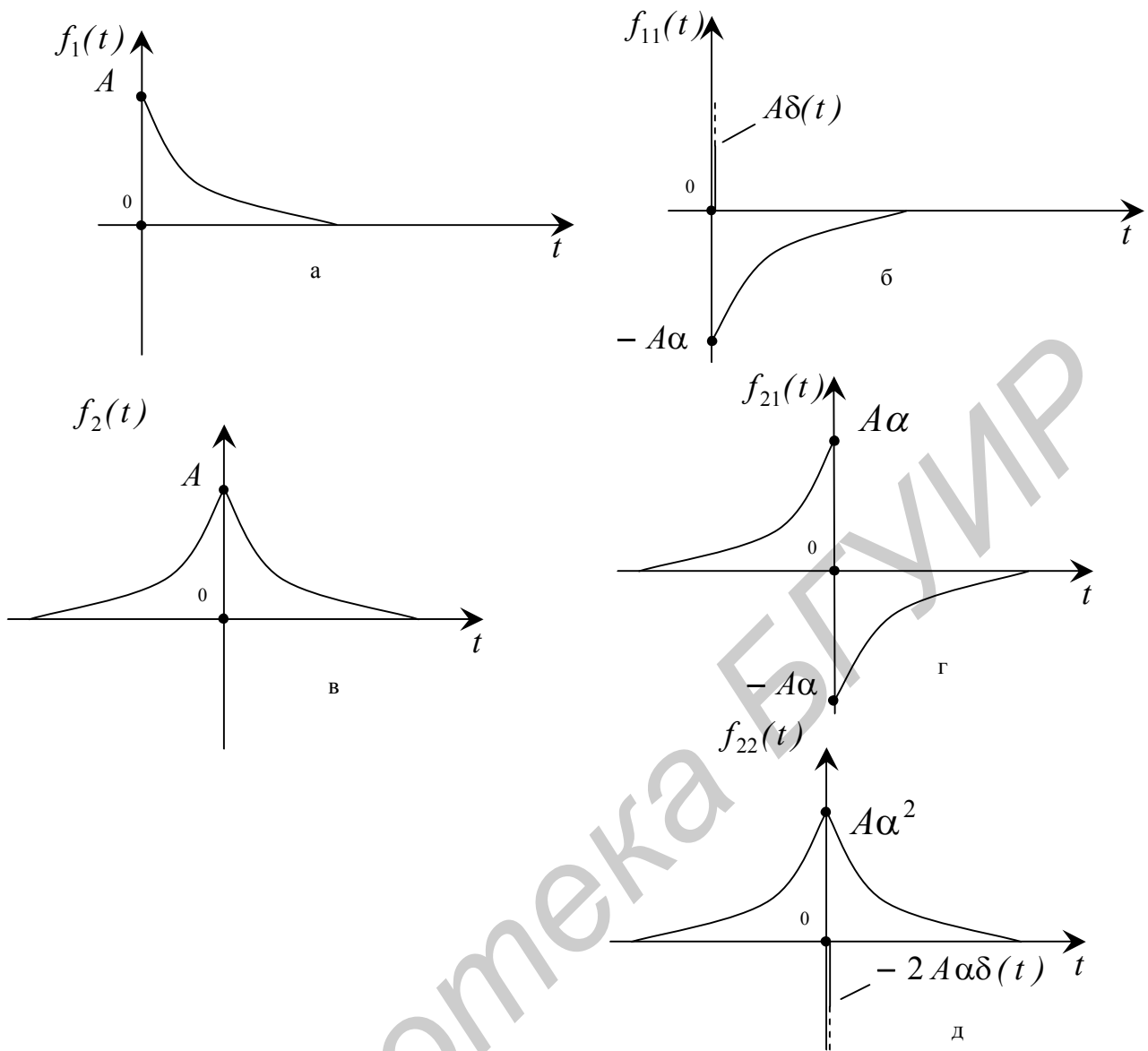


Рисунок 2.6 – Временные свойства сигналов, описываемых кусочно-непрерывными функциями

Очевидно, $f_{22}(t) = \alpha^2 f_2(t) - 2A\alpha\delta(t)$. Поэтому с учетом свойств преобразования Фурье и δ -функции $S_{22}(\omega) = \alpha^2 S_2(\omega) - 2A\alpha$ ($S_2(\omega) \Leftrightarrow f_2(t)$, $S_{21}(\omega) \Leftrightarrow f_{21}(t)$, $S_{22}(\omega) \Leftrightarrow f_{22}(t)$). Поскольку $S_{22}(0) = S_{21}(0) = 0$, то на основании свойства интегрирования $S_2(\omega) = S_{22}(\omega)/(j\omega)^2$. Подставляя в последнее соотношение выражение для $S_{22}(\omega)$, имеем $S_2(\omega) = 2A\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$. Отсюда $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S_2(\omega)| = \frac{2A\alpha}{\omega^2} \sim \frac{1}{\omega^2}$, т.е. амплитудный спектр убывает на высоких частотах по закону $1/\omega^2$.

Проведенный анализ показывает следующее. Сигнал, описываемый функцией $f(t)$, в первой производной $f'(t)$ которой возникает δ -функция,

имеет амплитудный спектр, убывающий по закону $1/\omega$. Сигнал, представляемый функцией, во второй производной которой появляется δ -функция, имеет убывающий по закону $1/\omega^2$ амплитудный спектр. Ранее установлено, что сигнал, описываемый функцией $f(t) = f^{(0)}(t) = \delta(t - t_0)$, имеет равномерный спектр (по-другому, убывающий по закону $1/\omega^0$). Обобщая полученные результаты, устанавливаем общую закономерность: сигнал, представляемый функцией $f(t)$, в n -й производной $f^{(n)}(t)$ которой возникает δ -функция, обладает амплитудным спектром, убывающим на высоких частотах по закону $1/\omega^n$. Если одновременно с убыванием спектра наблюдается также его пульсация, то это свидетельствует о наличии в сигнале (его производных) нескольких, по крайней мере двух δ -функций. Так, периодическая пульсация амплитудного спектра с неубывающими максимумами может возникать только в результате интерференции спектров нескольких δ -функций. Амплитудный спектр идеального прямоугольного импульса, пульсирующий с убывающими по закону $1/\omega$ максимумами, – результат интерференции спектров двух ступенчатых скачков.

В соответствии с общей закономерностью наибольшую скорость убывания амплитудного спектра имеет импульс Гаусса, производная любого порядка которого является непрерывной функцией. Однако он обладает бесконечной длительностью, вследствие чего на практике не используется. Вместо него в СТК широко применяют финитный \cos^2 -импульс, примерно повторяющий по свойствам импульс Гаусса.

В практике математического моделирования СТК часто используются сигналы, которые описываются функциями, не удовлетворяющими условию абсолютной интегрируемости. Совместное применение свойств преобразования Фурье и δ -функции во многих случаях позволяет обойти это ограничение.

Рассмотрим гармоническое колебание $f(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta_0)$, $-\infty < t < \infty$. Формально применяя к нему прямое преобразование Фурье (2.46) и используя определение (2.55) δ -функции, можно получить следующее выражение для его спектральной плотности:

$$S(\omega) = A\pi(e^{j\Theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\Theta_0} \delta(\omega + \omega_0)). \quad (2.57)$$

Постоянное напряжение (ток) $f_0(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0, \Theta_0 \rightarrow 0} A \cos(\omega_0 t + \Theta_0) = A$. Выполнив в выражении (2.57) предельные переходы $\omega_0 \rightarrow 0$ и $\Theta_0 \rightarrow 0$, устанавливаем, что сигналу $f_0(t)$ соответствует спектральная плотность

$$S_0(\omega) = 2\pi A \delta(\omega). \quad (2.58)$$

Как известно, периодический сигнал можно представить рядом Фурье в тригонометрической форме $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \Theta_n)$ (см. (2.24)), что позволяет, основываясь на соотношениях (2.57) и (2.58),

сразу перейти к выражению для его спектральной плотности:

$$S(\omega) = 2\pi A_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \pi \left(e^{j\Theta_n} \delta(\omega - n\omega_1) + e^{-j\Theta_n} \delta(\omega + n\omega_1) \right).$$

2.11 Моделирование сигналов на основе преобразования Лапласа

В последнее время все большее распространение получает описание сигналов на комплексной плоскости с помощью преобразования Лапласа. Эта тенденция характерна не только для теоретических методов исследования СТК, но и для программ их математического моделирования на ПЭВМ.

Известно, что для преобразования по Лапласу комплекснозначная функция $f(t)$ должна отвечать следующим трем условиям:

удовлетворять условию Гёльдера, которое означает, что при всех $t \in (-\infty, \infty)$, за исключением конечного числа точек с разрывами первого рода (на любом конечном интервале), существуют такие постоянные $A > 0$, $h_0 > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, что $|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha$ для всех $|h| \leq h_0$; условие Гёльдера по смыслу соответствует условиям Дирихле;

возрастать не быстрее показательной функции, т.е. для всех $t \in (-\infty, \infty)$ иметь такие постоянные $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$, что $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$, где σ_0 – показатель роста функции $f(t)$;

удовлетворять условию $f(t) = 0$ при $t < 0$, что, впрочем, всегда можно обеспечить переходом от функции $f(t)$ к функции $\varphi(t) = \gamma(t)f(t)$, где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда).

Функцию $f(t)$, удовлетворяющую сформулированным условиям, называют часто функцией-оригиналом. Важно отметить, что все сигналы, используемые при моделировании СТК, описываются функциями-оригиналами, т.е. могут быть преобразованы по Лапласу.

Прямое преобразование Лапласа исходному сигналу (функции времени $f(t)$) ставит во взаимно однозначное соответствие $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ изображение

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (2.60)$$

являющееся функцией комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$. Изображение $F(p)$ строго определено в полуплоскости $Re p > \sigma_0$ и является здесь аналитической функцией. Тем не менее в большинстве практических задач область определения распространяют и на полуплоскость $Re p < \sigma_0$, где функция $F(p)$ имеет особые точки. Знание последних существенно упрощает вычисление ин-

тегралов. В полуплоскости $Re\ p > \sigma_0$ $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ по любому пути, при котором $\sigma \rightarrow \infty$, т.е. сходимость равномерна относительно $\arg p$.

Обратный переход от изображения $F(p)$ к сигналу (оригиналу) $f(t)$ выполняется с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (2.61)$$

где контур интегрирования представляет бесконечную вертикальную прямую $Re\ p = a$ ($a > \sigma_0$) в области аналитичности функции $F(p)$. Интеграл (2.61) часто называют интегралом Римана-Меллина. Он в любой точке, где выполняется условие Гёльдера, восстанавливает значение функции $f(t)$, т.е. оригинал определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва.

Моделирование на комплексной плоскости часто сопровождается преобразованием изображения исходного сигнала в некоторую другую функцию $F(p)$ комплексного переменного, от которой затем необходимо с помощью обратного преобразования (2.61) перейти к соответствующему ей оригиналу (что в общем случае возможно не всегда). Для выполнения этого перехода, согласно так называемой теореме существования, функция $F(p)$ должна быть аналитической в полуплоскости $Re\ p > \sigma_0$ и обладать здесь равномерной сходимостью, а $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p)dp < \infty$, т.е. интеграл должен абсолютно сходиться.

Нахождение изображения $F(p)$ исследуемого сигнала (функции $f(t)$) непосредственно по выражению (2.60) представляет во многих случаях сложную и значительную по времени задачу, которую можно многократно упростить, если использовать известные свойства преобразования Лапласа. Анализ задач, решаемых при моделировании, показывает, что в основном применяются следующие свойства.

Свойство линейности. Если $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(p)$ ($i = \overline{1, N}$), то непосредственно по выражению (2.60) представляет во многих случаях сложную и значительную по времени задачу, которую можно многократно упростить, если использовать известные свойства преобразования Лапласа. Анализ задач, решаемых при моделировании, показывает, что в основном применяются следующие свойства.

Свойство линейности. Если $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(p)$ ($i = \overline{1, N}$), то $f(t) = \sum_{i=1}^N A_i f_i(t) \Leftrightarrow F(p) = \sum_{i=1}^N A_i F_i(p)$ (A_i – постоянные коэффициенты), т.е. линейной суперпозиции оригиналов $f_i(t)$ соответствует линейная суперпозиция их изображений $F_i(p)$. Доказательство свойства выполняется подстановкой $f(t)$ в преобразование (2.60).

Теорема смещения. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(t)e^{p_0 t} \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p - p_0)$ ($p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ – произвольное комплексное число), т.е. умножению оригинала $f_1(t)$ на комплекснозначную функцию $e^{p_0 t}$ соответствует “смещение” его изображения $F(p)$ на p_0 . Доказательство теоремы выполняется подстановкой $f_2(t)$ в интеграл (2.60).

Теорема подобия. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(nt) \Leftrightarrow F_2(p) = \frac{1}{n} F_1\left(\frac{p}{n}\right)$. Доказательство теоремы выполняется подстановкой $f_2(t)$

в интеграл (2.60) с последующей заменой $t = \tau/n$ в нем переменной.

Дифференцирование оригинала. Если при любом $t \in (0, \infty)$ функция $f(t)$ является дифференцируемой (в окрестности любой точки раскладывается в ряд Тейлора) и $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1^{(n)}(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p^n F_1(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$, где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, n-1$. Доказательство свойства выполняют по следующей схеме.

С помощью преобразования (2.60), используя метод интегрирования по частям, устанавливают, что $f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0)$. Рассматривают функцию $f'' = (f'(t))$. Используя выражение для изображения функции $f'(t)$, получают: $f''(t) \Leftrightarrow p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$. Представляя по аналогии производную $f^{(3)}(t)$ третьего и более высоких порядков, приходят к общему выражению для изображения $F_2(p)$.

В случае, если $f^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, n-1$), то $f_2(t) = f_1^{(n)}(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p^n F_1(p)$, т.е. n -кратное дифференцирование оригинала при нулевых начальных условиях соответствует умножению его изображения на множитель p^n дифференцирования оригинала.

Дифференцирование изображения. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то $F_2(p) = F_1^{(n)}(p) \Leftrightarrow f_2(t) = (-1)^n t^n f(t)$, т.е. n -кратное дифференцирование изображения соответствует умножению оригинала на множитель $(-1)^n t^n$ дифференцирования изображения. Доказательство свойства осуществляют представлением функции $F(p)$ преобразованием (2.60) и её последовательным n -кратным дифференцированием с выполнением операции дифференцирования под знаком интеграла, что возможно вследствие аналитичности функции $F(p)$ в полуплоскости $Re p > \sigma_0$.

Выполняя n -кратное дифференцирование изображения $\Gamma(p)$ функции $f(t) = \gamma(t)$ (2.59), можно получить $f(t) = t^n \Leftrightarrow F(p) = n! / p^{n+1}$. Последнее является важным следствием из свойства дифференцирования изображения, широко используемым в практике моделирования.

Интегрирование оригинала. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = \int_0^t f_1(t) dt \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p) / p$, т.е. интегрирование оригинала соответ-

ствуется умножению его изображения на множитель $1/p$ интегрирования оригинала. Доказательство свойства наиболее просто выполняется представлением $f_1(t)$ в виде $f_1(t) = f_2'(t)$ и последующим использованием свойства дифференцирования оригинала.

Интегрирование изображения. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то $F_2(p) = \int_p^\infty F_1(p) dp \Leftrightarrow f_2(t) = f_1(t)/t$, т.е. интегрирование изображения соответствует умножению оригинала на множитель $1/t$ интегрирования изображения.

Доказательство свойства осуществляют представлением функции $F_1(p)$ преобразованием (2.60), подстановкой его в интегральное выражение для $F_2(p)$ и последующим изменением порядка интегрирования, что возможно вследствие аналитичности функции $F_1(p)$ в полуплоскости $Re p > \sigma_0$.

Теорема умножения изображений. Если $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$ и $F_2(p) \Leftrightarrow f_2(t)$, то $F(p) = F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$, т.е. произведению изображений соответствует свертка оригиналов.

Доказательство теоремы, называемой также теоремой Бореля, выполняют по следующей схеме: подставляют $F(p)$ в интеграл (2.61), представляют изображение $F_1(p)$ прямым преобразованием (2.60) Лапласа, переходят к двойному интегралу и заменяют порядок интегрирования.

В практике моделирования большое значение имеет следствие из теоремы умножения изображений, две симметричные формы которого образуются с дополнительным использованием свойств линейности и дифференцирования оригинала:

$$\begin{aligned} pF_1(p)F_2(p) &= f_1(0)F_2(p) + (pF_1(p) - f_1(0))F_2(p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau, \quad (2.62) \\ pF_1(p)F_2(p) &= f_2(0)F_1(p) + (pF_2(p) - f_2(0))F_1(p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_2'(\tau)f_1(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Из выражений (2.62) непосредственно вытекают все четыре разновидности интеграла Дюамеля.

Теорема умножения оригиналов. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p)$, то $f(t) = f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F_1(z)F_2(p-z)dz$, где функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $Re p > \sigma_1 + \sigma_2$; $a > \sigma_1$; $\sigma_1(\sigma_2)$ – показатель роста функции $f_1(t)(f_2(t))$.

Свойство означает: произведению оригиналов соответст-

вует комплексная свертка их изображений. Доказательство выполняется аналогично теореме умножения изображений.

Теорема запаздывания. Если $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то при любом $t_0 \geq 0$ $f_2(t) = f_1(t - t_0) \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p)e^{-pt_0}$, т.е. запаздыванию оригинала (сигнала) соответствует умножение его изображения на множитель e^{-pt_0} запаздывания. Доказательство свойства выполняют подстановкой $f_2(t)$ в интеграл (2.60) с последующей заменой $t = \tau + t_0$ в нем переменной.

Пределные соотношения. Если $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами и $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) = f(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty), \quad (2.63)$$

где функция $pF(p)$ сходится при $p \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) равномерно относительно $\arg p$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ аналитичности функции $F(p)$.

В практике моделирования СТК широко применяют периодические сигналы $f(t)$, которые строго существуют на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ времени. С учетом этого введем в рассмотрение сигналы (рисунок 2.7)

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & [0, \infty) \\ 0, & (-\infty, 0) \end{cases} \quad \text{и} \quad f_T(t) = \begin{cases} f(t), & [0, T] \\ 0, &]0, T[\end{cases},$$

которые назовем соответственно периодическим в узком смысле и базовым. Очевидно, что

$$f_T(t) \Leftrightarrow F_T(p) = \int_0^T f_T(t)e^{-pt} dt, \quad \text{при этом, как известно, изображение } F_T(p)$$

аналитично во всей открытой комплексной плоскости (открытая p -плоскость не включает бесконечно удаленную точку $P = \infty$).

Сигнал $f_1(t)$ образуется периодическим копированием сигнала $f_T(t)$ на интервале $(0, \infty)$. Это позволяет воспользоваться для нахождения его изображения $F_1(p)$ свойством линейности и теоремой запаздывания. Поступая так и выполняя суммирование образуемой при этом бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$F(p) = F_1(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (2.64)$$

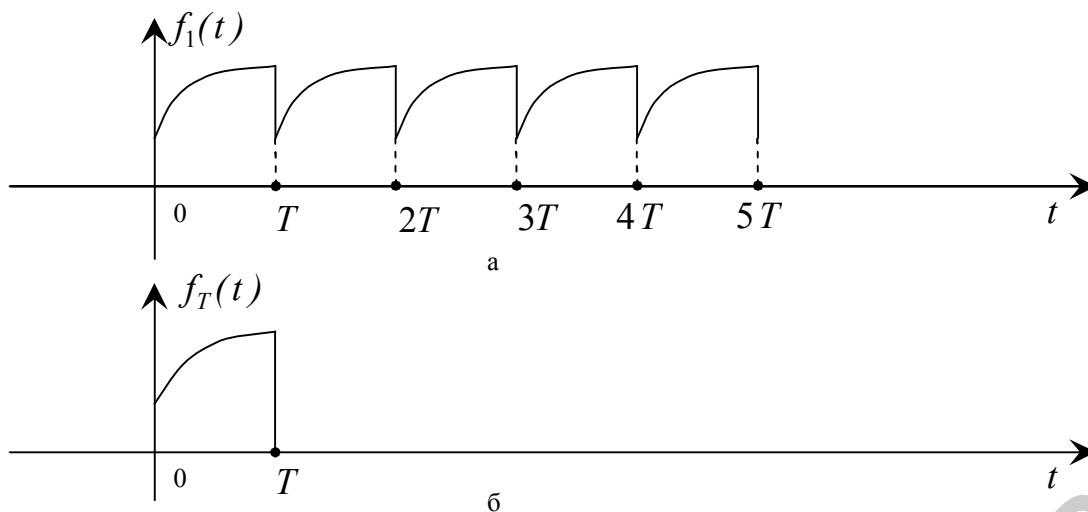


Рисунок 2.7 – Периодический (а) и базовый (б) сигналы

Классическое преобразование Лапласа ((2.60), (2.61)) является односторонним. Существует понятие двустороннего преобразования Лапласа, обобщающего одностороннее на весь бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$ времени. Применяя двустороннее преобразование, можно показать, что изображение $F(p)$ периодического сигнала $f(t)$ также представляется выражением (2.64) (это учтено при его написании). Изображение $F(p)$ имеет особые точки (простые полюсы) $p_k = j2\pi k/T$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), являющиеся корнями уравнения $1 - e^{-pT} = 0$.

Проведенный анализ показывает следующее.

Изображение $F(p)$ периодического, в том числе в узком смысле, сигнала образуется умножением изображения $F_T(p)$ базового сигнала на множитель $(1 - e^{-pT})^{-1}$ периодичности. Особыми точками функции $F(p)$ являются бесконечное число простых (однократных) полюсов $P_k = j2\pi k/T$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), лежащих на мнимой оси комплексной плоскости (рисунок 2.8). Положение полюсов на мнимой оси определяется только периодом T повторения сигнала и не зависит от его формы. Любой периодический сигнал, преобразуемый по Лапласу, описывается функцией $f(t)$ с показателем $\sigma_0 = 0$ роста. Поэтому в интеграле (2.61) интегрирование можно выполнять вдоль любой вертикальной прямой $Re p = a$, удовлетворяющей условию $a > 0$ (см. рисунок 2.8).

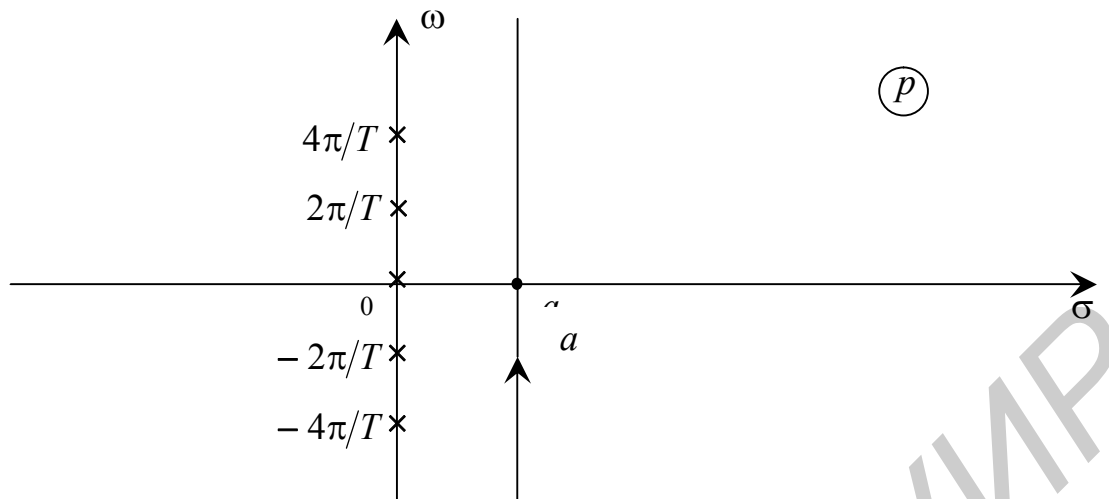


Рисунок 2.8 – Расположение особых точек изображения периодического сигнала

Нахождение изображения периодического сигнала является примером эффективного применения свойств преобразования Лапласа. Для демонстрации больших возможностей их применения рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Найти изображение сигнала $f(t) = 2At \sin 2t$.

При отыскании изображения сигнала типа $f(t) = t^n \sin(\omega t)$ или $f(t) = t^n \cos(\omega t)$ целесообразно вначале определить изображение вспомогательного сигнала $f_B(t) = \sin \omega t$ ($f_B(t) = \cos \omega t$), а затем воспользоваться свойством дифференцирования изображения. В рассматриваемом примере $f_B(t) = 2A \sin 2t$. Ему соответствует изображение $F_B(p) = 4A / (p^2 + 4)$. Дифференцируя последнее, находим: $f(t) \Leftrightarrow F(p) = 8Ap / (p^2 + 4)^2$.

Пример 2. Найти изображение сигнала $f(t) = A(e^{bt} - e^{at})/t$. В качестве вспомогательного $f_B(t)$ используем сигнал (2.59). Ему отвечает изображение $F_B(p) = 1/p$. Далее применяем теорему сдвига и свойство линейности. В соответствии с ними $f(t) = A(e^{bt} - e^{at}) \Leftrightarrow A(p-b)^{-1} - A(p-a)^{-1}$. Наконец, на основании свойства интегрирования изображения имеем

$$F(p) = \int_p^{\infty} \left(\frac{A}{p-b} - \frac{A}{p-a} \right) dp = A \ln \frac{p-a}{p-b}.$$

Пример 3. Найти изображение сигнала $f(t) = Sit = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$. В качестве вспомогательного используем сигнал $f_B(t) = \sin t$. Ему соответствует изобра-

жение $F_B(p) = 1/(p^2 + 1)$. Далее с помощью свойства интегрирования изображения устанавливаем: $(\sin t)/t \Leftrightarrow \int_p \frac{dp}{p^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \text{arcctg } p$. Наконец, на

основании свойства интегрирования оригинала имеем $F(p) = \text{arcctg } p/p$.

В общем случае переход от изображения $F(p)$ к самому сигналу (оригиналу) $f(t)$ выполняет обратное преобразование Лапласа. Непосредственное вычисление интеграла (2.61) является сложной и громоздкой задачей. Поэтому на практике, по возможности, переход к оригиналу осуществляют с помощью известных теорем разложения (наиболее часто используется вторая теорема).

Первая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является правильной (аналитической) функцией в бесконечно удаленной точке $\left(\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0\right)$

и имеет в её окрестности $|p| \geq R$ разложение $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}$ в ряд Лорана, то

$F(p) \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (t \geq 0)$. Доказательство теоремы формально вы-

полняется совместным применением свойства линейности и следствия из свойства дифференцирования изображения.

В качестве примера рассмотрим изображение $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p}$. Раскла-

дывая функцию $e^{-1/p}$ в ряд Лорана, имеем функцию $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{n+k+1}}$, кото-

рая удовлетворяет условиям теоремы, что позволяет сразу перейти к оригиналу

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!(n+k)!}.$$

Вторая (обобщенная) теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является функцией мероморфной (в качестве особых точек содержит только полюсы), аналитической в бесконечно удаленной точке $\left(\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0\right)$ и в полу-

плоскости $\text{Re } p > \sigma_0$ и если абсолютно сходится интеграл $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) dp$, то

$$f(t) = \sum_{p_k} \text{res}(F(p)e^{pt}). \quad (2.65)$$

Это значит, что искомый сигнал $f(t)$ (оригинал) равен сумме вычетов в особых точках (полюсах) его изображения $F(p)$ (целая трансцендентная функция

e^{pt} аналитична во всей открытой p -плоскости). Доказательство теоремы выполняются с применением леммы Жордана и теоремы Коши о вычетах.

В общем случае изображение $F(p)$, удовлетворяющее условиям обобщенной теоремы разложения, представляет отношение ($F(p) = A(p)/B(p)$) двух целых функций (целые функции подразделяются на целые рациональные и целые трансцендентные) и содержит l полюсов разного порядка. Учитывая это и механизм вычисления вычета в полюсе порядка n , выражение (2.65) принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{A(p)}{B(p)} (p - p_k)^{n_k} e^{pt} \right)^{(n_k - 1)}, \quad (2.66)$$

где p_k – полюс порядка n_k .

В задачах моделирования СТК наиболее часто полюсы p_k являются простыми. По крайней мере к этому целесообразно стремиться. При таком подходе соотношение (2.66) существенно упрощается:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.67)$$

где $B'(p_k) = \left(B'(p) \right)_{p=p_k}$.

Анализ выражений (2.66) и (2.67) показывает, что вычисление вычетов, основанное на операции дифференцирования, выполняется достаточно просто, особенно в случае простых полюсов. По этой причине обобщенная теорема разложения широко применяется на практике.

Как показано, изображение $F(p)$ периодического сигнала (см. (2.64)) содержит бесконечное число простых полюсов $p_k = j2\pi k/T$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Применяя к нему обобщенную теорему разложения, получаем представление сигнала в форме ряда Фурье. Последнее с учетом простоты механизма (2.67) вычисления вычетов делает возможным разложение в ряд Фурье с помощью преобразования Лапласа. Для его выполнения необходимо: а) с учетом выражения (2.64) найти изображение $F(p)$ представляемого периодического сигнала; б) выполнить обратное преобразование по алгоритму (2.67).

3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

3.1 Виды звеньев в системах телекоммуникаций

Современные СТК, являющиеся сложными физическими объектами, содержат большое количество различных по свойствам звеньев, которые с позиции их математического моделирования принято делить на линейные (инерционные, безынерционные) с постоянными параметрами, линейные (инерцион-

ные, безынерционные) с переменными параметрами и нелинейные (инерционные, безынерционные). Наиболее сложными для описания являются нелинейные инерционные звенья. Их при функциональном моделировании, как показано в подразд. 1.10, представляют совокупностью линейных инерционных, линейных и нелинейных безынерционных звеньев.

Линейное звено с постоянными параметрами (называемое также линейным стационарным) обладает следующими свойствами:

активные и реактивные параметры $(R, L, C) \neq \varphi(U(t), I(t))$ не зависят от мгновенных значений токов $I(t)$ и (или) напряжений $U(t)$ в звене;

выполняется принцип линейной суперпозиции

$$U_{\text{вых}}(t) = \Theta \left(\sum_{i=1}^N U_{\text{вх}i}(t) \right) = \sum_{i=1}^N \Theta(U_{\text{вх}i}(t)), \quad (3.1)$$

т.е. реакция звена на линейную суперпозицию входных воздействий $U_{\text{вх}i}(t)$ ($i = \overline{1, N}$) равна линейной суперпозиции реакций $U_{\text{вых}i}(t) = \Theta(U_{\text{вх}i}(t))$ на каждое воздействие (при этом предполагаются нулевые начальные условия – отсутствие в звене начального запаса энергии);

на выходе звена не возникают спектральные компоненты, отсутствующие во входном воздействии (как известно, при прохождении через линейное стационарное звено гармоническое колебание изменяет только амплитуду и начальную фазу, форма колебания остается неизменной).

Линейное звено с переменными параметрами (называемое также линейным параметрическим) обладает следующими свойствами:

активные и реактивные параметры $(R, L, C) \neq \varphi(U(t), I(t))$ не зависят от мгновенных значений токов и (или) напряжений, однако изменяются во времени (хотя бы один параметр) под воздействием внешней вынуждающей силы (необязательно электрической природы);

выполняется принцип (3.1) линейной суперпозиции;

на выходе звена возникают спектральные компоненты, отсутствующие во входном воздействии, например, при приложении к резистору с сопротивлением $R(t) = R/(1 + m \cos \Omega t)$ (изменяющимся внешней вынуждающей силой) гармонического напряжения $U(t) = U_m \cos \omega_0 t$ в нем появляется ток

$I(t) = \frac{U_m}{R} (1 + m \cos \Omega t) \times \cos \omega_0 t$ – амплитудно-модулированное колебание со спектральными компонентами на частотах $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$.

Нелинейное звено обладает следующими свойствами:

$(R, L, C) = \varphi(U(t), I(t))$, т.е. активные и реактивные параметры (хотя бы один) зависят от мгновенных значений токов и (или) напряжений;

не выполняется принцип (3.1) линейной суперпозиции;

на выходе звена возникают спектральные компоненты, отсутствующие во входном воздействии, при этом состав амплитудного спектра реакции зависит не только от формы, но, в отличие от линейного параметрического звена, также

от амплитуды воздействия.

Важно отметить следующее. Рассмотренные свойства звеньев никак не связаны с формой их практической реализации. Последняя может быть любой: с сосредоточенными параметрами; с распределенными параметрами; с аналоговой обработкой; с цифровой обработкой. Эти свойства определяют выбор подходящего математического описания и метода моделирования. Например, при моделировании нелинейных звеньев нельзя применять спектральный метод, метод моделирования по формуле Дюамеля и метод моделирования на основе операционного исчисления, в основе которых лежит принцип (3.1) линейной суперпозиции.

3.2 Моделирование линейных звеньев во временной области

Во временной области линейные звенья полностью описываются импульсной $g(t)$ и переходной $h(t)$ характеристиками.

Рассмотрим линейное звено. Подадим на его вход воздействие $U_{ex}(t)$ в виде одиночного импульса длительностью τ . Форма реакции $U_{вых}(t)$ будет зависеть от свойств звена и формы импульса $U_{ex}(t)$. Будем уменьшать длительность τ . При значениях $\tau < T_0$, где T_0 – период свободных (собственных) колебаний рассматриваемого звена, форма реакции уже мало зависит от формы воздействия. В пределе при $\tau \rightarrow 0$ она определяется только самим звеном. Очевидно, что при сокращении длительности τ уменьшается энергия воздействия. В пределе она становится бесконечно малой, вследствие чего реакция физически отсутствует. Чтобы этого не происходило, уменьшая длительность воздействия, необходимо одновременно увеличивать его амплитуду. Это в конечном итоге приводит к идеальному воздействию $U_{ex}(t)$ бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды.

Выполнить физическое моделирование идеального воздействия невозможно, зато существует его простая и эффективная математическая модель в виде δ -функции (единичного импульса) (2.51). С учетом этой модели под импульсной характеристикой $g(t)$ понимают реакцию линейного звена на единичный импульс $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

Помимо функции $\delta(t)$, при математическом моделировании свойств линейных звеньев используют также единичное ступенчатое воздействие (функцию Хевисайда) $\gamma(t)$ (2.59). Реакция звена на это воздействие при нулевых начальных условиях является его переходной характеристикой $h(t)$.

С учетом свойств функций $\delta(t)$ и $\gamma(t)$ (см. (2.51), (2.56), (2.59)) устанавливаем, что

$$\delta(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \int_{0-0}^t \delta(t) dt. \quad (3.2)$$

Аналогичная взаимосвязь

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_{0-0}^t g(t) dt \quad (3.3)$$

существует между импульсной и переходной характеристиками, поскольку $\delta(t) \Leftrightarrow g(t)$, $\gamma(t) \Leftrightarrow h(t)$ и в линейном звене выполняется принцип линейной суперпозиции (3.1), вследствие чего, в частности, между двумя реакциями существует такая же зависимость, как и между соответствующими им воздействиями.

Из свойств δ -функции и соотношений (3.2) вытекает, что $[\delta(t)] = c^{-1}$, а функция $\gamma(t)$ является безразмерной. Учтем также, что в зависимости от задания воздействия $f_{ex}(t)$ и реакции $f_{вых}(t)$ возможны следующие случаи: размерность $[f_{ex}(t)]$ воздействия и размерность $[f_{вых}(t)]$ реакции совпадают; $[f_{вых}(t)] = [f_{ex}(t)] \cdot [R]$; $[f_{вых}(t)] = [f_{ex}(t)] \cdot [R]^{-1}$, где $[R] = Ом$. Тогда (в СИ) импульсная характеристика $\delta(t)$ может иметь размерность $Ом \cdot c^{-1}$, $Ом^{-1} \cdot c^{-1}$ или c^{-1} , а переходная характеристика – $Ом$, $Ом^{-1}$ либо быть безразмерной. Это подтверждает абстрактный характер воздействий $\delta(t)$, $\gamma(t)$ и реакций $g(t)$, $h(t)$. Тем не менее импульсная $g(t)$ и переходная $h(t)$ характеристики (обладающие одинаковыми возможностями) полно определяют свойства линейного звена. При этом функция $g(t)$ по форме соответствует реакции звена на реальное физическое воздействие большой амплитуды и малой длительности, а функция $h(t)$ – реакции на реальное ступенчатое воздействие с малой длительностью фронта.

Характеристики $g(t)$ и $h(t)$ описывают свойства линейных звеньев, являющихся устойчивыми электрическими цепями. Поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = 0$, а $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) < \infty$. Формально подставляя в прямое преобразование (2.60) Лапласа функцию $\delta(t)$ и учитывая фильтрующее свойство (2.52), можно получить, что ее изображение $\Delta(p) = 1$. Из последнего с помощью свойства интегрирования оригинала прямо вытекает изображение $\Gamma(p) = 1/p$ функции $\gamma(t)$.

Воздействие $\delta(t)$ обладает бесконечно большой энергией (см. подразд. 2.9). Поэтому оно, в отличие от любых воздействий, описываемых кусочно-непрерывными функциями с разрывами первого рода, мгновенно изменяет напряжения на емкостях и ток в индуктивностях (что следует обязательно учитывать при моделировании звеньев на уровне принципиальной схемы). Чтобы убедиться в этом, предположим, что от идеального источника тока на емкость C при нулевых начальных условиях подается воздействие $I_{ex}(t) = A_I \delta(t)$ (импульс тока), под влиянием которого напряжение на емкости изменяется по за-

кону $U_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t A_I \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A_I/C, & t > 0+0, \end{cases}$ т.е. мгновенно возрастает от 0 до

A_I/C и далее не изменяется. При этом в емкости (мгновенно) накапливается энергия $\mathcal{E}_C = CU_C^2(0+0)/2 = A_I^2/(2C)$. Аналогично можно показать, что при подаче от идеального источника напряжения на индуктивность L при нулевых начальных условиях воздействия $U_{ex}(t) = A_U \delta(t)$ ток в индуктивности мгновенно возрастает от 0 до A_U/L и в ней накапливается энергия $\mathcal{E}_L = LI_L^2(0+0)/2 = A_U^2/(2L)$.

3.3 Моделирование линейных звеньев в частотной области

В частотной области линейные звенья описываются комплексной передаточной функцией, амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками (соответственно АЧХ и ФЧХ).

Как известно, АЧХ $|K(\omega)|$ представляет собой частотную зависимость отношения амплитуды (действующего значения) реакции линейного звена к амплитуде (действующему значению) гармонического воздействия на его входе, а ФЧХ $\theta(\omega)$ – частотную зависимость разности фаз реакции звена и гармонического воздействия. Учитывая, что воздействие $f_{ex}(t)$ может задаваться в форме напряжения $U_{ex}(t) = U_{ex.m}(\omega) \cos(\omega t + \varphi_U(\omega))$ или тока $I_{ex}(t) = I_{ex.m}(\omega) \cos(\omega t + \varphi_I(\omega))$ и реакция $f_{вых}(t)$ – в форме напряжения $U_{вых}(t) = U_{вых.m}(\omega) \cos(\omega t + \psi_U(\omega))$ или тока $I_{вых}(t) = I_{вых.m}(\omega) \cos(\omega t + \psi_I(\omega))$, то в общем случае различают следующие разновидности АЧХ и соответствующие им ФЧХ:

$$\begin{aligned} |K_1(\omega)| &= \frac{U_{вых.m}(\omega)}{U_{ex.m}(\omega)}; & |K_2(\omega)| &= \frac{I_{вых.m}(\omega)}{I_{ex.m}(\omega)}; \\ \theta_1(\omega) &= \psi_U(\omega) - \varphi_U(\omega); & \theta_2(\omega) &= \psi_I(\omega) - \varphi_I(\omega); \\ |K_3(\omega)| &= \frac{U_{вых.m}(\omega)}{I_{ex.m}(\omega)}; & |K_4(\omega)| &= \frac{I_{вых.m}(\omega)}{U_{ex.m}(\omega)}; \\ \theta_3(\omega) &= \psi_U(\omega) - \varphi_I(\omega); & \theta_4(\omega) &= \psi_I(\omega) - \varphi_U(\omega). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Очевидно, АЧХ $|K_1(\omega)|$ и $|K_2(\omega)|$ являются безразмерными, $[[K_3(\omega)]] = \text{Ом}$, $[[K_4(\omega)]] = \text{Ом}^{-1}$. ФЧХ $\theta_1(\omega) - \theta_4(\omega)$ измеряются в радианах. При этом на практике в основном используют АЧХ $|K_1(\omega)|$ (соответственно ФЧХ $\theta_1(\omega)$), остальные – значительно реже.

Согласно символическому методу анализа гармонические колебания $U_{ex}(t)$, $I_{ex}(t)$, $U_{вых}(t)$ и $I_{вых}(t)$ описываются комплексными амплитудами соответственно $\dot{U}_{ex.m}(\omega) = U_{ex.m}(\omega) e^{j\varphi_U(\omega)}$, $\dot{I}_{ex.m}(\omega) = I_{ex.m}(\omega) e^{j\varphi_I(\omega)}$, $\dot{U}_{вых.m}(\omega) = U_{вых.m}(\omega) e^{j\psi_U(\omega)}$ и $\dot{I}_{вых.m}(\omega) = I_{вых.m}(\omega) e^{j\psi_I(\omega)}$. С учетом этого комплексную передаточную функцию $K(\omega)$ линейного звена определяют как

частотную зависимость отношения комплексной амплитуды реакции к комплексной амплитуде воздействия. При этом аналогично (3.4) различают четыре разновидности функции $K(\omega)$:

$$\begin{aligned} K_1(\omega) &= \frac{\dot{U}_{\text{вых.т}}(\omega)}{\dot{U}_{\text{вх.т}}(\omega)}; & K_2(\omega) &= \frac{\dot{I}_{\text{вых.т}}(\omega)}{\dot{I}_{\text{вх.т}}(\omega)}, \\ K_3(\omega) &= \frac{\dot{U}_{\text{вых.т}}(\omega)}{\dot{I}_{\text{вх.т}}(\omega)}; & K_4(\omega) &= \frac{\dot{I}_{\text{вых.т}}(\omega)}{\dot{U}_{\text{вх.т}}(\omega)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из выражений (3.4) и (3.5) вытекает, что в общем случае

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \quad (3.6)$$

т.е. комплексная передаточная функция одновременно определяет АЧХ $|K(\omega)|$ и ФЧХ $\theta(\omega)$. Она также полно, как импульсная либо переходная характеристики, описывает свойства линейного звена и широко применяется при моделировании СТК спектральным методом (на основе преобразования Фурье).

Наглядное отображение частотных свойств линейного звена обеспечивается с помощью АЧХ и ФЧХ, т.е. парой характеристик, что используется на практике в подавляющем большинстве случаев. Вместе с тем иногда эти свойства представляют годографом комплексной передаточной функции. Как известно, годограф является кривой, которую описывает в полярной системе координат конец радиуса-вектора, при этом на текущей частоте ω длина радиуса-вектора равна значению АЧХ, а угол, отсчитываемый в положительном направлении, – значению ФЧХ. Обычно годограф строят в частотном диапазоне $0 \dots \infty$.

При моделировании реальных звеньев (каналов) СТК с помощью функции $K(\omega)$ (3.6) необходимо располагать описанием их АЧХ и ФЧХ. Это описание выполняют разными методами. По одному из них АЧХ и ФЧХ аппроксимируют отрезками простейших кривых (прямых, парабол, синусоид (косинусоид)), что, однако, обеспечивает невысокую точность аппроксимации. Для ее повышения требуется существенное увеличение количества аппроксимирующих кривых. Но тогда описание становится громоздким и неудобным в обращении. Поэтому на практике этот метод описания используют, как правило, при моделировании только амплитудно-частотных либо фазочастотных искажений, например, в звеньях (каналах) с откорректированной характеристикой группового времени запаздывания, при исследовании устройств фазовой коррекции с идеальной АЧХ. К минимально-фазовым звеньям, обладающим в общем случае неравномерной АЧХ и нелинейной ФЧХ, его применяют только при наиболее простых видах амплитудно- и фазочастотных искажений. В более сложных случаях в качестве аппроксимирующих используют функции другого типа, например, полиномы третьей степени. При соответствующем подборе их коэффициентов можно существенно повысить точность аппроксимации. Эффективным методом получения требуемых выражений для АЧХ и ФЧХ является

ся применение для этого операторной передаточной функции $K(p)$. От нее, как известно, просто перейти к комплексной передаточной функции $K(\omega)$, модуль и аргумент которой образуют АЧХ и ФЧХ.

3.4 Моделирование линейных звеньев на комплексной плоскости

Большое распространение получило описание свойств линейных звеньев СТК на комплексной плоскости с помощью операторной передаточной функции $K(p)$, которая представляет собой отношение лапласовского изображения $\bar{f}_{\text{вых}}(p)$ реакции $f_{\text{вых}}(t)$ линейного звена к изображению $\bar{f}_{\text{вх}}(p)$ произвольного воздействия $f_{\text{вх}}(t)$, вызвавшего ее, при нулевых начальных условиях. По аналогии с комплексной передаточной функцией $K(\omega)$ (см. (3.5)) в общем случае различают четыре разновидности операторной передаточной функции:

$$\begin{aligned} K_1(p) &= \frac{\bar{U}_{\text{вых}}(p)}{\bar{U}_{\text{вх}}(p)}, & K_2(p) &= \frac{\bar{I}_{\text{вых}}(p)}{\bar{I}_{\text{вх}}(p)}, \\ K_3(p) &= \frac{\bar{U}_{\text{вых}}(p)}{\bar{I}_{\text{вх}}(p)}, & K_4(p) &= \frac{\bar{I}_{\text{вых}}(p)}{\bar{U}_{\text{вх}}(p)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\bar{U}_{\text{вх}}(p) \Leftrightarrow U_{\text{вх}}(t)$; $\bar{I}_{\text{вх}}(p) \Leftrightarrow I_{\text{вх}}(t)$; $\bar{U}_{\text{вых}}(p) \Leftrightarrow U_{\text{вых}}(t)$; $\bar{I}_{\text{вых}}(p) \Leftrightarrow I_{\text{вых}}(t)$.

На практике в основном используется операторная функция $K_1(p)$.

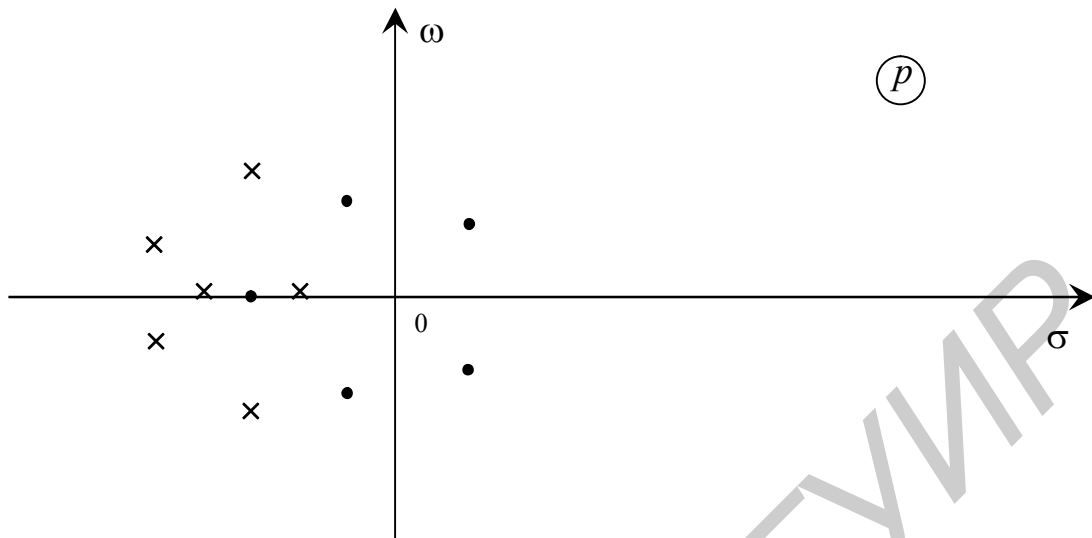
При моделировании на комплексной плоскости важно правильно выбрать вид операторной передаточной функции $K(p)$, которая обязательно должна принадлежать к классу функций, описывающих физически реализуемые линейные звенья, или, как говорят, удовлетворять условиям физической реализуемости. В связи с этим отметим, что операторная передаточная функция линейного устойчивого звена с сосредоточенными параметрами представляется дробно-рациональной функцией

$$K(p) = \frac{G(p)}{C \cdot V(p)}, \quad (3.8)$$

где $G(p) = p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m$ – полином степени m с действительными коэффициентами; $V(p) = p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots + c_n$ – полином Гурвица степени n ; $m \leq n$; $C > 0$ – масштабный (нормирующий) множитель.

Известно, что полином с действительными коэффициентами содержит действительные и (или) комплексно-сопряженные корни. В общем случае на расположение корней полинома $G(p)$ ограничения не накладываются. Полином $V(p)$ Гурвица – такой полином с действительными коэффициентами, все корни которого лежат в левой полуплоскости (имеют отрицательную действительную часть) (рисунок 3.1), что вытекает из требования устойчивости звена: расположение корней полинома $V(p)$ в правой полуплоскости соответствует

неустойчивому звену, а на мнимой оси – звену, находящемуся на границе устойчивости.



× – корни полинома $V(p)$; • - корни полинома $G(p)$

Рисунок 3.1 – Корневой портрет передаточной функции $K(p)$

По расположению корней полинома $G(p)$ звенья делятся на минимально- и неминимально-фазовые. У минимально-фазовых звеньев все корни полинома $G(p)$ находятся в левой полуплоскости и (или) на мнимой оси. Если хотя бы один из корней лежит в правой полуплоскости, то это соответствует неминимально-фазовому звену.

Корни полиномов $G(p)$ и $V(p)$, изображенные на комплексной плоскости, можно назвать корневым портретом операторной передаточной функции $K(p)$ (см. рисунок 3.1). Очевидно, что корни полинома $V(p)$ являются полюсами передаточной функции (3.8), а корни полинома $G(p)$ – ее нулями.

Из операторной передаточной функции $K(p)$ заменой $p = j\omega$ можно получить комплексную передаточную функцию $K(\omega)$, а затем, представляя последнюю в показательной форме, найти АЧХ $|K(\omega)|$ и ФЧХ $\theta(\omega)$ линейного звена:

$$[K(p)]_{p=j\omega} = K(\omega) = |K(\omega)|e^{j\theta(\omega)}. \quad (3.9)$$

Такой прием часто используется в задачах моделирования СТК, где требуется знание АЧХ и ФЧХ, причем для упрощения его выполнения рекомендуется вначале проделать следующие преобразования: $[V(p)]_{p=j\omega} = A(\omega^2) + j\omega B(\omega^2)$, $[G(p)]_{p=j\omega} = E(\omega^2) + j\omega D(\omega^2)$, где $A(\omega^2)$, $B(\omega^2)$, $E(\omega^2)$ и $D(\omega^2)$ – полиномы с действительными коэффициентами по четным степеням переменной ω . С их помощью на основании выражений (3.8) и (3.9) можно получить:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{E^2(\omega^2) + \omega^2 D^2(\omega^2)}{A^2(\omega^2) + \omega^2 B^2(\omega^2)}}, \quad (3.10)$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega D(\omega^2)}{E(\omega^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\omega B(\omega^2)}{A(\omega^2)}.$$

Как следует из соотношений (3.10), функция $|K(\omega)|$, описывающая АЧХ, является иррациональной и сложной для применения. Поэтому в задачах синтеза линейных звеньев с требуемыми АЧХ вместо нее используют функцию

$$R(\omega^2) = |K(\omega)|^2 = K(\omega) \cdot K^*(\omega) = \frac{\omega^{2m} + B_1 \omega^{2m-2} + \dots + B_m}{C^2 (\omega^{2n} + A_1 \omega^{2n-2} + \dots + A_n)}, \quad (3.11)$$

которая получена с учетом свойств полиномов $G(p)$, $V(p)$, $A(\omega^2)$, $B(\omega^2)$, $E(\omega^2)$ и $D(\omega^2)$. Функция $K^*(\omega)$ является комплексно-сопряженной функции $K(\omega)$.

Функция $R(\omega^2)$, описывающая квадрат АЧХ звена, является дробно-рациональной. Используя ее, как будет показано ниже, можно найти операторную передаточную функцию $K(p)$, по которой затем синтезировать звено с требуемой АЧХ.

ФЧХ $\theta(\omega)$ описывается трансцендентной функцией (см. (3.10)) переменной ω . Поэтому задача синтеза звена с требуемой ФЧХ значительно сложнее, чем задача синтеза звена с требуемой АЧХ.

С целью расширения возможностей моделирования и упрощения построения математической модели полином $V(p)$ Гурвица рекомендуется задавать в виде

$$V(p) = p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n = \prod_{s=1}^r (p + a_s) \cdot \prod_{l=1}^q (p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2), \quad (3.12)$$

где $a_s > 0$; $a_l > 0$; $\omega_l > 0$; $r + 2q = n$, т.е. предполагается, что в общем случае полином содержит r действительных и q пар комплексно-сопряженных корней (однократных).

Представление (3.8), (3.12), в отличие от других способов задания частотных характеристик, описывает с высокой точностью минимально- и неминимально-фазовые звенья практически с любой формой АЧХ и ФЧХ. Это позволяет моделировать каналы (звенья) типа: фильтра нижних частот (ФНЧ); фильтра верхних частот (ФВЧ); полосового (ПФ) и заграждающего (ЗФ) фильтров; фильтра с несколькими полосами пропускания. Можно также учитывать влияние фазокорректирующих звеньев. Нормированность комплексной переменной p позволяет использовать справочную литературу, где табулированы корни полиномов $G(p)$ и $V(p)$ типовых ФНЧ. Трансформируя корни с помощью реактансных или нереактансных преобразований, можно получить операторные передаточные функции звеньев типа ФВЧ, ПФ и ЗФ. Например, для

синтеза функции $K(p)$ ФВЧ необходимо выполнить реактансное преобразование первой степени, для синтеза передаточных функций ПФ и ЗФ с частотно-симметричными характеристиками – реактансные преобразования второй степени (называемые также полосовыми), а в случае требования частотно-несимметричных характеристик – преобразования Зданека, являющиеся разновидностью не реактансных преобразований.

Применение подобных справочников – своеобразных каталогов операторных передаточных функций ФНЧ с различными характеристиками рабочего затухания (ХРЗ) – позволяет отыскать в большинстве случаев необходимое математическое выражение для функции $K(p)$. При этом отпадает необходимость аппроксимации и нахождения корней характеристических полиномов $G(p)$ и $V(p)$.

Как известно, каталоги операторных передаточных функций ФВЧ, ПФ и ЗФ отсутствуют. В этих условиях для нахождения их математических моделей наиболее просто воспользоваться реактансными преобразованиями (первой степени для ФВЧ, второй степени для ПФ и ЗФ). Они сводятся к следующей замене нормированной комплексной переменной $p = p_{ФНЧ}$, входящей в выражение для передаточной функции $K(p)$ ФНЧ-прототипа:

$$p_{ФНЧ} = \frac{1}{p_{ФВЧ}}; \quad p_{ФНЧ} = \alpha \left(p_{ПФ} + \frac{1}{p_{ПФ}} \right); \quad p_{ФНЧ} = \left(\alpha \left(p_{ЗФ} + \frac{1}{p_{ЗФ}} \right) \right)^{-1}, \quad (3.13)$$

где $\alpha = f_0 / (f_D - f_{-D})$ – постоянная преобразования; f_0 , f_D , f_{-D} – соответственно центральная и граничные частоты полосы пропускания (задерживания) ПФ (ЗФ), причем $f_0^2 = f_D \cdot f_{-D}$; постоянная α характеризует относительную ширину полосы пропускания (задерживания) ПФ (ЗФ).

Наиболее простым является преобразование ФНЧ→ФВЧ. Оно на частотной оси меняет местами полосу пропускания и полосу задерживания: полоса пропускания (задерживания) ФНЧ становится полосой задерживания (пропускания) ФВЧ. Поэтому нормированная граничная частота полосы пропускания образуемого ФВЧ, как и аналогичная ФНЧ-прототипа, равна $\omega_D = 1$.

Из второго выражения (3.13) вытекает, что для нахождения нормированных (относительно центральной частоты) граничных частот ПФ необходимо разрешить уравнение $j1 = \alpha(j\omega + 1/(j\omega))$, которое после элементарных преобразований приводится к виду

$$\alpha\omega^2 - \omega - \alpha = 0. \quad (3.14)$$

При одинаковой постоянной α преобразования нормированные граничные частоты ПФ и ЗФ совпадают. Поэтому применительно к ЗФ можно использовать уравнение (3.14). Анализ механизмов преобразования также показывает, что переход от ФНЧ к ЗФ выполняется как непосредственным преобразованием ФНЧ→ЗФ, так и по схеме ФНЧ→ФВЧ→ПФ, а переход от ФНЧ к ПФ – как прямым преобразованием ФНЧ→ПФ, так и по схеме ФНЧ→ФВЧ→ЗФ.

Важно отметить следующее. Вследствие погрешностей при выполнении указанных реактансных преобразований возрастает неравномерность ХРЗ синтезируемого фильтра в пределах его полосы пропускания в сравнении с аналогичной ХРЗ ФНЧ-прототипа. Учитывая это, для минимизации погрешностей преобразования коэффициенты полиномов $G(p)$ и $V(p)$ ФНЧ-прототипа необходимо брать с точностью, не менее семи знаков после запятой.

В качестве примера при $\alpha = 14$ выполним реактансное преобразование ФНЧ \rightarrow ПФ операторной передаточной функции ФНЧ модели С05-5-29. Для этого фильтра

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^2 (p^2 + \omega_{\infty i}^2)}{C(p + a_s) \prod_{l=1}^2 (p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2)},$$

где $\omega_{\infty 1} = 2,1556276$; $\omega_{\infty 2} = 3,3628698$; $C = 35,7520250$; $a_s = 0,9012600$; $a_1 = 0,6340732$; $a_2 = 0,1974284$; $\omega_1 = 0,8407096$; $\omega_2 = 1,1965788$.

Осуществив подстановку в соответствии со вторым выражением (3.13) и последующие преобразования, получим следующее выражение для передаточной функции ПФ с частотно-симметричной ХРЗ:

$$K(p) = p \prod_{i=1}^4 (p^2 + \omega_{\infty i}^2) / \left(C \prod_{l=1}^5 (p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2) \right),$$

где $\omega_{\infty 1} = 1,0799457$; $\omega_{\infty 2} = 0,9259723$; $\omega_{\infty 3} = 0,8870839$; $\omega_{\infty 4} = 1,1272887$; $C = 500,5283500$; $a_1 = 0,0321878$; $a_2 = 0,0219652$; $a_3 = 0,0233256$; $a_4 = 0,0067495$; $a_5 = 0,0073525$; $\omega_1 = 0,9994818$; $\omega_2 = 0,9703642$; $\omega_3 = 1,0304148$; $\omega_4 = 0,9590417$; $\omega_5 = 1,0445115$. Воспользовавшись (3.14), также найдем, что полоса пропускания рассматриваемого ПФ ограничена диапазоном нормированных частот $0,9649234 - 1,0363516$.

3.5 Особенности операторных передаточных функций линейных звеньев

Операторные передаточные функции $K(p)$ линейных звеньев имеют важные особенности, которые можно эффективно использовать при моделировании СТК. Одна из них относится к передаточным функциям минимально-фазовых звеньев и состоит в том, что функцию $K(p)$ минимально-фазового звена можно восстановить, зная его АЧХ $|K(\omega)|$.

С учетом этого предположим, что известна АЧХ $|K(\omega)|$ некоторого минимально-фазового звена. Значит, известна и его функция (3.11) $R(\omega^2)$. В последней, основываясь на взаимосвязи $(K(p))_{p=j\omega} = K(\omega)$ операторной и комплексной передаточных функций, выполним замену $\omega = p/j$

($\omega^{2k} = (-1)^k p^{2k}$, $k = 1, 2, \dots$) переменной ω , в результате которой перейдем к функции

$$H(p^2) = \frac{(-1)^m p^{2m} + (-1)^{m-1} B_1 p^{2m-2} + \dots + B_m}{C^2 \left((-1)^n p^{2n} + (-1)^{n-1} A_1 p^{2n-2} + \dots + A_n \right)} \quad (3.15)$$

комплексного переменного p . Она является дробно-рациональной функцией и содержит в числителе и знаменателе полиномы с действительными коэффициентами по четным степеням p .

Полином по четным степеням обладает известным свойством: если число $p = p_k$ является его корнем, то число $p = -p_k$ – тоже корень, поскольку четная функция не изменяет значения при изменении знака аргумента. В силу же вещественности коэффициентов полинома его комплексные корни встречаются только комплексно-сопряженными парами. Последнее означает, что корни полиномов с действительными коэффициентами по четным степеням переменного p располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно действительной и мнимой осей, т.е. обладают так называемой квадрантной симметрией.

Полином знаменателя функции (3.15) не содержит корней на мнимой оси p -плоскости, иначе в этих точках $|K(\omega)| \rightarrow \infty$, что противоречит условиям физической реализуемости. Из $2n$ его корней выделим корни, лежащие в левой полуплоскости, и обозначим их p_1, p_2, \dots, p_n . Образует полином $V(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$. В правой полуплоскости находятся корни $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$, соответствующие полиному $V(-p) = (-1)^n (p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)$. Таким образом, полином знаменателя функции $H(p^2)$ разлагается на произведение полинома $V(p)$ Гурвица и сопряженного с ним полинома $V(-p)$.

Полином числителя функции (3.15) принципиально может содержать корни на мнимой оси. Согласно свойству квадрантной симметрии, эти корни являются кратными, причем кратность $k = 2, 4, 6, \dots$. С учетом этого из $2m$ корней полинома числителя выделим все корни, лежащие в левой полуплоскости, и половину из каждой кратных корней, находящихся на мнимой оси (если таковые есть). Обозначим их $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}$. Образует полином $G(p) = (p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})$. Оставшуюся половину корней обозначим $-p_{01}, -p_{02}, \dots, -p_{0m}$. Им соответствует полином $G(-p) = (-1)^m (p + p_{01})(p + p_{02}) \dots (p + p_{0m})$ и, значит, полином числителя есть произведение полиномов $G(p)$ и $G(-p)$. Тогда с учетом (3.15)

$$H(p^2) = \frac{G(p)}{CV(p)} \cdot \frac{G(-p)}{CV(-p)}, \text{ причем } \left(H(p^2) \right)_{p=j\omega} = R(\omega^2) = |K(\omega)|^2. \text{ Последнее оз-}$$

начает, что любая из функций $K(p) = \frac{G(p)}{CV(p)}$, либо $K(p) = -\frac{G(p)}{CV(p)}$, образованная по однозначному алгоритму формирования полиномов $G(p)$ и $V(p)$, является операторной передаточной функцией линейного звена с заданной АЧХ $|K(\omega)|$. От функции $K(p)$ в соответствии с соотношением (3.9) выполняется переход к ФЧХ $\theta(\omega)$.

Таким образом, по заданной АЧХ линейного минимально-фазового звена с точностью до знака определяется его передаточная функция $K(p)$ и с точностью до π ФЧХ. Можно также показать, что, наоборот, по заданной ФЧХ можно найти с точностью до постоянного действительного множителя АЧХ звена, т.е. в минимально-фазовых линейных звеньях существует взаимно однозначное соответствие между АЧХ и ФЧХ.

При описании линейных звеньев СТК на комплексной плоскости иногда используют операторную $\xi(p)$ и комплексную $\xi(\omega)$ постоянные передачи:

$$\begin{aligned} \xi(p) &= \ln K(p), \\ \xi(\omega) &= (\xi(p))_{p=j\omega} = \ln|K(\omega)| + j\theta(\omega) = A(\omega) + j\theta(\omega), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $K(p)$ ($K(\omega)$) – операторная (комплексная) передаточная функция; $|K(\omega)|$ ($\theta(\omega)$) – АЧХ (ФЧХ); $A(\omega) = \ln|K(\omega)|$ – логарифмическое затухание звена; вследствие многозначности логарифмической функции под $\theta(\omega)$ понимается так называемое главное значение $-\pi < \theta(\omega) < \pi$.

В случае минимально-фазового линейного звена, операторная передаточная функция $K(p)$ которого, как известно, не содержит нулей в правой полуплоскости, имеет место равенство

$$\frac{1}{2}\xi(\omega_0) + \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = 0, \quad (3.17)$$

где ω_0 – фиксированная частота.

Из равенства (3.17) после элементарных преобразований с учетом (3.16) вытекают выражения

$$A(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad \theta(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad (3.18)$$

которые показывают, что АЧХ (представляемая через логарифмическое затухание) и ФЧХ минимально-фазового звена связаны известными соотношениями Гильберта. Из них, в частности, следует: значение АЧХ (ФЧХ) на конкретной (фиксированной) частоте ω_0 определяется поведением ФЧХ (АЧХ) во всем частотном диапазоне от 0 до ∞ . Соотношения (3.18) позволяют напрямую найти, не прибегая к синтезу передаточной функции $K(p)$, одну частотную характеристику звена по его второй характеристике, которая с учетом возможности численного вычисления интегралов (3.18) может быть задана также табличным способом, т.е. по результатам экспериментальных исследований.

Как показано, в минимально-фазовом линейном звене по известной АЧХ можно синтезировать передаточную функцию $K(p)$ и по ней найти ФЧХ. В неминимально-фазовом звене из-за наличия нулей функции $K(p)$ в правой полуплоскости это проделать нельзя, и значит, отсутствует взаимно однозначная связь между АЧХ и ФЧХ.

С учетом этого предположим, что z корней полинома $G(p)$ функции (3.8) находятся в правой полуплоскости. Из этих корней образуем полином $V_0(-p)$. Из остальных $(m - z)$ корней, расположенных в левой полуплоскости и (или) на мнимой оси, сформируем полином $G_0(p)$. Тогда $G(p) = G_0(p) \cdot V_0(-p)$, и передаточная функция неминимально-фазового звена преобразуется к виду $K(p) = G_0(p) \cdot V_0(-p) / (CV(p))$. Далее введем в рассмотрение z корней, противоположных по знаку корням полинома $V_0(-p)$, и составим из них полином $V_0(p)$ Гурвица. образуем передаточную функцию $K_0(p) = G_0(p)V_0(p) / (CV(p))$, которая будет соответствовать минимально-фазовому звену. С учетом последнего имеем

$$K(p) = K_0(p) \cdot \frac{V_0(-p)}{V_0(p)} = K_0(p)K_\Phi(p) \quad (3.19)$$

или, переходя к комплексным передаточным функциям,

$$K(\omega) = |K(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = |K_0(\omega)|e^{j\theta_0(\omega)} \cdot |K_\Phi(\omega)|e^{j\theta_\Phi(\omega)}, \quad (3.20)$$

откуда

$$|K(\omega)| = |K_0(\omega)| \cdot |K_\Phi(\omega)|, \quad \theta(\omega) = \theta_0(\omega) + \theta_\Phi(\omega). \quad (3.21)$$

Анализ комплексной передаточной функции $K_\Phi(\omega)$ показывает, что АЧХ $|K_\Phi(\omega)| = 1$, а ФЧХ $\theta_\Phi(\omega)$ с ростом частоты ω от 0 до ∞ монотонно убывает от 0 до $-z\pi$, где z – порядок полинома $V_0(p)$. Это с учетом (3.19) – (3.21) позволяет заключить следующее. Произвольное неминимально-фазовое линейное звено можно представить последовательным соединением минимально-фазового звена, имеющего одинаковую с ним АЧХ $|K(\omega)| = |K_0(\omega)|$, и неминимально-фазового звена с идеальной АЧХ $|K_\Phi(\omega)| = 1$ и монотонно убывающей ФЧХ $\theta_\Phi(\omega)$. Последнее звено часто называют фазовым контуром, либо чисто фазовым звеном. Очевидно, при заданной АЧХ $|K(\omega)|$ минимально возможный фазовый набег на любой частоте ω равен $\theta_0(\omega)$. Он соответствует минимально-фазовому звену (звену минимальной фазы) с передаточной функцией $K_0(p)$. Одну и ту же АЧХ может иметь множество неминимально-фазовых звеньев, различающихся видом фазового контура. На границе этого множества находится минимально-фазовое звено, которое по сравнению со всеми другими звеньями множества обеспечивает минимальный фазовый набег. На использовании свойств (3.19) – (3.21) построена технология моделирования фазокорректирующих звеньев в СТК.

3.6 Взаимосвязь временных и частотных характеристик линейных звеньев

В процессе моделирования СТК часто возникает потребность перехода от частотных характеристик линейных звеньев к их временным характеристикам и от временных характеристик к частотным. Это можно выполнить на основе функциональной взаимосвязи, существующей между этими характеристиками. Используя такую взаимосвязь, можно, например, по известным АЧХ и ФЧХ, полученным по результатам экспериментальных исследований, рассчитать импульсную характеристику звена и затем применить ее при математическом моделировании искажений сигналов.

Предположим, что на вход произвольного линейного звена с комплексной передаточной функцией $K(\omega)$ подается воздействие $U_{ex}(t) = \delta(t)$. Его спектральная плотность безразмерна и составляет $S_{ex}(\omega) = S_{\delta}(\omega) = 1$ (см. подразд. 2.9). Поэтому спектральная плотность реакции $U_{vix}(t)$, являющейся импульсной характеристикой $g(t)$ этого звена, будет равна $S_{vix}(\omega) = S_{ex}(\omega)K(\omega) = K(\omega)$. Применяя к спектральной плотности $S_{vix}(\omega)$ преобразование (2.47), можно найти реакцию $U_{vix}(t)$, а применяя к реакции преобразование (2.46), – спектральную плотность $S_{vix}(\omega)$. Учитывая это,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.22)$$

поскольку $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Таким образом, импульсная характеристика произвольного линейного звена и его комплексная передаточная функция связаны парой преобразований (3.22) Фурье, т.е. импульсная характеристика единственным образом определяет его частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) и наоборот. Поскольку по известной импульсной характеристике можно найти переходную характеристику, то последняя также однозначно определяет (определяется) АЧХ и ФЧХ линейного звена.

При моделировании линейных искажений сигналов в СТК возникает необходимость в использовании звеньев с одинаковой формой АЧХ и ФЧХ, но с разными граничными частотами полосы пропускания, что связано с изменением масштаба по оси частот. В связи с этим рассмотрим звено с комплексной передаточной функцией $K_1(\omega)$. В соответствии с выражением (3.22) ей соответствует импульсная характеристика $g_1(t)$. Теперь перейдем к звену с передаточной функцией $K_2(\omega) = K_1(a\omega)$ (при $a > 1$ частотные характеристики сжимаются, а при $a < 1$ – растягиваются по частоте). Подставляя эту функцию в первый интеграл (3.22) и выполняя замену $\omega = x/a$ переменной, найдем:

$K_2(\omega) \Leftrightarrow g_2(t) = \frac{1}{a} g_1\left(\frac{t}{a}\right)$. Импульсной характеристике $g_1(t) \Leftrightarrow h_1(t)$ соответст-

вует переходная характеристика $h_1(t)$. Учитывая последнее, подставим выражение для $g_2(t)$ в интеграл (3.3), что дает $h_2(t) = h_1\left(\frac{t}{a}\right)$. Отсюда вытекает, что

растяжение (сжатие) частотных характеристик линейного звена по частоте в a раз сопровождается таким же по величине сжатием (растяжением) его переходной и импульсной характеристик по времени при одновременном увеличении (уменьшении) размаха последней в a раз. Важно отметить следующее. При изменении масштаба частотных характеристик по частоте и соответствующем изменении масштаба временных характеристик по времени размах переходной характеристики, в отличие от размаха импульсной характеристики, остается неизменным. Это необходимо учитывать при моделировании.

Функции (2.51) $\delta(t)$ соответствует изображение $\Delta(p) = 1$ (см. подразд. 3.2). Поступая аналогично, как при получении выражений (3.22), можно показать, что импульсная характеристика $g(t)$ и операторная передаточная функция $K(p)$ линейного звена связаны прямым и обратным преобразованиями Лапласа:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} K(p)e^{pt} dp, \quad K(p) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt. \quad (3.23)$$

Первый интеграл (3.23) очень часто используют при моделировании частотно-временных характеристик звеньев СТК.

Если на вход линейного звена с операторной передаточной функцией $K(p)$ подано единичное ступенчатое воздействие (2.59) $U_{ex}(t) = \gamma(t)$, то ему соответствует реакция $U_{vbx}(t)$ – переходная характеристика $h(t)$, имеющая изображение $\bar{U}_{vbx}(p) = K(p)/p$. С учетом этого обратимся к предельным соотношениям (2.63), в которых примем $F(p) = \bar{U}_{vbx}(p)$. Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} h(t) = h(0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty), \quad (3.24)$$

где $h(0)$ ($h(\infty)$) – начальное (установившееся) значение переходной характеристики звена.

Анализ поведения операторной $K(p)$ (см. (3.8)) и комплексной $K(\omega)$ передаточных функций линейного звена показывает, что $\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = K_{\infty}$ и $\lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega) = K_0$ (K_{∞} , K_0 – действительные значения), т.е. операторная и комплексная передаточные функции имеют одинаковое значение на частоте $\omega = \infty$ и одинаковое (но в общем случае другое) значение на нулевой частоте (на постоянном токе).

Из этого вытекает, что установившееся значение переходной характеристики отличается от нуля тогда, когда не равно нулю значение $|K_0|$ АЧХ на постоянном токе. С другой стороны, если АЧХ на бесконечно большой частоте имеет ненулевое значение $|K_{\infty}|$ (при $m = n$ в модели (3.8)), то переходная характеристика в момент времени $t = 0 + 0$ принимает скачком значение K_{∞} . С уче-

том взаимосвязи (3.3) и свойства (2.56) это означает, что в составе импульсной характеристики присутствует составляющая $K_{\infty}\delta(t)$. В таком случае говорят, что δ -функция «прорывается» на выход моделируемого звена.

Предельные соотношения (3.24) широко используются при моделировании СТК. С их помощью непосредственно по передаточной функции $K(p)$ довольно просто установить требуемые для анализа начальное $h(0)$ и установившееся $h(\infty)$ значения переходной характеристики звена. Оценка значения $h(0)$, например, необходима для правильного выбора алгоритма моделирования по формуле Дюамеля.

Библиотека БГУИР

4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

4.1 Методы математического моделирования линейных искажений сигналов

Моделирование линейных искажений сигналов в СТК основано на нахождении реакции $U_{\text{вых}}(t)$ исследуемого звена (канала) на континуальное детерминированное воздействие. Принципиально это возможно осуществить несколькими методами: а) непосредственным численным решением дифференциальных уравнений; б) методом разностных рекуррентных соотношений; в) моделированием по формуле Дюамеля; г) спектральным методом; д) методом на основе операционного исчисления. Методы отличаются используемым математическим аппаратом, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, степень проявления которых определяется конкретными условиями применения. Поэтому решение поставленной задачи во многом зависит от правильного выбора метода математического моделирования.

Как показано в разд. 1, в общем случае СТК, являясь сложной, стохастической и адаптивной, может быть описана системой (1.10) обыкновенных стохастических нелинейных дифференциальных уравнений I порядка с переменными коэффициентами. Эту систему уравнений, по возможности, упрощают (упрощение выполняется по схеме “детерминизация – замораживание параметров – линеаризация”) и приводят к определенному виду, который зависит от свойств конкретной СТК (конкретного моделируемого звена). В частности, задача математического моделирования линейных искажений сигналов соответствует детерминированной стационарной линейной СТК, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Метод непосредственного численного решения дифференциальных уравнений применяют в случаях, когда аналитическое решение системы (1.10) отсутствует вообще либо это решение нецелесообразно использовать ввиду его сложности и громоздкости. Очевидно, что метод численного решения уравнений является наиболее мощным аппаратом анализа и синтеза СТК. Он пригоден для математического моделирования всех видов звеньев: стационарных, нестационарных, линейных, нелинейных и др. Механизм численного решения дифференциальных уравнений хорошо разработан. Применительно к моделированию наибольшее распространение получили сравнительно легко программируемые самоначинающиеся численные методы, основанные на разложении в ряд Тейлора: методы Эйлера, Эйлера-Коши и Рунге-Кутта. Но их реализация требует хорошей математической подготовки, большого объема подготовительной работы, значительных затрат оперативной памяти ПЭВМ (что, впрочем, для современных ПЭВМ не так важно) и времени счета, особенно при решении системы (1.10) с большим количеством уравнений. Поэтому на практике данный метод моделирования обычно используют только тогда, когда невоз-

можно применение других, например, при моделировании нелинейных инерционных звеньев.

Метод моделирования по формуле Дюамеля основан на одной из четырех разновидностей интеграла Дюамеля. Эти разновидности непосредственно вытекают из двух симметричных форм (2.62) следствия из теоремы умножения изображений.

Рассмотрим линейное звено, описываемое операторной передаточной функцией $K(p)$. Как известно, его переходная характеристика $h(t)$ имеет изображение, равное $K(p)/p$. Подадим на вход звена произвольное воздействие $U_{ex}(t)$. На выходе звена ему соответствует реакция $U_{вых}(t)$. Воздействию $U_{ex}(t)$ и реакции $U_{вых}(t)$ соответствуют изображения $\overline{U_{ex}}(p)$ и $\overline{U_{вых}}(p)$. Обозначим $\overline{U_{ex}}(p) = F_1(p)$ и $K(p)/p = F_2(p)$. Тогда $pF_1(p) \cdot F_2(p) = \overline{U_{ex}}(p) \cdot K(p) = \overline{U_{вых}}(p)$. Далее обратимся к соотношениям (2.62), которые с учетом использованных обозначений трансформируются в четыре известные разновидности интеграла Дюамеля:

$$U_{вых}(t) = U_{ex}(0)h(t) + \int_0^t U'_{ex}(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.1)$$

$$U_{вых}(t) = U_{ex}(0)h(t) + \int_0^t U_{ex}(t-\tau)h'(\tau)d\tau, \quad (4.2)$$

$$U_{вых}(t) = U_{ex}(t)h(0) + \int_0^t U_{ex}(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (4.3)$$

$$U_{вых}(t) = U_{ex}(t)h(0) + \int_0^t U_{ex}(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (4.4)$$

где $U_{ex}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} U_{ex}(t)$ и $h(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} h(t)$ – начальные значения воздействия и переходной характеристики звена; $g(t) = h'(t)$ – импульсная характеристика звена.

Разновидности (4.1) и (4.2) интеграла Дюамеля получены из первой, а разновидности (4.3) и (4.4) – из второй симметричных форм (2.62) с дополнительным применением свойства симметрии интеграла свертки. На практике повсеместно используется разновидность (4.3). При этом необходимо отметить следующее.

Как показано в подразд. 3.6, начальное значение переходной характеристики отлично от нуля, когда степени полиномов числителя $G(p)$ и знаменателя $V(p)$ передаточной функции $K(p)$ (3.8) моделируемого звена равны ($m = n$), что соответствует ненулевому значению $|K_\infty|$ АЧХ на бесконечно большой частоте. Реальные звенья СТК имеют $|K_\infty| = 0$ и $h(0) = 0$. С учетом этого моделирование по формуле Дюамеля выполняют по формуле

$$U_{вых}(t) = \int_0^t U_{вх}(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (4.5)$$

полученной из соотношения (4.3) при нулевых начальных условиях ($h(0) = 0$).

Нахождение аналитического выражения для реакции (4.5) в случае моделирования реальных звеньев (каналов) требует громоздких математических преобразований даже при простых формах воздействия и часто оказывается вообще невозможным при усложнении последнего. Поэтому на практике интеграл (4.5) вычисляют на ПЭВМ одним из методов численного интегрирования, причем в большинстве случаев применяют алгоритм

$$U_{вых}(n \cdot \Delta t) = U_{вых.n} = \sum_{k=1}^n U_{вх}(k \cdot \Delta t) \cdot g((n-k)\Delta t) \cdot \Delta t = \Delta t \sum_{k=1}^n U_{вх.k} \cdot g_{n-k}, \quad (4.6)$$

где Δt – интервал дискретизации; $U_{вх.k} = U_{вх}(k \cdot \Delta t)$; $g_{n-k} = g((n-k)\Delta t)$.

Выражение (4.6) получено заменой интеграла (4.5) суммой способом прямоугольников. Возможно привлечение более точных методов численного интегрирования, например, метода Симпсона, метода трапеций. Интеграл Дюамеля (4.5), преобразованный для согласования с ПЭВМ в (4.6), получил название алгоритма дискретной свертки. В таком виде он сравнительно широко используется на практике при моделировании линейных искажений сигналов в СТК.

Положительными свойствами алгоритма дискретной свертки являются возможность моделирования линейных звеньев с постоянными и переменными параметрами, отсутствие сложной подготовительной работы, простота самого алгоритма. Однако обращение к выражению (4.6) показывает, что объем вычислений зависит от эффективной длительности $\tau_{эф}$ импульсной характеристики $g(t)$ и выбранного интервала Δt дискретизации, т.е. от числа шагов на отрезке времени, в течение которого импульсная характеристика практически затухает. Поэтому рассматриваемый метод выгодно применять только тогда, когда длительность $\tau_{эф}$ значительно меньше длительности входного воздействия, т.е. при моделировании прохождения протяженных по времени сигналов через широкополосные звенья (каналы). Если длительности воздействия $U_{вх}(t)$ и импульсной характеристики $g(t)$ сопоставимы (что, например, характерно для телевизионных (ТВ) систем), то для достижения требуемой точности интервал дискретизации приходится выбирать достаточно малым. В результате резко возрастает количество шагов счета, и быстродействие метода оказывается невысоким. Отметим также, что алгоритм дискретной свертки предполагает, что известна импульсная характеристика моделируемого звена, отсчеты которой необходимо предварительно вычислить (либо получить по результатам измерений) и хранить в памяти ПЭВМ. Это дополнительно снижает быстродействие метода и увеличивает необходимый объем оперативной памяти.

Метод разностных рекуррентных соотношений основан на цифровой модели исследуемого звена (канала). При ее построении импульсная характе-

ристика $g(t)$ и операторная передаточная функция $K(p)$ моделируемого аналогового звена считаются известными. Последняя используется для нахождения передаточной функции $K^*(z)$ эквивалентного дискретного звена. Как известно, функция $K^*(z)$ является дискретным преобразованием Лапласа (Z -преобразованием) импульсной реакции $g^*(t)$, соответствующей импульсной характеристике $g(t)$:

$$K^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^* Z^{-n}, \quad (4.7)$$

где g_n^* – значения импульсной реакции $g^*(t)$; $Z = e^{pT}$; здесь T – интервал дискретизации.

Если функция $K^*(z)$ может быть представлена дробно-рациональной функцией вида

$$K^*(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_k z^k}{1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \dots - \beta_m z^m} \quad (k \leq m), \quad (4.8)$$

то ее идентификация для дискретных значений реакции $U_{вых}(t)$ звена на входное воздействие $U_{вх}(t)$ приводит к рекуррентному разностному уравнению

$$U_{вых.n} = \alpha_0 U_{вх.n} + \alpha_1 U_{вх.n-1} + \alpha_2 U_{вх.n-2} + \dots + \alpha_k U_{вх.n-k} + \beta_1 U_{вых.n-1} + \beta_2 U_{вых.n-2} + \dots + \beta_m U_{вых.n-m}. \quad (4.9)$$

Алгоритм (4.9) при небольшом количестве членов в числителе и знаменателе функции (4.8) (что при задании передаточной функции $K(p)$ в форме (3.8) соответствует невысоким значениям степеней характеристических полиномов $G(p)$ и $V(p)$), позволяет уменьшить время счета по сравнению с алгоритмом (4.6) дискретной свертки за счет использования уже рассчитанных значений реакции $U_{вых}(t)$. Однако при усложнении передаточной функции $K(p)$ объем вычисления резко возрастает. Одновременно усиливается эффект накопления ошибок по мере роста номера отсчета n . Это ограничивает применимость метода теми случаями, когда в качестве модели линейного звена (канала) используется фильтр (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или ЗФ) невысокого порядка.

Спектральный метод получил широкое распространение при исследовании СТК. В частности, он используется в большинстве современных программ математического моделирования линейных искажений сигналов. По этому методу реакция $U_{вых}(t)$ моделируемого звена (канала) находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вх}(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.10)$$

спектральной плотности $S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega) K(\omega)$ реакции, где $S_{вх}(\omega)$ – спектральная плотность воздействия $U_{вх}(t)$, определяемая прямым преобразованием

ем Фурье (2.46); $K(\omega)$ – комплексная передаточная функция звена.

При моделировании в качестве воздействий $U_{ex}(t)$ обычно используют сигналы, описываемые элементарными кривыми, что позволяет найти точное аналитическое выражение для $S_{ex}(\omega)$. Если исследуется влияние только амплитудно-частотных либо фазочастотных искажений упрощенного вида, когда АЧХ (ФЧХ) аппроксимируется несложным соотношением, то сравнительно просто получается аналитическое выражение также для реакции $U_{вых}(t)$. Применение в качестве модели канала (звена) четырехполосника минимально-фазового типа в виде фильтра высокого порядка делает значительно более сложным выражение его комплексной передаточной функции $K(\omega)$, что затрудняет определение точного аналитического выражения для реакции $U_{вых}(t)$. В этом случае интеграл (4.10) вычисляют на ПЭВМ методом численного интегрирования. Так же поступают при нахождении спектральной характеристики $S_{ex}(\omega)$, причем для уменьшения времени счета при многократном переходе от временного представления сигналов к частотному и наоборот используют алгоритмы быстрого преобразования Фурье.

Спектральный метод не накладывает ограничений на форму АЧХ и ФЧХ моделируемого звена и способ их задания, он мало чувствителен к ошибкам округления, которые не накапливаются. Единичные ошибки как бы распределяются по анализируемому интервалу, в результате чего их амплитуда становится незначительной. Известно, однако, что интегралом Фурье представляются функции, удовлетворяющие условию Дирихле и абсолютной интегрируемости (см. подразд. 2.8). При решении некоторых задач последнее требование не выполняется. Тогда дополнительно обращаются к аппарату обобщенных функций (δ -функция, ее производные и др.), что не всегда удобно. Кроме того, вычисление на ПЭВМ реакции $U_{вых}(t)$ звена (канала) на воздействие $U_{ex}(t)$ осуществляется многократным обращением к алгоритму быстрого преобразования Фурье для перехода от временного представления сигналов к частотному и обратного преобразования. Причем число обращений тем больше, чем меньше интервал дискретизации. Последний уменьшают для увеличения точности расчетов. Поэтому, несмотря на использование алгоритма быстрого преобразования Фурье, спектральный метод моделирования, как и рассмотренные выше методы моделирования, требует значительных объемов оперативной памяти ПЭВМ и времени счета.

Метод моделирования на основе операционного исчисления получает все большее распространение при анализе и синтезе СТК. В качестве воздействия $U_{ex}(t)$ при моделировании линейных искажений целесообразно использовать сигналы, представляемые совокупностью одной или нескольких элементарных кривых (отрезков прямых, гармонических функций и т.д.). Операторное изображение $U_{ex}(p)$ указанного воздействия, получаемое на основании прямого преобразования Лапласа (2.60), является мероморфной функцией комплексного

переменного p (однозначная функция называется мероморфной, если ее особенностями являются только полюсы), причем, не сужая круга применимости модели, можно всегда выбрать такой вид $U_{ex}(t)$, чтобы изображение $\overline{U_{ex}}(p)$ содержало только однократные полюсы, не совпадающие с полюсами операционной передаточной функции $K(p)$ моделируемого звена (канала).

Зная изображение $\overline{U_{ex}}(p)$ и передаточную функцию $K(p)$, находим вначале изображение $\overline{U_{вых}}(p) = \overline{U_{ex}}(p)K(p)$ реакции, а затем, применяя обратное преобразование Лапласа (2.61), – саму реакцию (выходной сигнал):

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \overline{U_{ex}}(p)K(p)e^{pt} dp, \quad (4.11)$$

где путь интегрирования лежит правее особых точек функции $\overline{U_{вых}}(p)$ (целая трансцендентная функция e^{pt} аналитична во всей открытой комплексной плоскости).

Учитывая свойства изображения $\overline{U_{ex}}(p)$ и задаваемой выражениями (3.8), (3.12) передаточной функции $K(p)$, нетрудно установить, что вычисление интеграла (4.11) Римана-Меллина выполняется с помощью обобщенной теоремы разложения (2.65), т.е. сводится к простой операции нахождения вычетов в однократных полюсах мероморфной функции $M(p) = \overline{U_{вых}}(p)e^{pt}$.

Важно отметить следующее. Как показано в подразд. 2.11, изображение $\overline{U_{ex}}(p)$ периодического, в том числе в узком смысле, воздействия $U_{ex}(t)$ произвольной формы в качестве особых точек содержит бесконечное число простых (однократных) полюсов $p_k = j2\pi k/T$ (T – период повторения, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), расположенных на мнимой оси комплексной плоскости. Реакция $U_{вых}(t)$ устойчивого линейного звена на периодическое воздействие является тоже периодической. Поэтому при ее нахождении вычеты необходимо вычислять только в полюсах p_k изображения $\overline{U_{ex}}(p)$ воздействия (полюсы передаточной функции $K(p)$ не учитываются). При нахождении реакции $U_{вых}(t)$ звена на периодическое в узком смысле воздействие $U_{ex}(t)$ принимаются в расчет все полюсы: изображения $\overline{U_{ex}}(p)$ и $K(p)$. Причем сумма вычетов функции $M(p)$ в полюсах изображения $\overline{U_{ex}}(p)$ дает установившуюся (периодическую) составляющую $U_{уст}(t)$, а сумма вычетов в полюсах функции $K(p)$ – переходную (затухающую) составляющую реакции $U_{вых}(t) = U_{уст}(t) + U_{пер}(t)$.

Очевидно, что аппарат операционного исчисления хорошо согласуется с описанием звеньев в виде (3.8). Он позволяет сравнительно просто получить точное аналитическое выражение реакции $U_{вых}(t)$, для определения численных значений которой необходимы, как правило, небольшие объем оперативной памяти и машинное время. Преимуществом этого метода моделирования явля-

ется возможность его использования при воздействиях $U_{ex}(t)$, не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости. Все виды применяемых на практике функций представимы интегралом Лапласа (2.60). С учетом сказанного рассматриваемый метод рекомендуется использовать при математическом моделировании линейных искажений сигналов в сочетании с описанием (3.8), (3.12) свойств линейных звеньев.

4.2 Математическое моделирование линейных искажений измерительных сигналов

При синтезе СТК возникает необходимость определения обоснованных допусков на неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ отдельных звеньев и СТК в целом, при выполнении которых обеспечиваются малые (допустимые) линейные искажения передаваемых (принимаемых) сигналов. Эффективным способом нахождения поля допусков является математическое моделирование процесса прохождения измерительных сигналов в исследуемом канале (звене). В качестве модели последнего часто используют ФНЧ (при передаче сигнала непосредственно по видеочастоте) либо ПФ (при передаче на несущей частоте). Выбирая соответствующим образом характеристики ФНЧ (ПФ) и рассчитывая для каждого случая форму сигнала на выходе, можно установить обоснованные допуски на неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ моделируемого канала.

С учетом этого рассмотрим единичный модулированный скачок $U_{\omega}(t)$ и периодическую последовательность $U_n(t)$ прямоугольных импульсов (рисунк 4.1, а, б):

$$U_{\omega}(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t + \Phi_0), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad U_n(t) = \begin{cases} 1, & [iT, iT + \tau), \\ 0, & [iT + \tau, (i+1)T), \end{cases} \quad (i = \overline{-\infty, \infty}). \quad (4.12)$$

Эти воздействия используют при математическом и физическом моделировании искажений сигналов в каналах типа ФНЧ и ПФ. Кроме того, линейной суперпозицией воздействий $U_{\omega}(t)$, $U_n(t)$ и их сдвигов по времени с достаточной степенью точности представляются многие из нормируемых в СТК измерительных сигналов и их элементов. Поэтому, имея реакции $h_{\omega}(t)$ и $h_n(t)$ на воздействия соответственно $U_{\omega}(t)$ и $U_n(t)$ и учитывая свойство линейности преобразования Лапласа, можно составить выражение для реакции моделируемого звена (канала) на интересующий измерительный сигнал.

Для нахождения реакций $h_{\omega}(t)$ и $h_n(t)$ воспользуемся методом моделирования на основе операционного исчисления. В соответствии с его процедурой с помощью прямого преобразования Лапласа (2.60) найдем изображения воздействий $U_{\omega}(t)$ и $U_n(t)$: $\overline{U_{\omega}}(p) = (p \cos \Phi_0 - \omega_0 \sin \Phi_0) / (p^2 + \omega_0^2)$; $\overline{U_n}(p) = (1 - e^{-p\tau}) / (1 - e^{-pT})$. Анализ функций $\overline{U_{\omega}}(p)$ и $\overline{U_n}(p)$ показывает, что их особыми точками являются однократные полюсы. С учетом свойств опера-

торной передаточной функции $K(p)$, задаваемой выражениями (3.8) и (3.12), изображения $\overline{h_\omega}(p)$ и $\overline{h_n}(p)$ реакций также имеют в качестве особых точек только простые полюсы. Поэтому для нахождения самих реакций $h_\omega(t)$ и $h_n(t)$ в соответствии с обобщенной теоремой разложения (2.65) необходимо по алгоритму (2.67) вычислить вычеты в однократных полюсах функций $M_\omega(p) = \overline{U_\omega}(p)K(p)e^{pt}$ и $M_n(p) = \overline{U_n}(p)K(p)e^{pt}$.

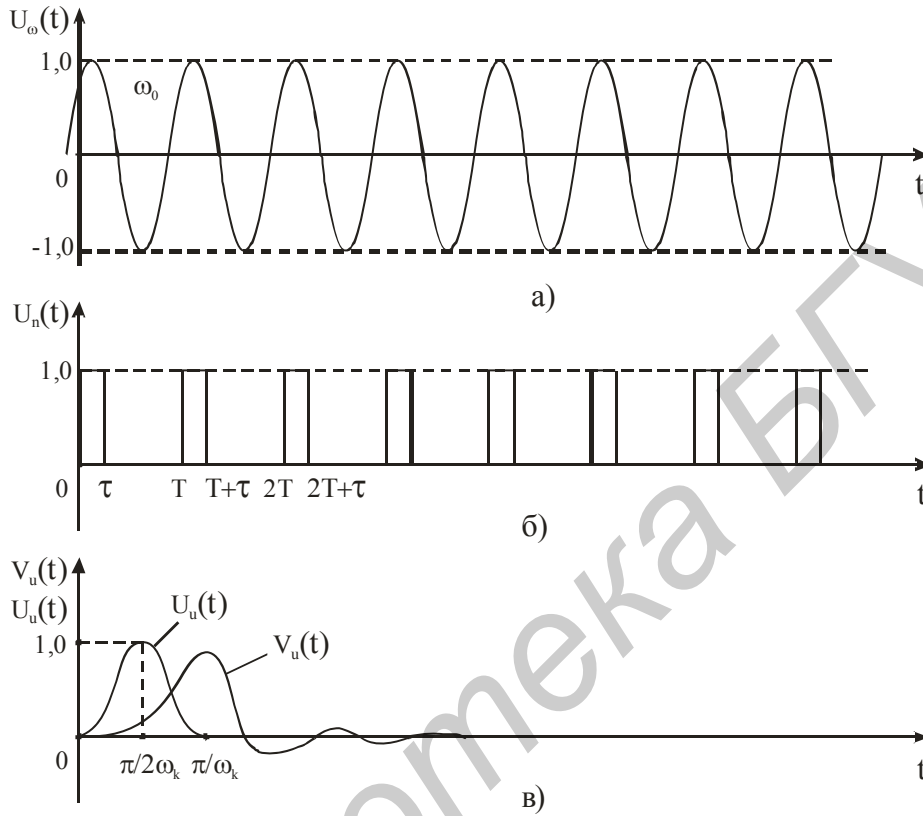


Рисунок 4.1 – Входные воздействия

Выполнив необходимые преобразования, имеем:

$$\begin{aligned}
 h_\omega(t) = & |K(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \Phi_0 + \theta(\omega_0)) - \sum_{s=1}^r \frac{a_s \cos \Phi_0 + \omega_0 \sin \Phi_0}{(a_s^2 + \omega_0^2)} K_s e^{-a_s t} + \\
 & + \sum_{l=1}^q \frac{|K_l| e^{-a_l t}}{\omega_l^2 ((\omega_0^2 - \omega_l^2 + a_l^2)^2 + (2a_l \omega_l)^2)} ((\omega_l^2 (\omega_0^2 - \omega_l^2 - a_l^2) \cos \Phi_0 - \\
 & - 2a_l \omega_l^2 \omega_0 \sin \Phi_0) \cos(\omega_l t + \varphi_l) - (a_l \omega_l (\omega_0^2 + \omega_l^2 + a_l^2) \cos \Phi_0 + \\
 & + \omega_0 \omega_l (\omega_0^2 - \omega_l^2 + a_l^2) \sin \Phi_0) \sin(\omega_l t + \varphi_l)); \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_n(t) = & K(0) - \sum_{s=1}^r K_s e^{-a_s t} \left(\frac{1}{a_{s11}} + \frac{1}{a_{s22}} \right) - \sum_{l=1}^q \frac{|K_l| e^{-a_l t}}{\omega_l} \left(\frac{\omega_{l11}}{a_{l11}^2 + \omega_{l11}^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega_{l22}}{(a_{l22}^2 + \omega_{l22}^2) e^{a_l(T-\tau)}} \right) \cos(\omega_l t + \varphi_l) + \left(\frac{a_{l11}}{a_{l11}^2 + \omega_{l11}^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{a_{l22}}{(a_{l22}^2 + \omega_{l22}^2)e^{a_l(T-\tau)}} \sin(\omega_l t + \varphi_l)); \quad (4.14)$$

$$h_n(t) = \sum_{s=1}^r \frac{K_s e^{-a_s t}}{a_{s11}} (e^{a_s \tau} - 1) + \sum_{l=1}^q \frac{|K_l| e^{-a_l t}}{\omega_l (a_{l11}^2 + \omega_{l11}^2)} (\omega_{l11} e^{a_l \tau} \times \\ \times \cos(\omega_l(t-\tau) + \varphi_l) - \omega_{l11} \cos(\omega_l t + \varphi_l) + a_{l11} e^{a_l \tau} \sin(\omega_l(t-\tau) + \varphi_l) - \\ - a_{l11} \sin(\omega_l t + \varphi_l)), \quad (4.15)$$

где $K(\omega_0) = |K(\omega_0)| e^{j\theta(\omega_0)} = (K(p))_{p=j\omega_0}$;

$$|K_l| e^{j\varphi_l} = ((p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2) K(p))_{p=-a_l + j\omega_l};$$

$$K_s = ((p + a_s) K(p))_{p=-a_s}; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\begin{pmatrix} a_{l11} \\ \omega_{l11} \end{pmatrix} = (1 - e^{-a_l T} \cos \omega_l T) \begin{pmatrix} a_l \\ \omega_l \end{pmatrix} + e^{-a_l T} \sin \omega_l T \begin{pmatrix} -\omega_l \\ a_l \end{pmatrix};$$

$$a_{s11} = a_s (1 - e^{-a_s T}); \quad a_{s22} = a_s (1 - e^{a_s T}) / e^{a_s \tau};$$

$$\begin{pmatrix} a_{l22} \\ \omega_{l22} \end{pmatrix} = (e^{-a_l T} \cos \omega_l \tau - \cos \omega_l (T - \tau)) \begin{pmatrix} a_l \\ \omega_l \end{pmatrix} + (e^{-a_l T} \sin \omega_l \tau + \sin \omega_l (T - \tau)) \begin{pmatrix} \omega_l \\ -a_l \end{pmatrix}.$$

Отметим следующее. Как показано в подразд. 2.11, при нахождении реакции звена на периодическое воздействие (таковой и является $h_n(t)$) использование общепринятого подхода к вычислению интеграла (4.11), состоящего в применении известной теоремы Коши о вычетах, приводит к представлению реакции тригонометрическим рядом Фурье. В отличие от этого выражения (4.14) и (4.15), полученные с использованием нестандартного подхода к вычислению контурного интеграла, представляют реакцию в любой точке периодического интервала не рядом Фурье, а конечной суммой (в замкнутом виде), число слагаемых которой определяется порядком передаточной функции $K(p)$. Это уменьшает время счета на ПЭВМ и повышает наглядность выходного результата.

Предельными переходами $h(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0, \Phi_0 \rightarrow 0} h_\omega(t)$ и $h_1(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} h_n(t)$ в соотношениях (4.13) – (4.15) просто получить необходимые во многих случаях выражения для переходной характеристики $h(t)$ исследуемого звена (канала) и его реакции $h_1(t)$ на одиночный прямоугольный импульс. Одновременно

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t), [0, \tau), \\ h(t) - h(t - \tau), [\tau, \infty). \end{cases} \quad (4.16)$$

Соотношение (4.16) очень удобно для практического применения.

Анализ построенных математических моделей (4.13) – (4.16) с учетом выполнения по ним количественных расчетов на ПЭВМ показывает, что с целью упрощения составления программ и уменьшения объема работ по подготовке данных все программы расчета прохождения сигналов, независимо от используемой системы программирования, целесообразно разрабатывать на базе

единой подпрограммы (процедуры), реализующей машинный алгоритм вычисления параметров $K(\omega_0)$, $|K(\omega_0)|$, $\theta(\omega_0)$, K_s , $|K_l|$ и φ_l , входящих в модели (4.13) – (4.15). Обращение к определению этих параметров и выражениям (3.8), (3.12) показывает, что величины $K(\omega_0)$, $|K(\omega_0)|$ и $\theta(\omega_0)$ представляют собой численные значения соответственно комплексной передаточной функции, АЧХ и ФЧХ фильтра – модели исследуемого звена (канала) – на частоте ω_0 . Поэтому упомянутая единая подпрограмма (процедура) является также основным элементом программы расчета частотных характеристик моделируемого канала.

В качестве примера составления на основе соотношений (4.13) – (4.15) математических моделей прохождения нормируемых измерительных сигналов найдем выражение для реакции $V_u(t)$ на воздействие $U_u(t)$ в виде \sin^2 –импульса, наиболее часто применяемого при проектировании и эксплуатации ТВ систем (рисунок 4.1, в)

$$U_u(t) = \begin{cases} \sin^2 \omega_k t, [0, \pi/\omega_k] \\ 0,]\pi/\omega_k, \infty[\end{cases} \quad (4.17)$$

Для упрощения нахождения изображения $\overline{U_u(p)}$ рассматриваемого сигнала представим функцию $f(t) = \sin^2 \omega_k t$ в виде $f(t) = 0,5(1 - \cos 2\omega_k t)$, учтем, что $\gamma(t) \cdot 1 \Leftrightarrow 1/p$ и $\gamma(t) \cdot \cos 2\omega_k t \Leftrightarrow p^2 / (p^2 + 4\omega_k^2)$ ($\gamma(t)$ – единичная ступенчатая функция (2.59)), и воспользуемся теоремой запаздывания. В результате получим

$$\overline{U_u(p)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\omega_k^2} \right) (1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_k} p}). \quad (4.18)$$

Выражение (4.18) показывает, что воздействие $U_u(t)$ представляет линейную суперпозицию ступенчатого единичного воздействия, включающегося в момент $t = 0$ косинусоидального напряжения с частотой $2\omega_k$ и нулевой начальной фазой и их сдвига на время π/ω_k . С учетом этого сразу приходим к выражению

$$V_u(t) = \begin{cases} (h(t) - h_{1\omega}(t))/2, [0, \pi/\omega_k] \\ (h(t) - h_{1\omega}(t) - h(t - \pi/\omega_k) + h_{1\omega}(t - \pi/\omega_k))/2, (\pi/\omega_k, \infty), \end{cases} \quad (4.19)$$

где $h_{1\omega}(t) = (h_\omega(t))_{\omega_0 = 2\omega_k, \Phi_0 = 0}$.

Соотношение (4.19) есть результат математического моделирования прохождения через исследуемое звено (канал) с заданными частотными характеристиками измерительного сигнала в виде \sin^2 –импульса. Возможности модели позволяют исследовать линейные искажения в каналах минимально- и неминимально-фазового типов, что объясняется принятым в форме (3.8) описанием линейных четырехполюсников.

4.3 Универсальный метод расчета линейных искажений сигналов

В процессе математического (физического) моделирования линейных искажений в СТК, наряду с непериодическими воздействиями, также широко применяются периодические. При их использовании реакцию моделируемого звена (канала) целесообразно представлять не тригонометрическим рядом Фурье, а в замкнутом виде. Это упрощает вычислительную процедуру, устраняет свойственные применению тригонометрического ряда проблемы улучшения сходимости и оценки точности, повышает наглядность результата.

Такие методы представления в замкнутом виде реакции линейной системы на периодическое воздействие известны. Они основаны на преобразовании (сворачивании) описывающего реакцию тригонометрического ряда одним из методов гармонического синтеза либо на непосредственном решении векторного (скалярного) дифференциального уравнения пространства состояний и последующем представлении реакции сверткой воздействия и периодической функции Грина или в виде интегрального преобразования воздействия с ядром, содержащим матрицу перехода. Известные методы отличаются сложностью, необходимостью проведения громоздких математических преобразований, значительных по объему даже для простейших воздействий и невысоких порядков дифференциального уравнения (передаточной функции), плохим согласованием с используемым в инженерной практике описанием свойств СТК. Поэтому они практически не применяются.

Для нахождения реакции линейной системы на периодическое воздействие в замкнутом виде воспользуемся следующей теоремой и следствием из нее.

Теорема. Если на интервале $[0, T)$ действительная функция $\xi(t)$ имеет все производные и $|\xi^{(u)}(t)| \leq ML^{u+1}$ ($u = 0, 1, 2, \dots$), то при любом $t_v \in [0, T)$ преобразование $\bar{\xi}_v(p) = \int_0^{t_v} \xi(t)e^{-pt} dt$ представляется в виде $\bar{\xi}_v(p) = F_{v1}(p)e^{-pt_v} - F_{v0}(p)$, где функции комплексного переменного $F_{v1}(p)$ и $F_{v0}(p)$ аналитичны в области $|p| > L$ и стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$.

Следствие. Если $F_{v0}(p)$ – дробно-рациональная функция, то функция $F_{v1}(p)$ тоже дробно-рациональна и многочлен ее знаменателя совпадает с многочленом знаменателя функции $F_{v0}(p)$.

Очевидно, что если функция $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы на полубесконечном интервале $[0, \infty)$, то $F_{v0}(p) = -\bar{\xi}(p)$, где $\bar{\xi}(p)$ – изображение по Лапласу функции $\xi(t)$. При условиях теоремы также справедливо соотношение

$$\xi(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\xi^{(u)}(0)}{u!} t^u \leq \sum_{u=0}^{\infty} \frac{ML^{u+1}t^u}{u!} = MLe^{Lt},$$

и, значит, в класс охватываемых теоремой функций попадают все (имеющие производные), которые возрастают не быстрее функций экспоненциального типа. Они, как показано в подразд. 2.11, преобразуемы по Лапласу.

Введем в рассмотрение действительную функцию $\varphi(t)$, определяемую на интервале $[0, \infty)$, удовлетворяющую на конечном интервале $[0, T)$ условиям приведенной теоремы, а также функции (рисунок 4.2):

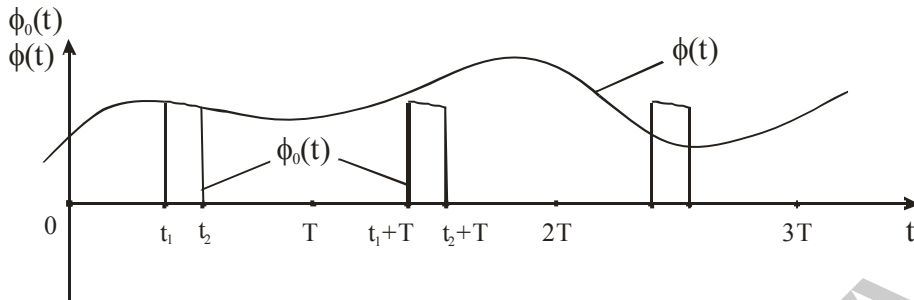


Рисунок 4.2 – Воздействия $\varphi(t), \varphi_0(t)$

$$\varphi_{iT}(t) = \begin{cases} \varphi(t), [(i-1)(i-2)t_1/2, t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1)], \\ 0, (-\infty, (i-1)(i-2)t_1/2), [t_1 + (i-1)^2(t_2 - t_1), \infty) \end{cases}$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_{iT}(t), [0, T), \\ \varphi_i(t+T), (-\infty, \infty), \end{cases} \quad \alpha_h(t) = \begin{cases} \varphi(t), [ht_1, \infty), \\ 0, (-\infty, ht_1), \end{cases}$$

(4.20)

где $0 \leq t_1 < t_2 < T$; $i = 0, 1, 2$; $h = 0, 1$.

С учетом полученных сведений найдем реакцию линейной системы, описываемой операторной передаточной функцией $K(p)$ (3.8), (3.12), на периодическое воздействие $\varphi_0(t)$. Для этого вначале рассмотрим воздействие $\varphi_1(t)$ (см. (4.20), рисунок 4.2). В соответствии с (2.64) его изображение

$$\overline{\varphi_1(p)} = \overline{\varphi_{1T}(p)} / (1 - e^{-pT}) \quad \left(\overline{\varphi_{1T}(p)} = \int_0^{t_1} \varphi(t) e^{-pt} dt \right)$$

содержит бесконечное число однократных полюсов (корней уравнения $1 - e^{-pT} = 0$), расположенных на мнимой оси p -плоскости. Как показано в подразд. 4.1, при нахождении реакции на периодическое воздействие вычеты необходимо вычислять только в полюсах его изображения. Поэтому реакция $\psi_1(t)$ системы на воздействие $\varphi_1(t)$ будет определяться выражением

$$\psi_1(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{\overline{\varphi_{1T}(p)} K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{pt} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} \frac{\overline{\varphi_{1T}(p)} K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{pt} dp. \quad (4.21)$$

Контур интегрирования охватывает мнимую ось комплексной плоскости, на которой расположено бесконечное число полюсов (рисунок 4.3, а). Поэтому

стандартный подход вычисления (4.21) (теорема Коши о вычетах) приводит к реакции в форме ряда Фурье.

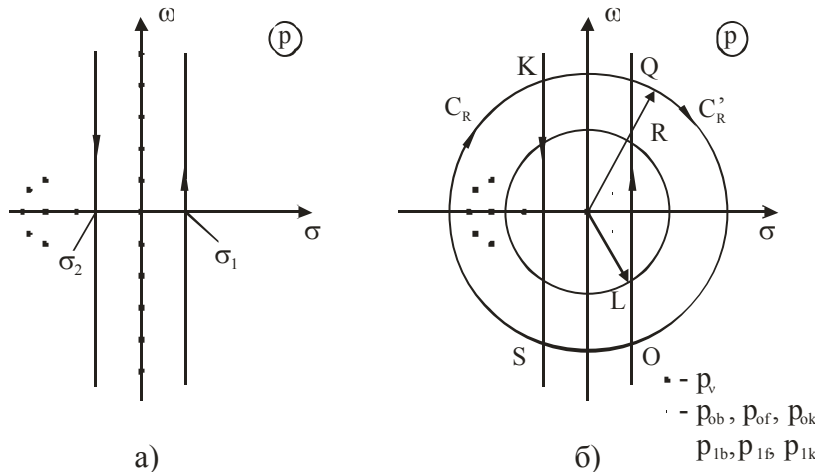


Рисунок 4.3 – Расположение контуров интегрирования

В соответствии с теоремой изображение $\overline{\varphi_{1T}}(p)$ представим в виде

$$\overline{\varphi_{1T}}(p) = F_1(p)e^{-pt_1} - F_0(p). \quad (4.22)$$

Далее обозначим: p_v – полюсы (однократные) передаточной функции $K(p)$; $p_{ob}(p_{1b}), p_{of}(p_{1f}), p_{ok}(p_{1k})$ – особые точки (полюсы, существенно особые) функции $F_0(p)$ ($F_1(p)$), расположенные соответственно на действительной, мнимой осях и вне осей комплексной плоскости (особую точку $p = 0$ относим к $p_{of}(p_{1f})$); $p'_{1b}, p'_{1f}, p'_{1k}$ – те из точек p_{1b}, p_{1f}, p_{1k} , которые не совпадают с точками p_{ob}, p_{of}, p_{ok} . Для упрощения также считаем, что все полюсы p_v не совпадают с особыми точками функций $F_0(p)$ и $F_1(p)$. Возьмем в уравнении (4.21) также σ_1 и σ_2 , чтобы точки p_{ob}, p_{1b}, p_{ok} и p_{1k} лежали: в правой полуплоскости правее прямой $\text{Re } p = \sigma_1$, в левой – левее прямой $\text{Re } p = \sigma_2$ (рисунок 4.3, б). Это всегда можно сделать при изолированных особых точках.

С учетом изложенного и соотношения (4.22) преобразуем уравнение (4.21):

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} F_1(p)K(p)e^{p(t-t_1)} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} F_1(p)K(p)e^{p(t-t_1)} dp + \\ & + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{F_1(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} \frac{F_1(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp - \\ & - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} F_0(p)K(p)e^{pt} dp - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} F_0(p)K(p)e^{pt} dp - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - jR}^{\sigma_1 + jR} \frac{F_0(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-T)} dp - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 + jR}^{\sigma_2 - jR} \frac{F_0(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-T)} dp = \\
& = \sum_{x=1}^8 \psi_{1x}(t). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Для вычисления в (4.23) сумм $\sum_{x=1}^2 \psi_{1x}(t)$ первого и второго и $\sum_{x=5}^6 \psi_{1x}(t)$ пятого и шестого слагаемых применим теорему Коши. С учетом введенных обозначений при нахождении суммы $\sum_{x=1}^2 \psi_{1x}(t) \left(\sum_{x=5}^6 \psi_{1x}(t) \right)$ вычеты берутся в особых точках $p_{1f} (p_{of})$. Полученное решение справедливо на всем интервале $(-\infty, \infty)$.

Согласно теореме $\lim_{p \rightarrow \infty} F_{1(0)}(p) = 0$. Помня это, из дуг окружности радиусом R , расположенных левее (правее) прямых $\operatorname{Re} p = \sigma_2$ ($\operatorname{Re} p = \sigma_1$), и отрезков последних образуем замкнутые контуры интегрирования Γ_R и Γ'_R , проходимые в отрицательном направлении (см. рисунок 4.3, б). Учитывая (3.8) и (3.12) и лемму Жордана, устанавливаем, что на дуге C_R (C'_R)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{F_1(p)K(p)e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1)} dp = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} \frac{F_1(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1-T)} dp = 0, \tag{4.24}$$

причем первое равенство справедливо при $t - t_1 > 0$, второе – при $t - t_1 - T < 0$.

Тогда при вычислении суммы $\sum_{x=3}^4 \psi_{1x}(t)$ правомерно (с учетом временных интервалов, где справедливы равенства (4.24)) заменить предшествующее предельному переходу интегрирование вдоль отрезка KS (OQ) прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_2$ ($\operatorname{Re} p = \sigma_1$) интегрированием вдоль контура Γ_R (Γ'_R) и воспользоваться теоремой Коши о вычетах, которые здесь берутся по полюсам p_v функции $K(p)$ и особым точкам p_{1b} , p_{1k} функции $F_1(p)$.

Поступая аналогично при вычислении суммы $\sum_{x=7}^8 \psi_{1x}(t)$ и выполняя несложные преобразования результата $\sum_{x=1}^8 \psi_{1x}(t)$, приходим к выражениям $\psi_{1e}(t)$ и $\psi_{1n}(t)$, представляющим реакцию $\psi_1(t)$ на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, T) соответственно. Далее формальной заменой t_1 , $F_1(p)$ на t_2 , $F_2(p)$ в выражениях $\psi_{1e}(t)$ и $\psi_{1n}(t)$ получаем соотношения для $\psi_{2e}(t)$ и $\psi_{2n}(t)$ – реакции системы на воздействие $\varphi_2(t)$ (см. (4.20)). Функция $F_2(p)$ аналогична функции $F_1(p)$ в случае

воздействия $\varphi_1(t)$. Наконец, учитывая равенство $\varphi_0(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ и свойство линейности преобразования Лапласа, находим реакцию $\psi_0(t)$ на воздействие $\varphi_0(t)$ (см. рисунок 4.2):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \psi_{0\partial}(t) \\ \psi_{0\varepsilon}(t) \\ \psi_{0n}(t) \end{Bmatrix} = & -\sum_{\substack{p_{0f}, p_{0k}, \\ p_{0b}}} \operatorname{res} \left(F_0(p)K(p)e^{pt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \sum_{p_v} \operatorname{res} \left(\frac{F_1(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-pT} \\ e^{-pT} \end{Bmatrix} \right) - \\ & - \sum_{p_v} \operatorname{res} \left(\frac{F_2(p)K(p)}{1 - e^{-pT}} e^{p(t-t_2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ e^{-pT} \end{Bmatrix} \right), \begin{Bmatrix} \psi_{0\partial}(t) = \psi_0(t), (0, t_1) \\ \psi_{0\varepsilon}(t) = \psi_0(t), (t_1, t_2) \\ \psi_{0n}(t) = \psi_0(t), (t_2, T) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

На практике для решения задач моделирования линейных искажений в СТК можно ограничиться воздействиями $\varphi_0(t)$, для которых функция $F_0(p)$ дробно-рациональна и имеет простые полюсы (дробно-рациональная функция не имеет других особенностей, кроме полюсов). При этом функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ также дробно-рациональны, причем многочлены знаменателей функций $F_z(p)$ ($z = 0, 1, 2$) совпадают (см. следствие из теоремы), и степень многочлена числителя каждой из них меньше аналогичной многочлена знаменателя (поскольку функции $\overline{\varphi_{1(2)T}}(p)$ аналитичны во всей открытой p -плоскости). Поэтому целесообразно представить

$$F_z(p) = A_z(p)/B(p), \quad (4.26)$$

где $A_z(p)$ – многочлен числителя, $B(p) = p \prod_{f=1}^d (p^2 + \omega_f^2) \cdot \prod_{b=1}^m (p + a_b) \times$
 $\times \prod_{k=1}^n (p^2 + 2a_k p + a_k^2 + \omega_k^2)$ – многочлен знаменателя, содержащий простые корни; $|a_{b(k)}| > 0$; $|\omega_{f(k)}| > 0$.

Учитывая (3.8), (3.12), (4.26) и принятое ранее предположение о несовпадении полюсов p_v с особыми точками функций $F_z(p)$, заключаем, что нахождение реакции по выражению (4.25) сводится к вычислению вычетов в простых полюсах p_{0f} , p_{0b} и p_{0k} функции $\rho_0(p)$ и в простых полюсах p_v функций $\rho_1(p)$ и $\rho_2(p)$ ($\rho_z(p) = F_z(p)K(p)$). Проведя вычисления и последующие преобразования, имеем

$$\begin{Bmatrix} \psi_{0\partial}(t) \\ \psi_{0\varepsilon}(t) \\ \psi_{0n}(t) \end{Bmatrix} = (K_0 \cdot N_{00} + \sum_{f=1}^d \frac{|K_f| \cdot |N_{0f}|}{\omega_f} \sin(\omega_f t + \varphi_f + \varphi_{0f}) + \sum_{b=1}^m K_b \cdot N_{0b} e^{-a_b t} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \frac{|K_k| \cdot |N_{0k}|}{\omega_k} e^{-a_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k + \varphi_{0k}) \left. \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \sum_{s=1}^r K_s e^{-a_s t} (N_{1s} e^{a_s t_1} \left. \begin{matrix} D_{ST} \\ D'_{ST} \\ D'_{ST} \end{matrix} \right\} - \\
& - N_{2s} e^{a_s t_2} \left. \begin{matrix} D_{ST} \\ D_{ST} \\ D'_{ST} \end{matrix} \right\} + \sum_{l=1}^q \frac{|K_l|}{\omega_l} e^{-a_l t} \left(|N_{1l}| e^{a_l t_1} \left. \begin{matrix} D_{lT} \\ D'_{lT} \\ D'_{lT} \end{matrix} \right\} \sin(\omega_l(t-t_1) + \varphi_l + \varphi_{1l}) - \left. \begin{matrix} E_{lT} \\ E_{lT} \\ E_{lT} \end{matrix} \right\} \times \\
& \times \cos(\omega_l(t-t_1) + \varphi_l + \varphi_{1l}) - |N_{2l}| e^{a_l t_2} \left. \begin{matrix} D_{lT} \\ D_{lT} \\ D'_{lT} \end{matrix} \right\} \sin(\omega_l(t-t_2) + \varphi_l + \varphi_{2l}) - \\
& - \left. \begin{matrix} E_{lT} \\ E_{lT} \\ E_{lT} \end{matrix} \right\} \cos(\omega_l(t-t_2) + \varphi_l + \varphi_{2l}) \right), \tag{4.27}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K(p) & \left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ p + a_s \\ p^2 + 2a_l p + a_l^2 + \omega_l^2 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} K_0, p = 0, \\ |K_f| e^{j\varphi_f}, p = j\omega_f, \\ K_b, p = -a_b, \\ |K_k| e^{j\varphi_k}, p = -a_k + j\omega_k, \\ K_s, p = -a_s, \\ |K_l| e^{j\varphi_l}, p = -a_l + j\omega_l, \end{matrix} \right\} \\
F_0(p) & \left. \begin{matrix} p \\ p^2 + \omega_f^2 \\ p + a_b \\ p^2 + 2a_k p + a_k^2 + \omega_k^2 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} N_{00}, p = 0, \\ |N_{0f}| e^{j\varphi_{0f}}, p = j\omega_f, \\ N_{0b}, p = -a_b, \\ |N_{0k}| e^{j\varphi_{0k}}, p = -a_k + j\omega_k, \end{matrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$F_z(p) = \begin{cases} N_{zs}, p = -a_s, \\ |N_{zl}| e^{j\varphi_{zl}}, p = -a_l + j\omega_l, \end{cases} \quad z = 1, 2;$$

$$D_{ST} = (1 - e^{a_s T})^{-1};$$

$$D'_{ST} = (e^{-a_s T} - 1)^{-1};$$

$$E_{lT} = e^{a_l T} \sin \omega_l T / U_{lT};$$

$$D'_{lT} = (e^{a_l T} \cos \omega_l T - e^{2a_l T}) / U_{lT};$$

(4.28)

$$U_{lT} = 1 - 2e^{a_l T} \cos \omega_l T + e^{2a_l T};$$

$$D_{lT} = (1 - e^{a_l T} \cos \omega_l T) / U_{lT}.$$

Выражения (4.27) представляют реакцию линейной системы, описываемой (3.8), (3.12), на произвольное периодическое воздействие $\varphi_0(t)$ в замкну-

том виде. Их программирование существенно упрощается при использовании упомянутой в подразд. 4.2 единой подпрограммы (процедуры).

Выражения (4.27) – результат разложения реакции по конечной неортогональной системе функций, образованной из “собственных функций воздействия” ($e^{p_0 t}, e^{p_{0b} t}, e^{p_{0k} t}$) и “собственных функций линейной системы” ($e^{p_v t}$). Для заданного воздействия и заданной системы входящие в них коэффициенты, определяемые соотношениями (4.28), неизменны. Это и конечное (малое) число слагаемых уменьшает объем вычислений.

Выражения (4.27) обладают общностью, пригодны для периодических и непериодических воздействий (в т.ч. для рассмотренных в подразд. 4.2 воздействий $U_\omega(t)$ и $U_n(t)$). Действительно, выполняя в них необходимые из предельных переходов при $t_1 \rightarrow 0$, $t_2 \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$, можно получить выражения для реакции на воздействия $\varphi_2(t)$, $\varphi_{0T}(t)$, $\varphi_{2T}(t)$ и $\alpha_h(t)$ (см. (4.20)). Очевидно, что в случае $\alpha_h(t)$ функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условиям теоремы на интервале $[0, \infty)$.

Принципиально выражения (4.27) применимы также при кратных полюсах функций $K(p)$ и $F_z(p)$ и (или) совпадении их полюсов. В этом случае необходимо вначале все полюсы положить простыми и несовпадающими, а потом выполнить в (4.27) предельные переходы, ведущие к совпадению соответствующих простых полюсов.

Для сравнения рассматриваемого универсального метода расчета и метода на основе ряда Фурье получим выражение для реакции $\psi_0(t)$ (на воздействие $\varphi_0(t)$), используя при этом общепринятый подход к вычислению интегралов (4.21):

$$\begin{aligned} \psi_0(t) = & \left(\overline{\varphi_{2T}}(0) - \overline{\varphi_{1T}}(0) \right) \frac{K_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\overline{\varphi_{2T}}(\omega_\gamma) K(\omega_\gamma) e^{j\omega_\gamma t} \right) - \\ & - \frac{2}{T} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\overline{\varphi_{1T}}(\omega_\gamma) K(\omega_\gamma) e^{j\omega_\gamma t} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\overline{\varphi_{1(2)T}}(0) = \left(\overline{\varphi_{1(2)T}}(p) \right)_{p=0}$; $\overline{\varphi_{1(2)T}}(\omega_\gamma) = \left(\overline{\varphi_{1(2)T}}(p) \right)_{p=j\omega_\gamma}$;

$K(\omega_\gamma) = \left(K(p) \right)_{p=j\omega_\gamma}$; $K_0 = \left(K(p) \right)_{p=0}$; $\omega_\gamma = 2\pi\gamma/T$.

Выражение (4.29) представляет результат разложения реакции линейной системы, описываемой передаточной функцией $K(p)$, по бесконечной ортогональной системе функций $e^{p_\gamma t}$ ($p_\gamma = \pm j\omega_\gamma$), которая определяется периодом T повторения воздействия.

Как известно, корректное применение ряда Фурье в задачах моделирования искажений сигналов, помимо значительных вычислительных затрат, обусловленных плохой сходимостью тригонометрических рядов вообще, сопряжено с проблемой оценки сходимости решения и его точности. Получить такую

математическую оценку в большинстве случаев весьма затруднительно. Кроме того, при переходе от периодического воздействия $\varphi_0(t)$ к непериодическому $\varphi_{0T}(t)$ выражение (4.29) теряет силу и в этом смысле не является общим. Поэтому при необходимости одновременного использования периодических и непериодических воздействий приходится применять разные выражения и соответственно разные алгоритмы и программы расчетов, что на практике неудобно.

С целью иллюстрации свойств сравниваемых методов из выражений (4.27) и (4.29) получены расчетные соотношения для реакции ФНЧ третьего порядка (модель С03), имеющего операторную передаточную функцию $K(p) = (p^2 + \omega_\infty^2) / (c(p + a_1)(p^2 + 2a_2p + a_2^2 + \omega_2^2))$, на периодическую (с периодом T) последовательность идеальных прямоугольных импульсов с амплитудой U_0 и длительностью τ , фронт одного из которых совмещен с началом координат:

$$\begin{aligned} \psi_{0b}(t) = & \frac{U_0 \omega_\infty^2}{ca_1(a_2^2 + \omega_2^2)} + \frac{U_0(a_1^2 + \omega_\infty^2)(e^{a_1T} - e^{a_1\tau})e^{-a_1t}}{ca_1((a_1 - a_2)^2 + \omega_2^2)(1 - e^{a_1T})} + \\ & + \frac{U_0 e^{-a_2t}}{c\omega_2((a_1 - a_2)^2 + \omega_2^2)(a_2^2 + \omega_2^2)(1 - 2e^{a_2T} \cos \omega_2 T + e^{2a_2T})} \times \\ & \times ((B_2(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) - B_1 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) \cos \omega_2 t + (B_1(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) + \\ & + B_2 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) \sin \omega_2 t - (B_2(1 - e^{a_2T} \cos \omega_2 T) - B_1 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) e^{a_2\tau} \cos \omega_2(t - \tau) - \\ & - (B_1(1 - e^{a_2T} \cos \omega_2 T) + B_2 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) e^{a_2\tau} \sin \omega_2(t - \tau)), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0n}(t) = & \frac{U_0(a_1^2 + \omega_\infty^2)e^{a_1T}(1 - e^{a_1\tau})e^{-a_1t}}{c((a_1 - a_2)^2 + \omega_2^2)(1 - e^{a_1T})} + \frac{U_0 e^{-a_2t}}{c\omega_2((a_1 - a_2)^2 + \omega_2^2)(a_2^2 + \omega_2^2)} \times \\ & \times \frac{1}{(1 - 2e^{a_2T} \cos \omega_2 T + e^{2a_2T})} ((B_2(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) - B_1 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) \cos \omega_2 t + \\ & + (B_1(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) + B_2 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) \sin \omega_2 t - (B_2(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) - \\ & - B_1 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) e^{a_2\tau} \cos \omega_2(t - \tau) - (B_1(e^{a_2T} \cos \omega_2 T - e^{2a_2T}) + B_2 e^{a_2T} \sin \omega_2 T) \times \\ & \times e^{a_2\tau} \sin \omega_2(t - \tau)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(t) = & \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{U_0(\omega_\infty^2 - \omega_\gamma^2)}{c\pi\gamma((\omega_\gamma(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) - 2a_1a_2\omega_\gamma)^2 + (a_1(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) + 2a_2\omega_\gamma^2)^2)} \times \\ & (((\omega_\gamma(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) - 2a_1a_2\omega_\gamma)(1 - \cos \omega_\gamma \tau) - (a_1(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) + 2a_2\omega_\gamma^2) \times \\ & \times \sin \omega_\gamma \tau) \cos \omega_\gamma t - ((\omega_\gamma(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) - 2a_1a_2\omega_\gamma) \sin \omega_\gamma \tau + (a_1(\omega_\gamma^2 - a_2^2 - \omega_2^2) + \\ & + 2a_2\omega_\gamma^2)(1 - \cos \omega_\gamma \tau)) \sin \omega_\gamma t) + U_0 \omega_\infty^2 \tau / (ca_1(a_2^2 + \omega_2^2)T), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $B_1 = 2a_2\omega_2^2(a_1 - 2a_2) - (a_2^2 - \omega_2^2 + \omega_\infty^2)(a_2^2 - a_1a_2 - \omega_2^2)$;

$$B_2 = 2a_2\omega_2(a_2^2 - a_1a_2 - \omega_2^2) + \omega_2(a_1 - 2a_2)(a_2^2 - \omega_2^2 + \omega_\infty^2).$$

Выражения (4.30), (4.31), представляющие реакцию в замкнутом виде, содержат всего шесть (пять) слагаемых, чем выгодно отличаются от соотношения (4.32) – реакции в форме тригонометрического ряда Фурье.

На основании полученных сведений вытекает следующий алгоритм расчета линейных искажений сигналов по рассматриваемому методу:

в виде (3.8), (3.12) представляется математическая модель системы (канала);

проверяется, удовлетворяет ли (образующая) функция $\varphi(t)$ (см. рисунок 4.2) условиям приведенной теоремы;

находятся функции $F_z(p)$ ($z = 0, 1, 2$), которые представляются в виде (4.26);

по формулам (4.28) вычисляются значения параметров, которые подставляются в выражения (4.27).

Алгоритм расчета не предусматривает сложных математических преобразований, соотношения (3.8), (3.12) и (4.26) описывают достаточные для практики моделирования множества систем и воздействий, выражения (4.27) применимы также для неперiodических воздействий. Это делает рассматриваемый метод расчета универсальным, пригодным для моделирования линейных искажений различных континуальных детерминированных сигналов (периодических, неперiodических финитных, неперiodических бесконечно протяженных).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первом разделе рассмотрены общие принципы описания, показатели качества и оценка точности СТК, обладающих триединым свойством сложности, стохастичности и адаптивности. Дана сравнительная характеристика их методов анализа и синтеза, включая оптимизацию параметров. Проанализированы этапы процедуры математического моделирования СТК. Сформулированы особенности последних как объекта моделирования и основные требования к многофункциональной моделирующей программе. Рассмотрено неформальное и формальное описание СТК, показана целесообразность оптимизации формального описания. Представлены современные подходы к проектированию СТК и способы их декомпозиции. Проанализированы основные принципы перехода от формального описания к математической модели и технология их применения при выполнении этапов оптимизации: функциональной (структурной) схемы; математических моделей звеньев; математических моделей сигналов.

Во втором разделе дана характеристика сигналов и помех в СТК. Рассмотрена строгая процедура представления континуальных детерминированных сигналов во временной области ортогональной системой комплекснозначных функций, сформулированы рекомендации по конкретному выбору подходящей ортогональной системы. Представлены механизмы моделирования сигналов рядами Фурье, Котельникова, рядами по полиномам Лежандра, Чебышева и рядами по функциям Лагерра, Эрмита и Уолша. Описана процедура моделирования сигналов в частотной области, рассмотрены используемые при этом свойства преобразования Фурье и особенности их применения. Проанализированы свойства δ -функции, существенно расширяющей возможности моделирования СТК. Показаны механизмы совместного применения преобразования Фурье и δ -функции при моделировании сигналов, задаваемых неинтегрируемыми функциями, и закономерностей убывания амплитудных спектров с ростом частоты. Описана процедура моделирования сигналов на комплексной плоскости, рассмотрены используемые при этом свойства преобразования Лапласа, включая примеры их эффективного применения, предельные соотношения и теоремы разложения, проанализированы особенности моделирования периодических сигналов.

В третьем разделе дана характеристика звеньев СТК. Рассмотрено описание линейных звеньев во временной и частотной областях и на комплексной плоскости, рекомендована для практического применения форма задания операторной передаточной функции, рассмотрены алгоритмы реактансных преобразований математических моделей звеньев и пример их выполнения. Проанализированы важные для практики свойства и особенности передаточных функций минимально-фазовых и неминимально-фазовых звеньев. Представлена взаимосвязь временных, частотных характеристик и операторных передаточных функций линейных звеньев, включая предельные соотношения операторной (комплексной) передаточной функции и переходной характеристики.

В четвертом разделе проведен сравнительный анализ методов математического моделирования линейных искажений сигналов в СТК: численного решения дифференциальных уравнений; моделирования по формуле Дюамеля; метода разностных рекуррентных соотношений; спектрального метода; метода на основе операционного исчисления. Рекомендована методология моделирования искажений, основанная на совместном применении описания линейных звеньев дробно-рациональной функцией комплексного переменного специального вида и метода моделирования на основе операционного исчисления. Представлена технология моделирования линейных искажений измерительных телекоммуникационных сигналов. Рассмотрены теоретические основы и алгоритм применения универсального метода расчета линейных искажений, основанного на представлении реакции линейной системы на периодическое воздействие не тригонометрическим рядом Фурье, а в замкнутом виде.

Библиотека БГУИР

ЛИТЕРАТУРА

1. Апанасевич В.В., Тихоненко О.М. Цифровое моделирование стохастических систем: Учеб. пособие для ун-тов. – Мн.: Университетское, 1986. – 127 с.
2. Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. – М.: Радио и связь, 1985. – 176 с.
3. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов – М.: Радио и связь, 1986. – 544 с.
4. Гультяев А.К. Визуальное моделирование в среде MATLAB: Учеб. курс. – СПб.: Питер, 2000. – 432 с.
5. ГОСТ 7845-92. Система вещательного телевидения. Основные параметры. Методы измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1992. – 36 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
7. Зубарев Ю.Б., Кривошеев М.И., Красносельский И.Н. Цифровое телевизионное вещание: Основы, методы, системы. – М.: НИИР, 2001. – 568 с.
8. Ильинков В.А. Математическое моделирование линейных искажений в телевизионных системах: Метод. пособие – Мн.: МРТИ, 1992. – 44 с.
9. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров: Пер с нем. / Под ред. Н.Н. Слепова. – М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
10. Кривошеев М.И. Основы телевизионных измерений. 3-е изд., доп. и пер. – М.: Радио и связь, 1989. – 608 с.
11. Крот А.М., Минервина Е.Б. Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений. – Мн.: Наука и техника, 1995. – 407 с.
12. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 376 с.
13. Косачев И.М., Ерошенко М.Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. – Мн.: Наука и техника, 1993. – 254 с.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
15. Машинные методы расчета и проектирования систем электросвязи и управления: Учеб. пособие для вузов / А.Н. Дмитриев, Н.Д. Егупов, А.М. Шестопалов, А.Г. Моисеев. – М.: Радио и связь, 1990. – 271 с.
16. Методы автоматизированного расчета электронных схем в технике связи: Учеб. для вузов / Б.А. Калабеков, В.Ю. Лapidус, В.М. Малафеев. – М.: Радио и связь, 1990. – 272 с.
17. Прокис Дж. Цифровая связь / Пер. с англ. ; Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
18. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Г.В. Обрезкова. – М.: Высш. шк., 1985. – 343 с.
19. Полляк Ю.Г., Филимонов В.А. Статистическое машинное моделирование средств связи. – М.: Радио и связь, 1988. – 175 с.

20. Разевиг В.Д. Схемотехническое моделирование с помощью Micro-Cap 7. – М.: Горячая линия–Телеком, 2003. – 368 с.
21. Разевиг В.Д. Применение программ P-CAD и PSpICE для схемотехнического моделирования на ПЭВМ/ Под общ. ред. Г.М. Веденеева. – М.: Радио и связь, 1992. – 190 с.
22. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение/ Пер. с англ. 2-е изд. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2003. – 1104 с.
23. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление/ Сост. М. Сингх, А. Титли; Пер. с англ. А.В. Запорожца. – М.: Машиностроение, 1986. – 495 с.
24. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учеб. для вузов. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 640 с.
25. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
26. Технология системного моделирования/ Под ред. С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1988. – 520 с.
27. Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра/ Пер. с англ.; Под ред. В.И. Журавлева. – М.: Радио и связь, 2000. – 520 с.
28. Финаев В.И. Сборник задач по курсу “Моделирование систем”: Учеб. пособие – Таганрог: ТРТИ, 1991. – 57 с.
29. Шипилло В.П. Операторно-рекуррентный анализ электрических цепей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 311 с.

Учебное издание

Ильинков Валерий Андреевич,
Беленкевич Наталья Ивановна,
Романов Вячеслав Евгеньевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЗВЕНЬЕВ И
СИГНАЛОВ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие
по дисциплине “Моделирование систем телекоммуникаций”
для студентов специальностей
“Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения”,
“Многоканальные системы телекоммуникаций”
всех форм обучения

Редактор Т.Н.Крюкова
Корректор Е.Н.Батурчик
Компьютерная верстка М.В. Шишло

Подписано в печать 16.12.04.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 6,16.
Уч.-изд. л. 5,5.	Тираж 150 экз.	Заказ 156.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6