

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

**А. П. Курулёв**

***ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ  
В ЭЛЕКТРОРАДИОЦЕПЯХ***

Минск БГУИР 2017

УДК 621.3.011.7(035)(076)

ББК 31.211я2

К93

Рекомендовано к изданию Советом учреждения образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»  
(протокол №10 от 01.07.2016)

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра электротехники и систем электропитания  
учреждения образования  
«Военная академия Республики Беларусь»  
(протокол №9 от 30.05.2016);

ведущий инженер-программист отдела научно-технических разработок  
и системного сопровождения проектов многопрофильного  
научно-производственного частного унитарного предприятия «Тетраэдр»,  
кандидат технических наук, доцент Ю. В. Виланский

**Курулёв, А. П.**

К93 Преобразование спектров сигналов в электрорадиоцепях / А. П. Курулёв. – Минск : БГУИР, 2017. – 176 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-305-8.

В монографии представлены спектры периодических и непериодических видео- и радиосигналов; амплитудно-модулированных сигналов, а также сигналов с угловой и импульсной модуляцией; рассмотрено преобразование спектров сигналов при их прохождении через линейные и нелинейные электрорадиоцепи.

Предназначена для студентов электротехнических специальностей вузов и преподавателей, читающих лекции и ведущих практические и лабораторные занятия по теории электрических цепей.

**УДК 621.3.011.7(035)(076)  
ББК 31.211я2**

**ISBN 978-985-543-305-8**

© Курулёв А. П., 2017

© УО «Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники», 2017

## Предисловие

Быстро развивающийся научно-технический прогресс в области электро- и радиотехники требует понимания принципов функционирования радиопередающих и радиоприемных устройств, средств многоканальной электросвязи и телекоммуникаций, телевидения, автоматики и др. Эти принципы рассматриваются в курсе «Теория электрических цепей».

В монографии изложена одна из важнейших тем курса – преобразование спектров различных видео- и радиосигналов в электрорадиоцепях. Эта тема в сокращенном виде дана в учебнике «Теория электрических цепей» М. П. Батуры, А. П. Кузнецова, А. П. Курулёва, под общей редакцией А. П. Курулёва, издательства «Вышэйшая школа» г. Минска (трех изданий: 2004, 2007 и 2015 гг.).

Данная тема является основополагающей для изучения таких дисциплин, как «Усилительные устройства», «Радиотехнические цепи и сигналы», «Радиопередающие и радиоприемные устройства», «Телекоммуникация», «Средства электросвязи», «Основы автоматики», «Основы импульсной техники», «Основы радиолокации» и др.

В монографии рассматриваются спектры основных периодических и непериодических видео- и радиосигналов, используемых в настоящее время в электрорадиоцепях. Рассмотрены также их амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, одно- и многотональная амплитудная модуляция сигналов, их импульсная и угловая модуляция, преобразование и искажение различных сигналов при прохождении линейных и нелинейных цепей.

Для усвоения материала монографии необходимы знания физики, высшей математики и электрорадиотехники в объеме учебной программы технических вузов: ряды и интегралы Фурье, дифференцирование, интегрирование, комплексные числа, интегралы Дюамеля и свертки, принципы модуляции сигналов, нелинейных преобразований, временной метод анализа переходных процессов в электрорадиоцепях.

В монографии уделено внимание сочетанию математических выводов и расчетов с рассмотрением физической стороны явлений. Изложенную в настоящей монографии теорию рекомендуется закреплять решением задач и примеров. Для этого целесообразно использовать указанные в списке рекомендуемой литературы сборники задач Ю. В. Бладыко и А. М. Заездного, а также справочники И. С. Градштейна и С. А. Покотило. Для студентов-заочников, которые обучаются в вузе без отрыва от производства, наиболее существенные понятия и определения в монографии выделены курсивным шрифтом.

Монография написана на базе лекций по дисциплинам «Электротехника», «Теория электрорадиоцепей», «Теория электрических цепей», прочитанных автором с 1977 г. по настоящее время в учреждениях образования «Военная

академия Республики Беларусь» и «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

За содействие улучшению содержания монографии автор выражает благодарность рецензентам: коллективу кафедры электротехники и систем электропитания учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь», возглавляемой кандидатом технических наук, доцентом А. Е. Каледой, и ведущему инженеру-программисту отдела научно-технических разработок и системного сопровождения проектов многопрофильного научно-производственного частного унитарного предприятия «Тэтраэдр», кандидату технических наук, доценту Ю. В. Виланскому, а также сотрудникам кафедры теоретических основ электротехники учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидатам технических наук, доцентам И. Л. Свито, И. И. Петровскому, старшему преподавателю С. В. Батюкову.

Отзывы и пожелания направлять на кафедру ТОЭ БГУИР по адресу: 220013, Минск, ул. П. Бровки, 6.

*Автор*

## Введение

Исследования электромагнитных явлений и процессов, протекающих при различных энергетических преобразованиях в электрорадиотехнических устройствах, привели начиная с 20-х годов прошлого столетия к быстрому развитию курса теоретических основ электротехники. В частности, чрезвычайно широкое развитие получили общие вопросы теории электрических цепей, выделенной в вузах в одноименную дисциплину и имеющей большое значение почти для всех прикладных отраслей электрорадиотехники.

В теории радиотехники важное место занимает анализ переходных процессов в электрорадиоцепях.

Долгое время преобразования сигналов применялись и развивались лишь сравнительно узким кругом физиков-теоретиков. Но начиная с двадцатых годов XX века впервые разложение функции в тригонометрические ряды применили Бернулли и Эйлер, а затем Фурье – для решения волновых уравнений. Физические процессы в электрорадиоцепях, опирающиеся на теорию колебаний, в XX веке – начале XXI века стали использоваться в связи с бурным развитием радиотехники, радиотелефонии, телевидения, навигации, радиолокации, нано- и микротехнологии и других отраслей электрорадиотехники. К фундаментальным работам в области электро- и радиотехники относятся труды академиков Ю. Б. Кобзарева, В. А. Котельникова, В. Ф. Миткевича, Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, членов-корреспондентов К. А. Круга, В. И. Сидорова и др.

От инженеров – выпускников технических вузов – требуется глубокое владение методами исследования при анализе физических процессов в электрорадиоцепях, поскольку в практической деятельности инженера основная трудность часто возникает на стадии составления математической модели для исследуемых электротехнических устройств. Поэтому в данной монографии основные вопросы теории сигналов, анализ искажения сигналов различной сложности и их спектров при прохождении электрорадиоцепей изложены в объеме, отвечающем современным требованиям.

В первом разделе рассмотрены спектры различных видео- и радиосигналов как одиночных, так и их периодической последовательности: пачки видео- и радиоимпульсов, сигналы с амплитудной, угловой и импульсной модуляцией, затухающие радиосигналы.

Во втором разделе проведен анализ преобразования спектров различных сигналов при прохождении через линейные электрические цепи. Установлена связь между спектрами различных сигналов на входе и выходе электрорадиоцепей. Рассмотрено влияние характеристик линейных электрических цепей на искажение проходящих через них различных сигналов. Показана связь между частотными и временными характеристиками линейной электрической цепи.

Третий раздел посвящен анализу преобразований спектров сигналов в нелинейных электрических цепях, таких, как умножитель частоты, гетеродин, выпрямитель, амплитудные модуляторы и детекторы. Особенности характеристик нелинейных элементов, с одной стороны, затрудняют расчеты и анализ преобразования в них сигналов, а с другой – позволяют производить такие преобразования сигналов, осуществление которых невозможно в линейных цепях.

В приложении приведен пример подробного анализа искажения сигнала сложной формы и его спектра при прохождении через линейную электрическую цепь.

Библиотека БГУИР

## Список сокращений и условных обозначений

*В первом разделе*

- АИМ – амплитудно-импульсная модуляция  
АМ – амплитудная модуляция  
АЧС – амплитудно-частотный спектр  
ВИМ – временная импульсная модуляция  
ВС – видеосигнал  
ВЧИМ – высокочастотная импульсная модуляция  
ДДИМ – двухсторонняя ДИМ  
ДИМ – модуляция импульсов по длительности  
ЛЧМ – линейное частотное модулирование  
ОДИМ – односторонняя ДИМ  
РС – радиосигнал  
ФИМ – фазоимпульсная модуляция  
ФКМ – фазокодовая манипуляция  
ФМ – фазовая модуляция  
ФЧС – фазочастотный спектр  
ЧИМ – частотно-импульсная модуляция  
ЧМ – частотная модуляция  
 $J_n(m)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка  
 $m(f)$  – индекс частотной модуляции  
 $\Delta f$  – полоса пропускания  
 $m_\psi$  – индекс фазовой модуляции  
 $m_n$  – индекс паразитной модуляции  
 $\omega_0$  – резонансная частота колебательного контура (несущая высокая частота)  
 $\psi$  – начальная фаза  
 $\tau_n$  – длительность импульса  
 $q$  – скважность импульсов  
 $T$  – период повторения (следования) импульсов  
 $A_{cp}$  – среднее значение сигнала  
 $P$  – активная мощность  
 $Q$  – реактивная мощность  
 $S$  – полная мощность  
 $\hat{S}$  – комплексная мощность  
 $P_0$  – мощность режима молчания (при отсутствии модуляции)  
 $P_{cp}$  – средняя мощность за период модуляции  
 $Sa(x) = \sin x / x$  – апертурный синус  
 $\delta(t)$  – дельта-функция, или функция Дирака  
 $1(t)$  – единичная функция включения (или воздействия)  
 $a(t)$  – передаваемая информация (модулирующая функция или управляющий сигнал)

$a_0(t)$  – несущая функция (высокочастотное заполнение)  
 $f(t)$  – амплитудно-модулированное колебание  
 $\Theta$  – полная фаза  
 $F_{\text{вс}}(j\omega)$  – АЧС видеосигнала  
 $F_{\text{рс}}(j\omega)$  – АЧС радиосигнала  
 $\Psi_{\text{рс}}(j\omega)$  – ФЧС радиосигнала  
 $f_{\text{вс}}(t)$  – спектр видеосигнала  
 $f_{\text{рс}}(t)$  – спектр радиосигнала  
 $F_{\text{пачки}}(j\omega)$  – АЧС пачки радиоимпульсов

*Во втором разделе*

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика  
 ВЧХ – вещественная частотная характеристика  
 ЛЭЦ – линейная электрическая цепь  
 МЧХ – мнимая частотная характеристика  
 ФНЧ – фильтр нижних частот  
 ФЧХ – фазочастотная характеристика  
 $\dot{F}_m$  – комплексная амплитуда входного сигнала  
 $\dot{X}_m$  – комплексная амплитуда выходного сигнала  
 $K(j)$  – комплексная передаточная функция цепи  
 $|K(j\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика цепи  
 $\varphi(\omega)$  – фазочастотная характеристика цепи  
 $Q$  – добротность колебательного контура  
 $\hat{K}(\omega)$  – нормированная передаточная функция цепи  
 $\xi$  – фактор расстройки контура  
 $\Delta F$  – полоса пропускания  
 $m$  – коэффициент (глубины) модуляции  
 $\psi(\omega)$  – фазочастотный спектр  
 $\text{sh } y$  – гиперболический синус  
 $\text{ch } y$  – гиперболический косинус  
 $\text{th } y$  – гиперболический тангенс  
 $A_{mn}$  – амплитуда  $n$ -й гармоники  
 $K_0$  – множитель, учитывающий изменение масштаба сигнала  
 $t_{\text{зап}}$  – время запаздывания  
 $F(\omega)$  – амплитудно-частотный спектр  
 $\omega_c$  – частота среза  
 $\text{Si } z$  – табулированный интегральный синус  
 $f(t)$  – входной сигнал  
 $x(t)$  – выходной сигнал  
 $\tau_{\text{ф}}$  – длительность переднего/заднего фронта импульса  
 $\omega_{\text{гр}}$  – граничная частота  
 $h(t)$  – переходная характеристика цепи

$\kappa(t)$  – импульсная характеристика цепи

$Re(\omega)$  – вещественная частотная характеристика цепи (реальная часть)

*В третьем разделе*

$R_{НЭ}$  – сопротивление нелинейного элемента

$\Theta$  – угол отсечки

$\omega_{пр}$  – промежуточная частота

$\omega_{г}$  – частота гетеродина (местного генератора)

$i_{разн}$  – ток разностной частоты  $\omega_0 - \omega_{г}$

$\omega_3$  – «зеркальная» частота

$\Omega$  – низкая частота

$\omega_0 \pm \Omega$  – комбинационные частоты

$V$  – вентиль (диод, детектор, нелинейный элемент)

$T_{в}$  – период колебаний несущей высокой частоты  $\omega_0$

$T_{н}$  – период колебаний модулирующего напряжения низкой частоты  $\Omega$

$R_{н}$  – сопротивление нагрузки

Библиотека БГУИР

# 1. Сигналы и их спектры

## 1.1. Классификация сигналов

В связи с быстрым развитием радио- и импульсной техники, акустики, а также отраслей техники, опирающихся на теорию колебаний, где основными проблемами являются передача, получение и обработка информации, носителями которой являются сигналы, необычайно широко распространяются спектральные представления сигналов.

В общем случае *сигнал* – это физический процесс, протекающий в той или иной среде, системе, аппаратуре и т. д.

*Электрический сигнал* – это ток или напряжение, в законе изменения которых содержится определенная информация. Переносчиком информации или несущей функцией в сигнале являются постоянный ток (напряжение) или гармоническое колебание.

Гармоническое колебание высокой частоты записывается следующим образом:

$$f(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (1.1)$$

где  $A_m$  – максимальное значение амплитуды колебания;  $\omega_0$  – несущая угловая частота;  $\psi$  – начальная фаза.

При передаче сигнала параметры гармонического колебания  $A_m$ ,  $\omega_0$ ,  $\psi$  могут изменяться в соответствии с законом изменения сигнала.

Процесс управления параметром (или несколькими параметрами одновременно) высокочастотного колебания называют *модуляцией*, а сигнал, по закону изменения которого осуществляется модуляция, есть *модулирующий, или управляющий, сигнал*.

Для выявления свойств и информационных возможностей электрических сигналов их классифицируют по ряду признаков.

Сигналы делят на случайные и детерминированные (регулярные, закономерные).

У случайных электрических сигналов мгновенные значения и параметры заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Изучает такие сигналы статистическая радиотехника (радиолокация).

В теории электрорадиоцепей, как правило, рассматривают детерминированные сигналы, мгновенные значения и параметры которых известны в любой момент времени.

Различают детерминированные сигналы по следующим свойствам:

1. По величине интервала времени, в котором существуют отличные от нуля значения сигналов, детерминированные сигналы делят на непрерывные и импульсные. Если интервал существования сигнала бесконечен, его называют непрерывным, если конечен – импульсным, а сам интервал называют *длительностью импульса*.

2. По повторяемости совокупности мгновенных значений и параметров детерминированные сигналы делят на периодические и непериодические; у периодического сигнала совокупности мгновенных значений и параметров повторяются через равные промежутки времени; периодические сигналы делят на одиночные и групповые (пачечные).

3. Сигнал называют одиночным, если совокупность его мгновенных значений и параметров не повторяется в интервале времени

4.  $-\infty < t < +\infty$ . Если же электрический сигнал состоит из нескольких следующих друг за другом одиночных сигналов, то его называют групповым или пачечным.

5. В зависимости от выбора несущей функции различают видеосигналы (ВС), радиосигналы (РС), импульсно-модулированные сигналы и т. д. Сигналы, у которых несущими функциями являются постоянные токи и напряжения, называют видеосигналами. У радиосигналов несущая функция – синусоидальные колебания тока или напряжения.

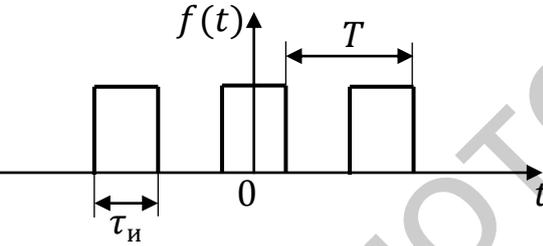
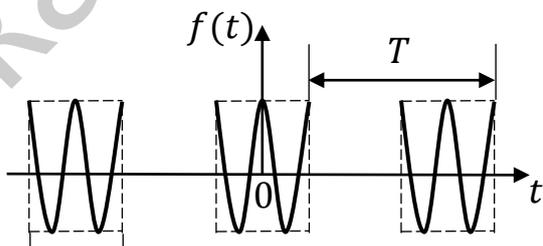
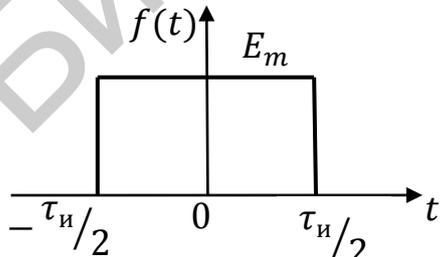
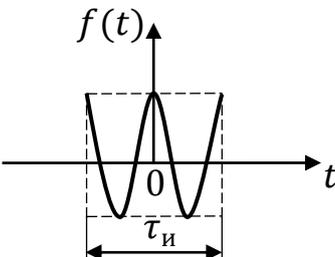
6. В зависимости от того, какой параметр синусоидального колебания модулируется, различают сигналы с амплитудной модуляцией (АМ), частотной (ЧМ), фазовой (ФМ). Последние два вида модуляции называют угловой модуляцией (УМ). Модулируют также длительность импульсов, частоту следования импульсов. Применяют также комбинированную модуляцию. При приеме модулированного сигнала из него выделяют полезный управляющий (или модулирующий) сигнал. Эта операция есть демодуляция или детектирование.

Для выяснения сути спектрального метода анализа переходных процессов в электрорадиоцепях зачастую нет необходимости связывать с сигналом какую-либо информацию. Поэтому под электрическим сигналом в теории электрорадиоцепей понимают любые изменяющиеся во времени токи или напряжения, не связанные с передачей информации.

Далее приведены виды сигналов, используемых в радиотехнике и радиолокации:

- периодическая последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы (рис. 1.1);
- периодическая последовательность радиоимпульсов прямоугольной формы (рис. 1.2);
- одиночный видеоимпульс прямоугольной формы (рис. 1.3);
- одиночный радиоимпульс прямоугольной формы (рис. 1.4);
- одиночный колоколообразный (гауссов) видеоимпульс (рис. 1.5);
- пачка радиоимпульсов прямоугольной формы с колоколообразной огибающей (рис. 1.6);
- треугольный видеоимпульс (рис. 1.7);
- косинусоидальный видеоимпульс (рис. 1.8);
- видеоимпульс формы убывающей экспоненты (рис. 1.9);

- сигнал, амплитуда которого модулирована по линейному закону (АМ-сигнал) (рис. 1.10);
  - сигнал, амплитуда которого модулирована одним тоном (рис. 1.11);
  - сигнал с частотной модуляцией (ЧМ-сигнал) (рис. 1.12);
  - сигнал с фазовой модуляцией (ФМ-сигнал) (рис. 1.13);
  - сигнал, частота которого модулирована по линейному закону (ЛЧМ-сигнал) (рис. 1.14);
  - сигнал с манипуляцией фазы и кода (длительности импульса) (ФКМ-сигнал) (рис. 1.15);
  - сигнал, амплитуда радиоимпульсов которого модулирована одним тоном (АИМ-сигнал) (рис. 1.16);
  - сигналы, симметричные относительно оси ординат (рис. 1.17);
  - сигнал, симметричный относительно оси абсцисс (рис. 1.18);
- Кроме перечисленных на практике широко используются сигналы произвольной формы, а также сигналы с многотональной амплитудной модуляцией, которые будут рассмотрены далее.

<p>Периодическая последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы</p>  <p>Рис. 1.1</p>	<p>Периодическая последовательность радиоимпульсов прямоугольной формы</p>  <p>Рис. 1.2</p>
<p>Одиночный видеоимпульс прямоугольной формы</p>  <p>Рис. 1.3</p>	<p>Одиночный радиоимпульс прямоугольной формы</p>  <p>Рис. 1.4</p>

Колоколообразный видеоимпульс

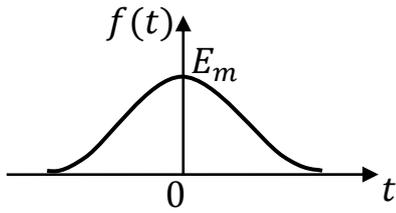


Рис. 1.5

Пачка радиоимпульсов  
прямоугольной формы  
с колоколообразной огибающей

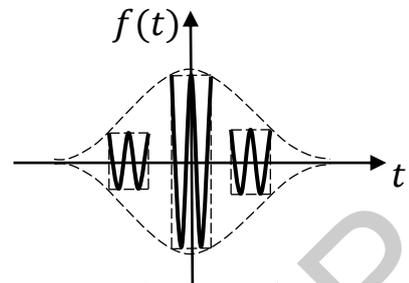


Рис. 1.6

Треугольный видеоимпульс

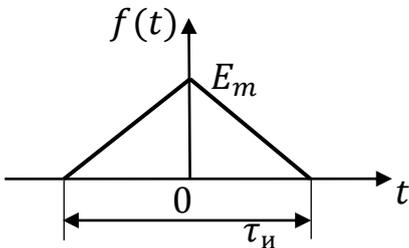


Рис. 1.7

Косинусоидальный видеоимпульс

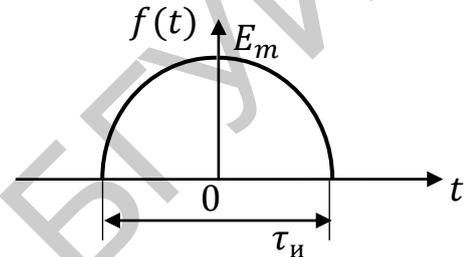


Рис. 1.8

Убывающая экспонента

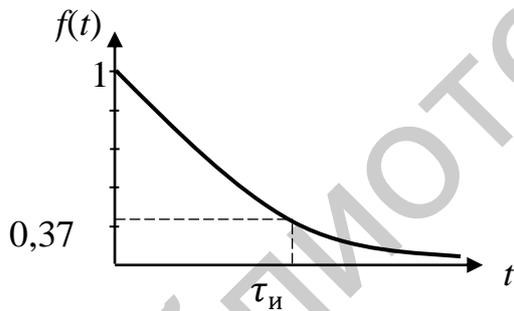


Рис. 1.9

АМ-сигнал

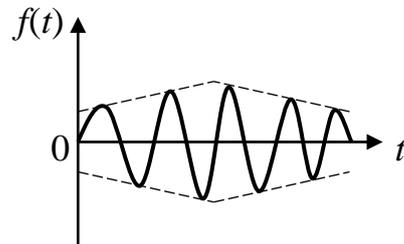


Рис. 1.10

Однотональный АМ-сигнал

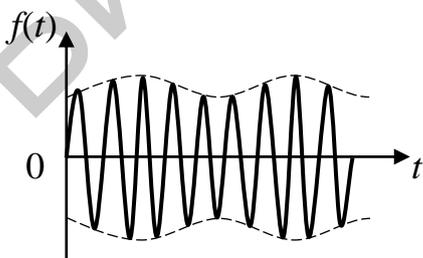


Рис. 1.11

ЧМ-сигнал

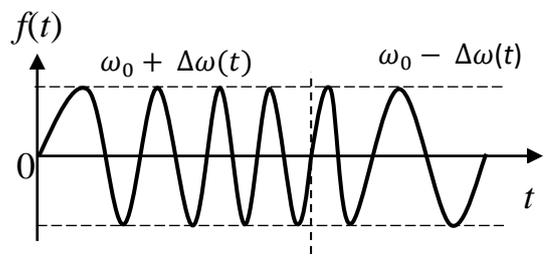
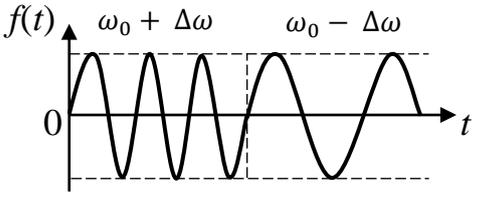
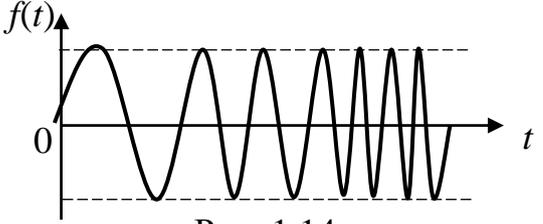
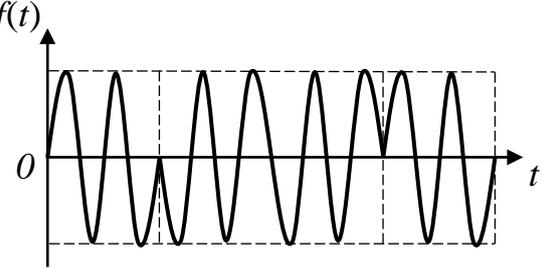
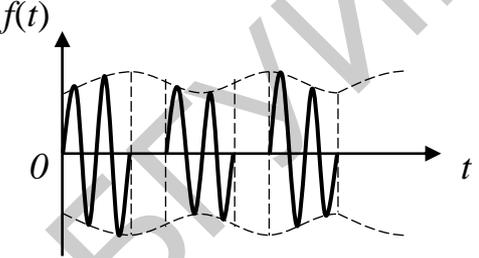
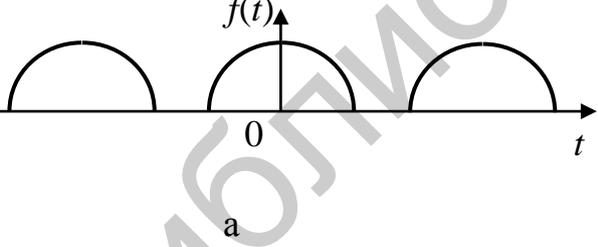
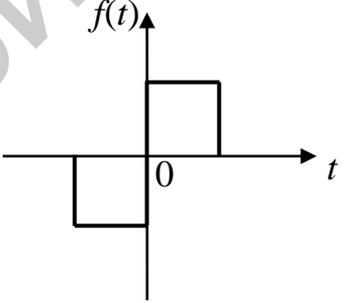
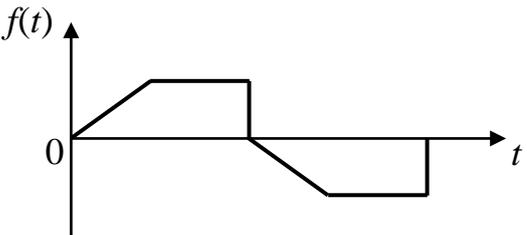


Рис. 1.12

<p style="text-align: center;">ФМ-сигнал</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 1.13</p>	<p style="text-align: center;">ЧМ-сигнал</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 1.14</p>
<p style="text-align: center;">ФКМ-сигнал</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 1.15</p>	<p style="text-align: center;">АИМ-сигнал</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 1.16</p>
<p style="text-align: center;">Сигналы, симметричные относительно оси ординат (четная функция)</p>   <p style="text-align: center;">Рис. 1.17</p>	<p style="text-align: center;">Сигналы, симметричные относительно оси абсцисс (нечетная функция)</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 1.18</p>

## 1.2. Ряд и интеграл Фурье

При анализе прохождения сигналов через электрорадиоцепи используют математические модели сигналов. Важнейшими формами представления сигнала являются временная и спектральная. В первом случае сигнал описывается как функция времени, во втором – как сумма ортогональных составляющих.

В основе спектрального представления сигнала лежит его разложение по системе синусоидальных функций, предложенное в XVIII веке Эйлером и Лагранжем и Фурье в XIX веке.

Дальнейшее развитие спектральных представлений сигналов применительно к задачам радиотехники и автоматики принадлежит ученым XX века Л. И. Мандельштаму, В. А. Котельникову, Г. С. Горелику, С. М. Рытову, А. А. Харкевичу, Я. З. Цыпкину и др.

На практике используются также разложения сигнала по системе и других ортогональных функций (Бесселя, Хаара, Уолша и др.).

В общем случае сигналы могут быть представлены в виде суммы ортогональных составляющих бесчисленным количеством способов. Выбор той или иной системы определяется удобством решения поставленной практической задачи.

В последующих разделах для спектрального представления периодических сигналов будет применено разложение в ряд Фурье, а для математического описания непериодических (одиночных) сигналов будет использован интеграл Фурье.

### 1.2.1. Ряд Фурье

Известно, что любая периодическая функция

$$f(t) = f(t + nT), \quad (1.2)$$

где  $n$  – любое целое число (положительное или отрицательное);  $T$  – постоянная величина, называемая периодом, удовлетворяющая в пределах периода условиям Дирихле (а именно: функция ограничена, кусочно-непрерывна и имеет на протяжении периода конечное число экстремальных значений) может быть представлена рядом Фурье в тригонометрической или комплексной форме.

Тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n), \quad (1.3)$$

или

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (1.4)$$

В первом случае (выражение (1.3)) периодическую функцию можно рассматривать как результат наложения составляющей  $A_0$  и бесконечного числа

гармонических колебаний  $A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n)$  с амплитудой  $A_{mn}$  и начальными фазами  $\psi_n$ . Частоты гармонических составляющих кратны первой, или основной, частоте  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Гармонические составляющие называют

гармониками. Колебание с частотой  $\omega_1 = 2\pi/T$  называют первой, или основной, гармоникой ( $n = 1$ ), колебание с частотой  $2\omega_1 = 2 \cdot 2\pi/T$  называют второй гармоникой и т. д.

Постоянная составляющая в выражениях (1.3) и (1.4) есть среднее значение функции  $f(t)$  за период:

$$A_0 = a_0/2 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (1.5)$$

Во втором случае (выражение (1.4)) коэффициенты ряда определяются по следующим формулам:

$$a_n = A_{mn} \cos \psi_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad (1.6)$$

$$b_n = A_{mn} \sin \psi_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt, \quad (1.7)$$

где  $A_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  – амплитуды гармоник;  $\psi_n = \arctg(b_n/a_n)$  – начальные фазы гармоник.

Совокупность гармоник, из которых состоит функция или сигнал  $f(t)$ , называют *спектром*.

Совокупность амплитуд гармоник  $A_{mn}$  называют спектром амплитуд, совокупность начальных фаз гармоник  $\psi_n$  – *спектром фаз*.

Спектр сигнала, представленного рядом Фурье в тригонометрической форме, можно изобразить графически. В системе координат  $A_{mn}$  и  $\omega = n\omega_1$  (или  $n$ ) спектр есть совокупность дискретных точек, так как каждому значению  $n\omega_1$  (или  $n$ ) соответствует одно определенное значение  $A_{mn}$ .

График, состоящий из отдельных точек, не совсем удобен. Поэтому амплитуды гармоник изображают вертикальными (спектральными) линиями соответствующей длины, перпендикулярными оси частот. В результате спектры периодического сигнала (1.3) приобретают вид, приведенный на рис. 1.19.

График зависимости амплитуд гармоник  $A_{mn}$  от частоты  $n\omega_1$  или от номера гармоник  $n$  называют амплитудно-частотным спектром (АЧС) сигнала (рис. 1.19, а). График зависимости начальных фаз  $\psi_n$  гармоник от частоты  $n\omega_1$  или от номера гармоник  $n$  называют фазочастотным спектром (ФЧС) сигнала (рис. 1.19, б).

АЧС и ФЧС периодических сигналов – дискретные (линейные). Это означает, что они состоят из равноотстоящих друг от друга спектральных линий (гармоник).

Из рис. 1.19, а и выражения (1.3) видно, что АЧС периодических сигналов всегда положительный, а ФЧС, исходя из выражения (1.4) и рис. 1.19, б, – знакопеременный, поскольку коэффициент ряда  $b_n$  связан с нечетной функцией  $\sin n\omega_1 t$ .

Комплексная форма записи ряда Фурье имеет вид

$$f(t) = 1/2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t}, \quad (1.8)$$

где комплексные амплитуды гармоник записываются следующим образом:

$$\dot{A}_{mn} = A_{mn} e^{-j\psi_n} = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.9)$$

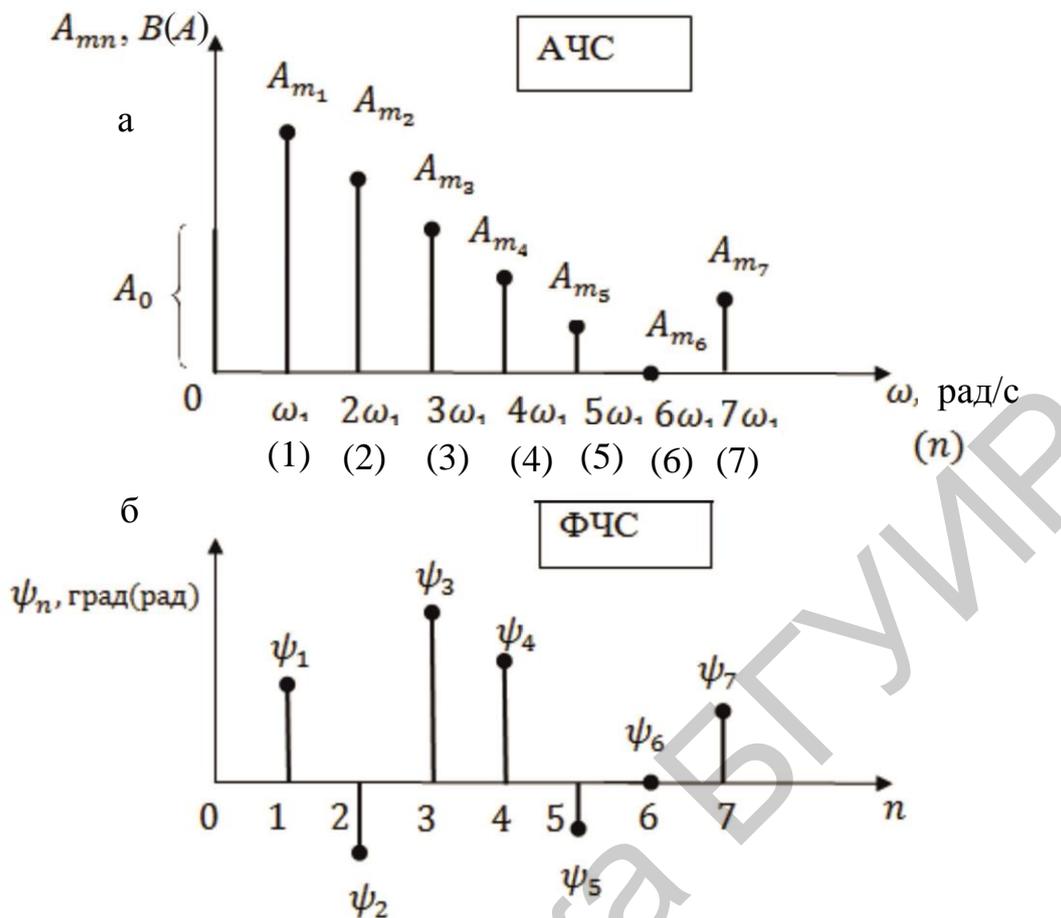


Рис. 1.19

Из уравнений (1.8) и (1.9) видно, что каждую из гармоник спектра периодического сигнала с помощью комплексной формы записи ряда Фурье можно представить двумя способами.

Первый способ:

$$f_n(t) = A_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_n) = \text{Re}\{\dot{A}_{mn} e^{j(n\omega_1 t + \psi_n)}\}. \quad (1.10)$$

Согласно выражению (1.10) каждая гармоника при комплексной форме записи ряда Фурье может быть представлена вещественной частью комплексного числа (рис. 1.20, а), т. е. рассматривается как проекция на ось абсцисс вектора  $\dot{A}_{mn}$  длиной  $A_{mn}$  с начальной фазой  $\psi$ , вращающегося с угловой скоростью  $n\omega_1$  в положительном направлении (против часовой стрелки).

Второй способ:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= A_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_n) = A_{mn} (e^{j(n\omega_1 t + \psi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t + \psi_n)})/2 = \\ &= \frac{1}{2} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} \dot{A}_{mn}^* e^{-jn\omega_1 t} = \dot{F}_{mn} e^{jn\omega_1 t} + \dot{F}_{mn}^* e^{-jn\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $\dot{F} = \frac{1}{2} \dot{A}_{mn} = \frac{1}{2} A_{mn} e^{j\psi_n}$ ;  $\dot{A}_{mn} = A_{mn} e^{j\psi_n}$ ,  $\dot{F}^* = \frac{1}{2} \dot{A}_{mn}^* = \frac{1}{2} A_{mn} e^{-j\psi_n}$ ;  $\dot{A}_{mn}^* = A_{mn} e^{-j\psi_n}$ .

Согласно выражению (1.11) каждая гармоника при комплексной форме записи ряда Фурье может быть представлена в виде суммы двух векторов

(рис. 1.20, б)  $\dot{F} = 1/2 A_{mn} e^{j\psi_n}$  и  $\dot{F}^* = 1/2 A_{mn} e^{-j\psi_n}$  длиной и  $F_{mn} = 1/2 A_{mn}$  с начальными фазами  $\pm\psi_n$ . Эти два вектора вращаются с угловой скоростью  $n\omega_1$  в противоположном направлении. Их сумма в любой момент времени равна мгновенному значению гармоники  $f_n(t)$ .

Приведенные на рис. 1.19 графики АЧС и ФЧС периодических сигналов соответствуют тригонометрической форме записи его гармоник. Этой же форме записи соответствует изображение спектров АЧС и ФЧС одной из гармоник на рис. 1.21, а. На рис. 1.21, б приведены спектры АЧС и ФЧС периодических сигналов, соответствующие комплексной форме записи гармоник. При комплексной форме записи сигнала шкала частот дополняется отрицательной полуосью (АЧС и ФЧС изображаются парами ординат с положительными и отрицательными значениями частот  $n\omega_1$  и  $-n\omega_1$ ). При этом АЧС становится симметричным относительно оси ординат, а ФЧС – относительно начала отсчета.

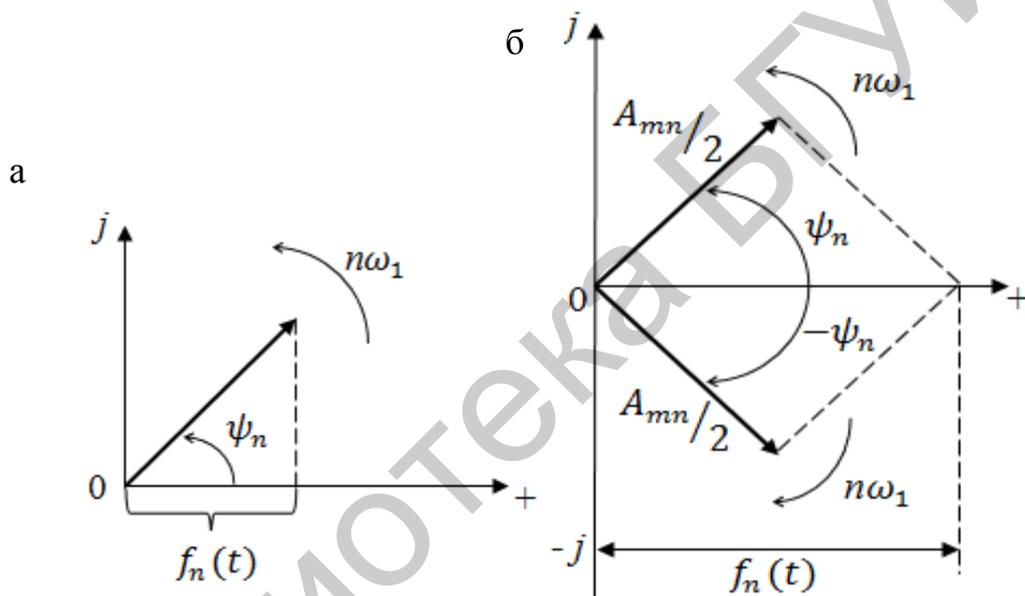


Рис. 1.20

Таким образом, в зависимости от принятой формы записи ряда Фурье (тригонометрической (1.3) – (1.7) или комплексной (1.8) – (1.11)) спектры периодических сигналов могут быть изображены как на положительной оси, так и на обеих полуосях частот. Следует отметить, что отрицательные частоты физического смысла не имеют и используются в спектральном методе анализа только для упрощения математических операций.

Методы определения спектров реальных сигналов можно разделить на три группы: аналитические, графоаналитические и экспериментальные.

Аналитические методы сводятся к расчету спектров по формулам (1.3) – (1.11). Однако для аналитического описания реальных сигналов не всегда удается подобрать достаточно точную аппроксимирующую функцию  $f(t)$ .

В подобных случаях используют графоаналитические методы, для применения которых достаточно знать лишь дискретные значения сигнала. Решение будет тем точнее, чем больше имеется таких дискретных значений.

Экспериментальное определение спектров производится с помощью специальных приборов – анализаторов спектра.

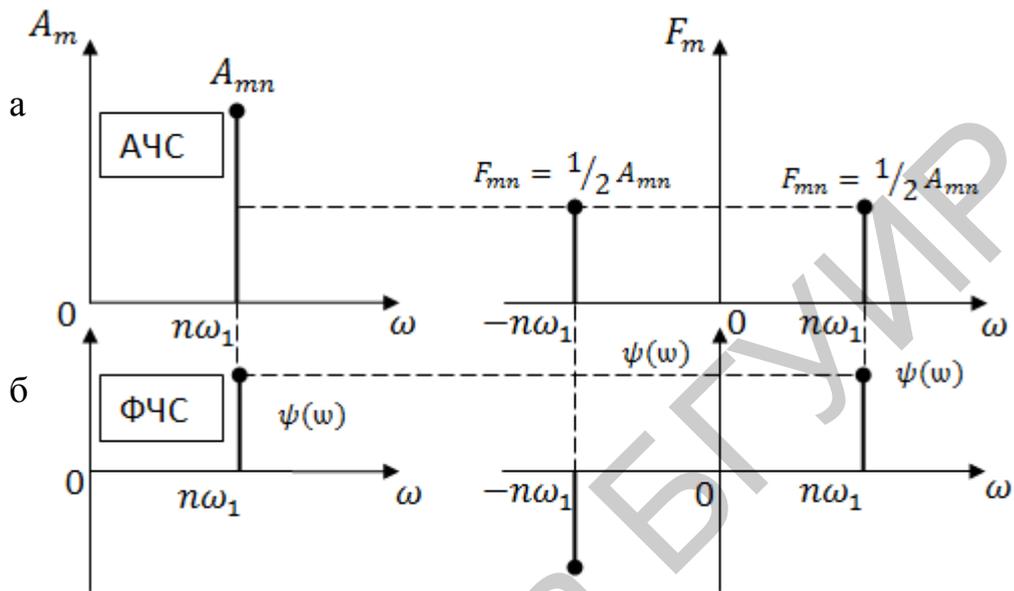


Рис. 1.21

### 1.2.2. Интеграл Фурье

На практике многие сигналы в электротехнических цепях не являются периодическими и поэтому не могут быть представлены в тригонометрической или комплексной форме ряда Фурье.

Для спектрального представления непериодических (одиночных) сигналов используют интеграл Фурье.

К числу непериодических сигналов относятся одиночные импульсы различной формы, а также совокупности конечного числа одиночных импульсов.

Чтобы применить спектральный метод для описания таких сигналов, предполагают, что они являются периодическими функциями с большим периодом  $T$ . При этом каждый импульс, например, в периодической их последовательности можно рассматривать как одиночный, если за время между импульсами переходные процессы в цепи успевают полностью закончиться, а электрическая цепь реагирует на каждый импульс этой последовательности так же, как и на одиночный импульс.

Такое предположение позволяет записать приближенное спектральное представление непериодических функций как предел ряда Фурье при  $T \rightarrow \infty$ .

В зависимости от того, из какой формы записи ряда Фурье исходить: тригонометрической (см. формулы (1.3) – (1.7)) или комплексной (см. формулы

(1.8) – (1.11)), можно получить спектральное представление непериодических сигналов в плоскости вещественных или комплексных величин. В первом случае спектральные характеристики одиночного сигнала определяются в области положительных частот от 0 до  $+\infty$ , во втором – в области как положительных, так и отрицательных частот (в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

Комплексная форма записи является более компактной и позволяет значительно упростить расчеты. Поэтому ниже будет использовано спектральное представление одиночных сигналов рядом Фурье в комплексной форме (1.8):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t}.$$

Подставив в эту формулу комплексные амплитуды (1.9)

$$\dot{A}_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt,$$

получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обозначив интервал между соседними гармониками через  $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T$ , умножим и разделим уравнение (1.12) на  $\Delta\omega$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \end{aligned} \quad (1.13)$$

По мере возрастания периода  $T$  амплитуда гармоник  $\dot{A}_{mn}$  уменьшается, интервал  $\Delta\omega$  между соседними частотами в спектре сокращается и дискретный (линейный) спектр все более сгущается. В пределе при  $T \rightarrow \infty$   $\Delta\omega$  в уравнении (1.13) перейдет в  $d\omega \rightarrow 0$ ,  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ , то есть спектр из дискретного превращается в сплошной. При этом сумма в уравнении (1.13) переходит в

интеграл и получается двойной интеграл или двойное преобразование Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.14)$$

Полученное двойное преобразование Фурье справедливо, если непериодический сигнал описывается абсолютно интегрируемой функцией  $f(t)$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то есть существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  и, кроме того, функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном интервале.

Однако условие абсолютной интегрируемости не является необходимым, а является только достаточным. Этому условию удовлетворяют почти все реальные сигналы, кроме ряда идеализированных, например, ступенчатая и синусоидальная функции не интегрируются абсолютно, но представимы в виде интеграла Фурье.

Двойное преобразование Фурье (1.14) можно представить в виде двух взаимно связанных интегральных уравнений, каждое из которых является решением другого:

$$f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.15)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.16)$$

Интеграл (1.15) называют *прямым преобразованием Фурье*, а интеграл (1.16) – *обратным преобразованием Фурье*.

Прямое преобразование Фурье позволяет перейти от временной области представления функции на комплексную плоскость, а обратное преобразование, наоборот, с комплексной плоскости на временную.

Прямое (1.15) и обратное (1.16) преобразования Фурье часто обозначаются соответственно как

$$S(j\omega) = F[f(t)] \quad \text{и} \quad f(t) = F^{-1}[S(j\omega)].$$

Основные свойства преобразований Фурье приведены в прил. 1.

Тригонометрическая форма записи обратного преобразования Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega. \quad (1.17)$$

Из сравнения выражений (1.3) и (1.17) можно сделать вывод, что непериодический сигнал представляет собой сумму бесконечно большого числа гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами  $\frac{1}{\pi} |F(j\omega)| d\omega = d\dot{F}_m$  и с частотами  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Поэтому для характеристики спектра

непериодического сигнала пользуются не комплексными амплитудами  $d\dot{F}_m = F(j\omega)d\omega$ , а функцией

$$F(j\omega) = \frac{d\dot{F}_m}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\dot{F}_m}{df},$$

которая является комплексной:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\psi(\omega)} = F(\omega)e^{j\psi(\omega)}. \quad (1.18)$$

Функцию  $F(j\omega)$  называют *спектральной плоскостью* (спектральной характеристикой или просто спектром непериодического сигнала). Она показывает, как распределяется спектр сигнала по частоте и что спектры непериодических сигналов не дискретные, а сплошные (непрерывные).

Модуль спектральной плотности или спектральная плотность амплитуд  $|F(j\omega)| = F(\omega)$  является конечной величиной и называется *амплитудно-частотным спектром*, а аргумент спектральной плотности  $\psi(\omega) = \arg F(\omega)$  – *фазочастотным спектром* непериодического сигнала.

Спектральная плотность (1.18) является комплексной функцией одной переменной – частоты  $\omega$ . Поэтому модуль и фазу спектральной плотности можно изобразить в виде графиков, где огибающая спектра – не штриховая линия, как у периодических сигналов, а сплошная. Примеры изображения спектральной плотности  $F(\omega)$  и спектра фаз  $\psi(\omega)$  (для экспоненциального импульса (рис. 1.9)) при  $\omega > 0$  приведены на рис. 1.22, а и б соответственно.

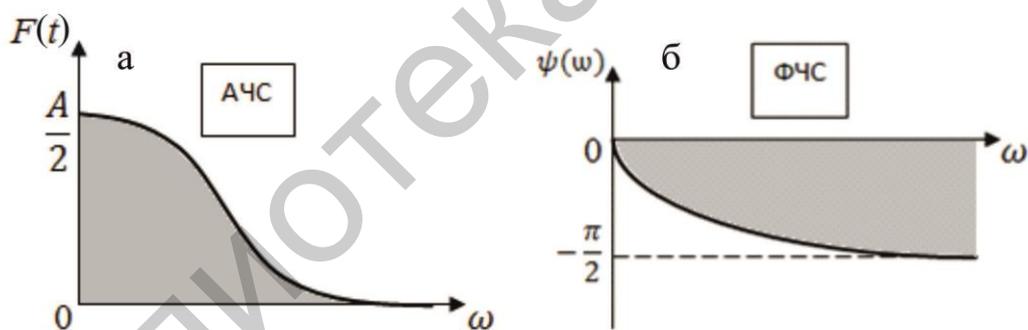


Рис. 1.22

Проводя аналогию между разложением в ряд Фурье и интегралом Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow \dot{A}_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt,$$

можно прийти к соотношению

$$F(j\omega) \leftrightarrow T \frac{\dot{A}_{mn}}{2} = \frac{2\pi \dot{A}_{mn}}{\omega_1 2} = \frac{\pi}{\omega_1} \dot{A}_{mn}. \quad (1.19)$$

С помощью соотношения (1.19) можно осуществить непосредственный переход, например, от спектра одиночного импульса к спектру периодической последовательности таких же импульсов, и наоборот.

Из соотношения (1.19) следует еще один важный вывод: огибающая сплошного спектра  $F(j\omega)$  непериодической функции и огибающая линейчатого спектра  $A_{mn}(\omega)$  периодической функции совпадают по форме и различаются лишь масштабом:  $F(\omega) = \pi/\omega_1 A_{mn}$ . Это соотношение указывает также на то, что функция  $F(\omega)$  есть плотность амплитуд и измеряется в А/Гц или В/Гц.

### 1.3. Спектры периодических видеосигналов

#### 1.3.1. Среднее и действующие значения, мощность периодических сигналов

Согласно (1.5) среднее значение периодического сигнала, или постоянная составляющая за период, определяется следующим выражением:

$$A_{cp} = A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt, \quad (1.20)$$

где  $f(t)$  взята по абсолютной величине.

Этот интеграл равен среднему значению функции  $f(t)$  за положительный полупериод, если она имеет одинаковые положительную и отрицательную полуволны.

Действующее (или среднее квадратическое) значение периодического сигнала определяется соотношением

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt}. \quad (1.21)$$

Подставляя в соотношение (1.21) значение функции  $f(t)$ , разложенной в ряд Фурье по формуле (1.3), получим

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n) \right)^2 dt}.$$

Так как  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , то интеграл под корнем раскладывается на ряд интегралов:

$$1) \quad 1/T \int_{-T/2}^{T/2} A_0^2 dt = A_0^2;$$

2) все интегралы

$$\frac{2A_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n) \right) dt$$

равны нулю из-за ортогональности подынтегральных функций;

3) в интеграле

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n) \right)^2 dt$$

только один интеграл

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} dt = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

равен сумме квадратов действующих значений отдельных гармоник, а все остальные равны нулю в силу ортогональности подынтегральных функций.

Таким образом, действующее значение периодического сигнала равно корню квадратному из суммы квадрата его постоянной составляющей и квадратов действующих значений всех его гармоник:

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}. \quad (1.22)$$

Из соотношения (1.22) видно, что действующее значение периодического сигнала не зависит от начальных фаз гармонических составляющих.

Соотношение (1.22) можно записать в виде

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \quad (1.23)$$

Это соотношение называют равенством Ляпунова – Парсеваля. Оно позволяет определять интеграл от квадрата периодической функции в пределах периода по квадратам действующих значений гармоник.

Для периодических сигналов активная мощность  $P$  равна среднему за период от мгновенного значения мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (1.24)$$

Подстановка в (1.24) напряжения и тока в виде ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_{n_u});$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_{n_i}),$$

дает следующее:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_{nu}) \right] \cdot \left[ I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_{ni}) \right] dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} I_{mn} \cos(n\omega_1 t + \psi_{nu}) \cos(n\omega_1 t + \psi_{ni}) \right] dt = \\
&= U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n, \quad (1.25)
\end{aligned}$$

так как

$$\int_0^T U_{mq} I_{ms} \cos(q\omega_1 t + \psi_{qu}) \cos(s\omega_1 t + \psi_{si}) dt = 0, \text{ при } q \neq s.$$

В соотношении (1.25)  $U_n, I_n$  – действующие значения напряжения и тока  $n$ -й гармоники;  $\varphi_n = \psi_{nu} - \psi_{ni}$  – угол сдвига фаз между напряжением и током  $n$ -й гармоники;  $P_0$  – мощность постоянной составляющей напряжения и тока;  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  – сумма активных мощностей гармоник тока и напряжения:  $P_n = P_1 + P_2 + \dots = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$ .

Реактивную мощность  $Q$  периодического сигнала определяют как сумму реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = Q_1 + Q_2 + \dots = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots.$$

Произведение действующих значений напряжения и тока периодического сигнала  $S = UI$  называют *полной мощностью*.

В отличие от цепей синусоидального тока, где  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  или  $S^2 = P^2 + Q^2$ , полная мощность периодического сигнала при различии форм кривых тока и напряжения записывается следующим образом:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2, \quad (1.26)$$

где  $T$  – мощность искажения, учитывающая это различие; если формы кривых тока и напряжения одинаковы, то  $T = 0$ .

Активную мощность в цепи периодического тока или напряжения можно также представить в виде

$$P = rI^2 = gU^2 = r(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2) = g(U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2), \quad (1.27)$$

где  $r$  и  $g$  – активные сопротивление и проводимость цепи.

Эффективность каждой спектральной составляющей определяется распределением мощности или энергии в спектре сигнала. Это можно показать с помощью равенства Ляпунова – Парсеваля.

Оценить распределение энергии в спектре периодического сигнала можно с помощью мощности, выделяемой в сопротивлении  $R = 1 \text{ Ом}$ . Согласно формуле (1.23), мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Из этого выражения видно, что:

а) активная мощность равна квадрату действующего значения тока или напряжения (1.27);

б) активная мощность, а следовательно, согласно равенству Ляпунова – Парсеваля, и энергия периодического сигнала пропорциональна сумме мощностей его отдельных спектральных составляющих.

Значит, по виду огибающей квадратов амплитуд гармоник можно судить о распределении энергии в спектре этого сигнала.

Графическое изображение квадратов амплитуд гармоник или величин, пропорциональных им, называют энергетическим спектром сигнала.

Интервал частот, в пределах которого распределена основная часть энергии сигнала (до 90–95 %), называют эффективной шириной спектра (как правило, до 1-го (2-го) нуля огибающей).

### 1.3.2. Спектры неограниченной периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы

Пусть функция  $f(t)$  определяет неограниченную периодическую последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы (рис. 1.23):

$$f(t) = \begin{cases} E_m & \forall t \in \left[-\frac{\tau_n}{2}; \frac{\tau_n}{2}\right]; \\ 0 & \forall t > \frac{\tau_n}{2}; \forall t < -\frac{\tau_n}{2}. \end{cases} \quad (1.28)$$

На рис. 1.23, а длительность импульса обозначена  $\tau_n$ , амплитуда –  $E_m$ , период повторения импульсов –  $T$ . Начало отсчета времени выбрано в середине одного из импульсов для того, чтобы функция  $f(t)$  была четной. Такие импульсы применяются, например, в телевизионной аппаратуре, устройствах автоматики, в приемных и передающих устройствах радиолокационных станций.

Переходя к спектральному представлению данной периодической последовательности видеоимпульсов в виде ряда Фурье, используя соотношение (1.3), найдем составляющие ряда:  $A_0$ ,  $A_{mn}$  и  $\psi_n$ .

Постоянную составляющую  $A_0$  вычисляем по формуле (1.5):

$$A_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} f(t) dt}{T} = \frac{\frac{1}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} E_m dt}{T} = \frac{E_m \tau_n}{q} = \frac{E_m}{q}, \quad (1.29)$$

где отношение  $T/\tau_n = q$  называют *скважностью импульсов*.

Если, например,  $\tau_n = 1$  мкс, частота повторения импульсов  $F = 1000$  Гц, то период повторения

$$T = \frac{2\pi}{2\pi F} = \frac{1}{1000} = 1000 \text{ мкс},$$

а скважность

$$q = T/\tau_{и} = 1000/1 = 1000.$$

Чем меньше  $T$  (или больше  $\tau_{и}$ ), тем скважность меньше, и наоборот, чем больше  $T$  (или меньше  $\tau_{и}$ ), тем скважность больше.

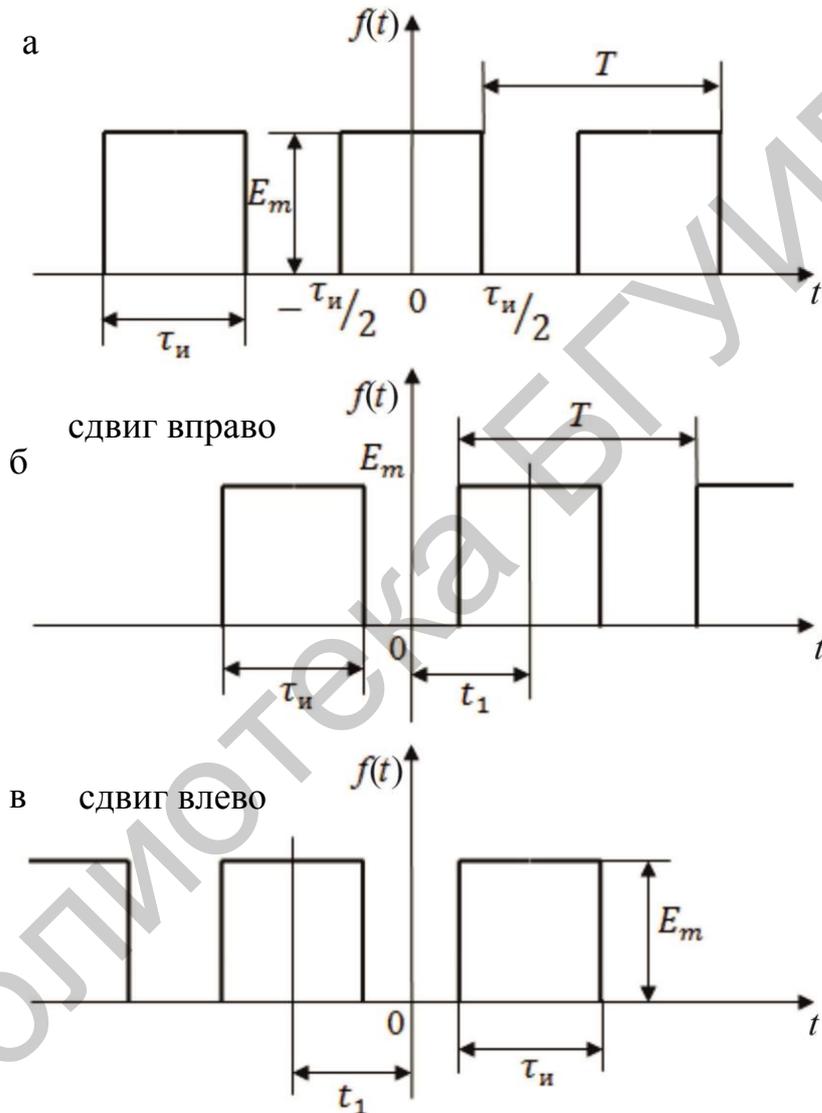


Рис. 1.23

Амплитуды гармоник спектра  $A_{mn}$  рассчитаем по выражению (1.9) в комплексной форме:

$$\dot{A}_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-\tau_{и}/2}^{\tau_{и}/2} E_m e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2E_m}{T} \frac{e^{jn\omega_1 \tau_{и}/2} - e^{-jn\omega_1 \tau_{и}/2}}{jn\omega_1}.$$

Домножив числитель и знаменатель этого выражения на  $\tau_{и}/2$  и используя известное из математики соотношение  $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/2j$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mn} &= \frac{2E_m \tau_{и}}{T} \frac{e^{\frac{jn\omega_1 \tau_{и}}{2}} - e^{-\frac{jn\omega_1 \tau_{и}}{2}}}{\frac{2jn\omega_1 \tau_{и}}{2}} = \frac{2E_m}{q} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{q}\right)}{\frac{n\pi}{q}} = \frac{2E_m}{q} \frac{\sin x}{x} = \\ &= \frac{2E_m}{q} \left| \frac{\sin x}{x} \right| e^{j\psi_n}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $A_{mn} = 2E_m/q \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right|$  – амплитуда  $n$ -й гармоники;  $\psi_n = \arg \sin x/x$  – начальная фаза  $n$ -й гармоники;

$$x = \frac{n\omega_1 \tau_{и}}{2} = \frac{n \frac{2\pi}{T} \tau_{и}}{2} = \frac{n\pi}{q}.$$

Анализ выражений (1.29) и (1.30) позволяет сделать следующие выводы:

1) постоянная составляющая  $A_0$  и амплитуды всех гармоник пропорциональны амплитуде импульсов и уменьшаются с ростом скважности  $q$ ;

2) амплитуды гармоник модулируются арочным синусом:  $Sa(x) = \sin x/x$ , где  $x = n\pi/q$ . Такая функция, взятая по модулю, имеет арочную структуру (рис. 1.24).

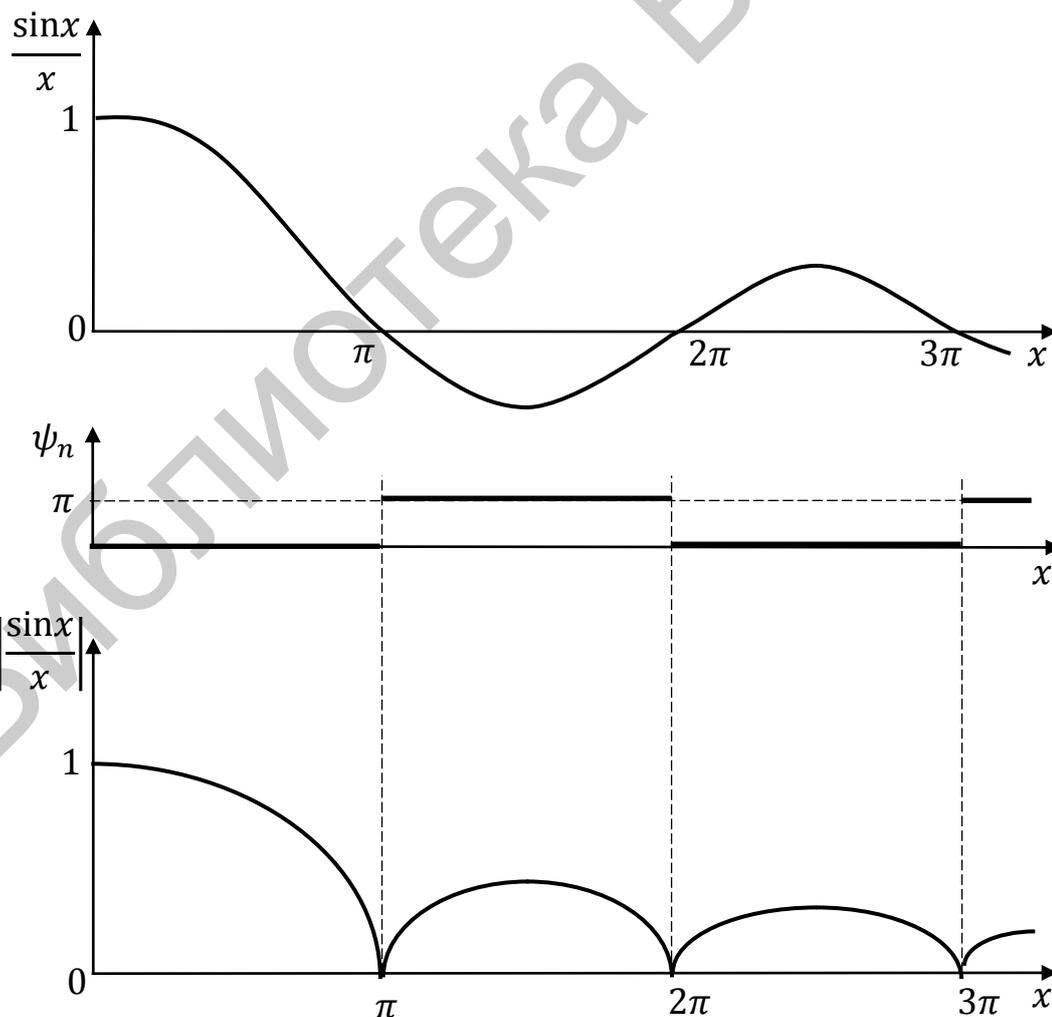


Рис. 1.24

Из рис. 1.24 видно, что фазы гармоник от арки к арке изменяются на  $\pi$ . Причем при положительных значениях функции  $\sin x/x$  (нечетные арки)  $\psi_n = 0$ , а при отрицательных (четные арки)  $\psi_n = \pi$ , т. е.

$$\psi_n = \arg \frac{\sin x}{x} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin x/x > 0; \\ \pi & \text{при } \sin x/x < 0. \end{cases}$$

Подставив найденные значения  $A_0$ ,  $A_{mn}$  и  $\psi_n$  в ряд Фурье, получим спектральное представление рассматриваемой периодической последовательности видеоимпульсов в виде суммы постоянной и гармонических составляющих:

$$f(t) = \frac{E_m}{q} + \frac{2E_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| \cos(n\omega_1 t + \psi_n). \quad (1.31)$$

Из соотношения (1.31) следует, что отдельные гармоники в спектре рассматриваемого сигнала отсутствуют, т. е. амплитуды их равны нулю при условии  $\sin(n\pi/q)/(n\pi/q) = 0$ , которое выполняется при  $\sin\left(\frac{n\pi}{q}\right) = 0$ .

Это справедливо, когда  $n\pi/q = \pm k\pi$ , откуда  $n/q = k$ , или  $n = kq$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , т. е. в спектре отсутствуют гармоники, номера которых кратны скважности. Если, например,  $q = 3$ , то в спектре равны нулю амплитуды третьей ( $n = kq = 1 \cdot 3 = 3$ ), шестой ( $n = kq = 2 \cdot 3 = 6$ ), девятой ( $n = kq = 3 \cdot 3 = 9$ ) и других гармоник.

Таким образом, спектры периодической последовательности видеоимпульсов любой формы имеют следующие особенности:

1) спектральные линии отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, равном  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = 2\pi/T, 2\omega_1 = 2 \cdot 2\pi/T, 3\omega_1 = 3 \cdot 2\pi/T, \dots,$$

или

$$F_1 = 1/T, \quad F_2 = 2/T, \quad F_3 = 3/T, \dots;$$

2) амплитуды гармоник определяются огибающей спектра, характер которой зависит от формы сигнала;

3) для построения спектра в точках  $n\omega_1$  на расстоянии  $\omega_1$  одна от другой проводят линии, перпендикулярные оси частот до пересечения с огибающей спектра.

**Пример 1.1.** Рассчитать и построить спектры АЧС и ФЧС периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы (см. рис. 1.23, а), если  $E_m = 100$  мВ,  $q = 5$ ,  $\tau_{и} = 0,02$  мс.

**Решение.**

1. Расстояние между спектральными линиями равно частоте следования импульсов:

$$F_1 = \omega_1/2\pi = (2\pi/T)/2\pi = 1/T = 1/(q\tau_{и}) = 1/(5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} + 10^{-3}) \text{ Гц} = 10 \text{ кГц}.$$

2. Нули огибающей спектра (так как  $q = 5$ , то в спектре будут отсутствовать гармоники с номерами, кратными 5:  $N = 5, N = 10, N = 15, \dots$ ) имеют частоты  $\omega = n\omega_1 = q\omega_1 = T/\tau_{и} \cdot 2\pi/T = 2\pi/\tau_{и}$ , откуда  $f_1 = 1/\tau_{и} =$

$= \frac{1}{0,02 \cdot 10^{-3}} \text{ Гц} = 50 \text{ кГц}; f_2 = 2/\tau_{и} = 100 \text{ кГц}; f_3 = 3 \cdot 1/\tau_{и} = 150 \text{ кГц}, \dots$ , а ширина арки  $1/\tau_{ц}$  равна 50 кГц.

3. Постоянная составляющая ряда Фурье

$$A_0 = E_m/q = 100 \cdot 10^{-3}/5 = 20 \text{ мВ.}$$

4. Максимальное значение огибающей спектра

$$A_{m_0} = 2E_m/q = 2 \cdot 20 = 40 \text{ мВ.}$$

Спектры амплитуд (АЧС) и фаз (ФЧС), построенные по полученным расчетам, приведены на рис. 1.25, а и б соответственно.

Характерной особенностью спектров рассматриваемого сигнала является влияние выбора момента начала отсчета времени на ФЧС, а длительности импульсов и периода их следования – на АЧС.

Влияние выбора момента начала отсчета сигналов рассмотрим для последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы (см. рис. 1.23, б), сдвинутых вправо относительно начала отсчета на время  $t_1$ .

Такая последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы в пределах одного периода аналитически записывается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} E_m & \forall t \in ]t_1 - \tau_{и}/2; t_1 + \tau_{и}/2 [; \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Найдем спектры амплитуд и фаз такого сигнала, для чего вычислим  $A_0, \dot{A}_{mn}$  и  $\psi_n$ :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1 - \tau_{и}/2}^{t_1 + \tau_{и}/2} E_m dt = \frac{E_m}{q};$$

$$\dot{A}_m = \frac{2}{T} \int_{t_1 - \tau_{и}/2}^{t_1 + \tau_{и}/2} E_m e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2E_m}{q} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| e^{j\psi_n} e^{-jn\omega_1 t} = A_m e^{j\psi'_n},$$

где  $\psi'_n = \arg \sin(n\pi/q)/(n\pi/q) - n\omega_1 t = \psi_n - \psi_\alpha$ ,

или

$$\psi'_n = -\psi_\alpha \pm \begin{cases} 0 & \text{при } \sin(n\pi/q) > 0; \\ \pi & \text{при } \sin(n\pi/q) < 0; \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\psi_\alpha = n\omega_1 t_1.$$

Подставив найденные значения в ряд Фурье, получим спектральное представление рассматриваемой последовательности видеоимпульсов при  $t = t_1$ :

$$f(t) = E_m/q + 2E_m/q \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| \cos(n\omega_1 t + \psi'_n). \quad (1.33)$$

Из сравнения уравнений (1.31) и (1.33) можно сделать вывод, что спектр амплитуд (АЧС) не зависит от выбора момента начала отсчета времени. Постоянная составляющая  $A_0$  и амплитуды гармоник  $A_{mn}$  у первой последовательности видеоимпульсов при  $t = 0$  (см. рис. 1.23, а) и у второй при  $t = t_1$  (см. рис. 1.23, б) одинаковы, а значит, и график АЧС, например при скважности  $q = 5$ , останется таким же (см. рис. 1.25, а).

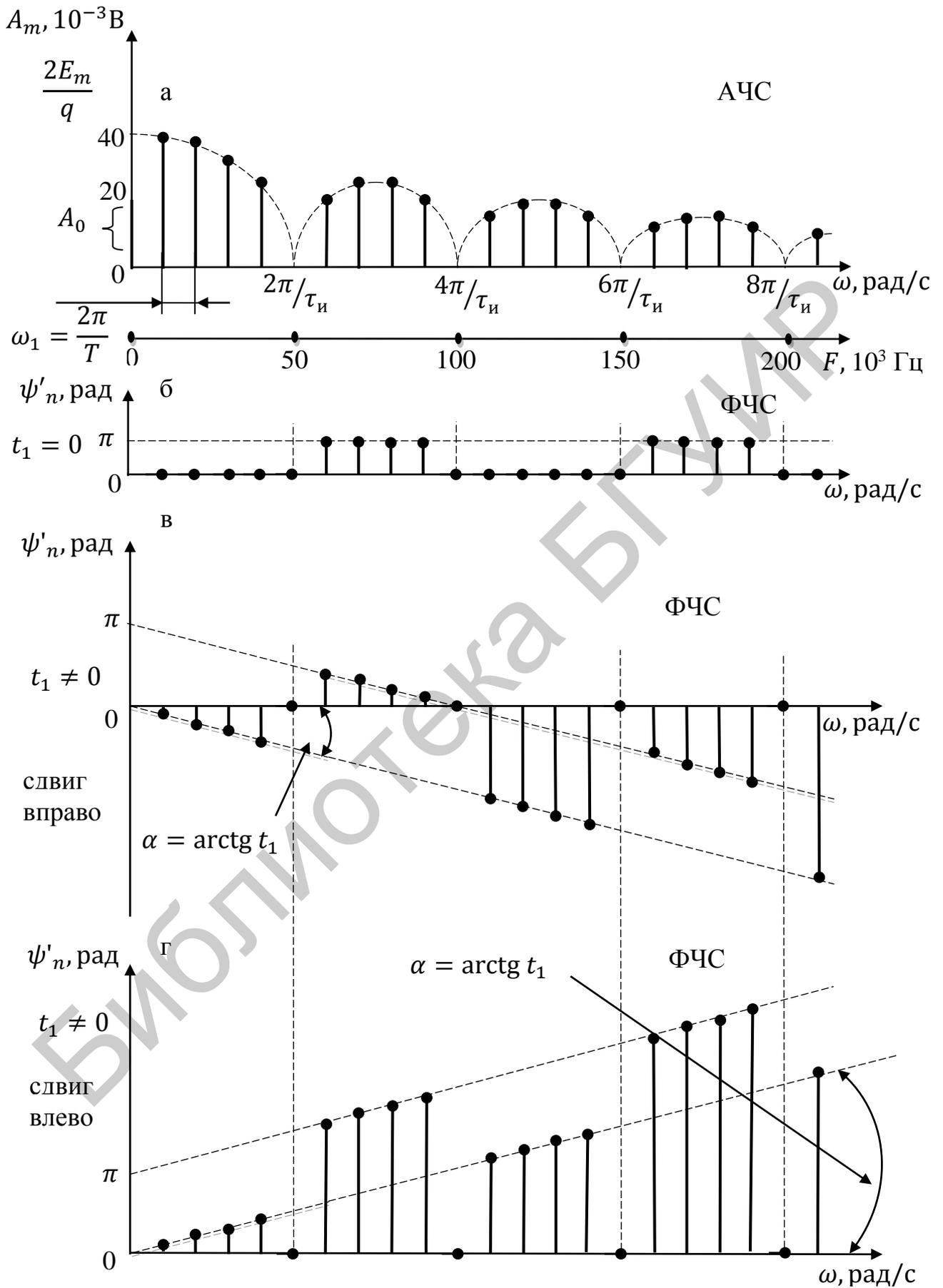


Рис. 1.25

Начальные фазы гармоник второй последовательности видеоимпульсов (см. рис. 1.23, б) вычисляются по выражению (1.32), откуда следует, что спектр фаз (ФЧС) зависит от выбора момента отсчета времени  $t_1$ . Огибающая ФЧС представляет собой прямую линию с отрицательным углом наклона, пропорциональным  $t_1$  (рис. 1.25, в). Чем больше сдвиг импульсов во времени вправо (т. е. чем больше  $t_1$ ), тем больше наклон огибающей ФЧС. Учет изменения от арки к арке фаз гармоник на  $\pi$  осуществляется соответствующим смещением огибающей ФЧС (прямой с углом наклона  $\alpha$ ) параллельно самой себе на  $\pi$ . Для примера 1.1 при  $t \neq 0$  ФЧС имеет вид, приведенный на рис. 1.25, в:

$$\psi'_n = -\psi_\alpha + \begin{cases} 0 & \sin x/x > 0; \\ \pi & \sin x/x < 0. \end{cases}$$

Каждая арка АЧС имеет ширину  $q\omega_1$ . Поэтому сдвиг фазы на одну арку составляет угол  $\psi_\alpha = q\omega_1 t_1 = 2\pi t_1/\tau_n$ .

При сдвиге импульсов относительно начала отсчета влево (см. рис. 1.25, в) угол наклона огибающей ФЧС будет положительным (рис. 1.25, г).

Влияние длительности импульсов ( $\tau_n$ ) и периода их следования ( $T$ ) на АЧС оценим для последовательности видеоимпульсов, приведенной на рис. 1.25, а.

При увеличении длительности импульсов  $\tau_n$  и неизменном периоде их следования ( $T = \text{const}$ ) ширина арок и связанная с ней ширина спектра уменьшается: происходит «сжатие» спектра (рис. 1.26).

Основная часть энергии сосредотачивается в области низких частот. Первый нуль огибающей спектра сдвигается влево (на рис. 1.26 при увеличении  $\tau_n = 0,2$  мс в три раза и неизменном периоде следования  $T = 1,6$  мс ширина арки уменьшилась с 5 кГц примерно до 1,7 кГц).

Расстояние между спектральными линиями не изменяется, свое положение на оси частот они не меняют, с увеличением  $\tau_n$  растут лишь амплитуды гармоник. И наоборот, чем короче импульсы, тем шире спектр. При  $\tau_n \rightarrow 0$  (например, импульс разряда грозовой молнии или электромагнитный импульс при ядерном взрыве) спектр становится настолько широким, что будет создавать помехи радиоприему практически на всех частотах. При  $\tau_n = T$  спектр вырождается в одну линию (постоянную составляющую  $A_0$ ) на нулевой частоте ( $\omega = 0$ ).

При увеличении периода повторения импульсов  $T$  и постоянной их длительности ( $\tau_n = \text{const}$ ) ширина арки АЧС остается неизменной (на рис. 1.27  $1/\tau_n = 1/10^{-3}$  Гц = 1 кГц), уменьшается амплитуда гармоник и расстояние между ними, изменяется положение гармоник на оси частот. При увеличении периода следования в три раза (от  $T = 4$  мс до  $T = 12$  мс) частота первой гармоники  $\omega_1 = 2\pi/T$  (или  $f_1 = 1/T$ ) уменьшится с  $f = 250$  Гц до  $f = 80$  Гц. Если период  $T \rightarrow \infty$ , то амплитуды гармоник спектра уменьшаются до очень малых значений, спектр становится сплошным, что эквивалентно переходу к одиночному импульсу.

На практике иногда достаточно учитывать в спектре лишь первые гармоники. Точность аппроксимаций исходных функций в этом случае зависит от

числа учтенных гармоник. Так, расчеты показывают, что при достаточно большой скважности  $q$  в диапазоне частот от 0 до  $1/\tau_{и}$ , т. е. до первого нуля огибающей спектра периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы, содержится 90 % энергии сигнала, а до второго нуля огибающей, т. е. до  $2/\tau_{и}$ , – 95 % энергии. Поэтому эффективная ширина спектра рассматриваемой периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы

$$\Delta f = (1 - 2)/\tau_{и} \text{ или } \Delta\omega = (1 - 2) 2\pi/\tau_{и},$$

т. е. практически до первого или второго нуля огибающей.

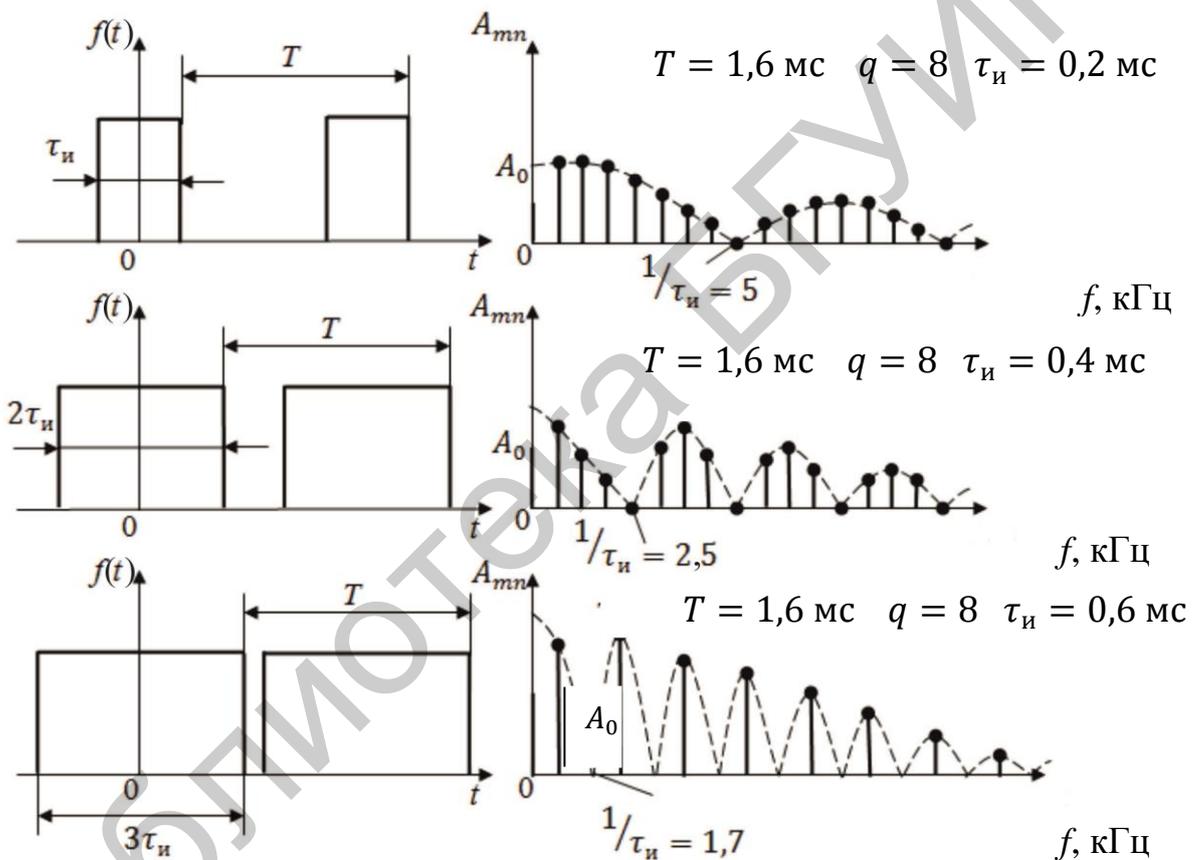


Рис. 1.26

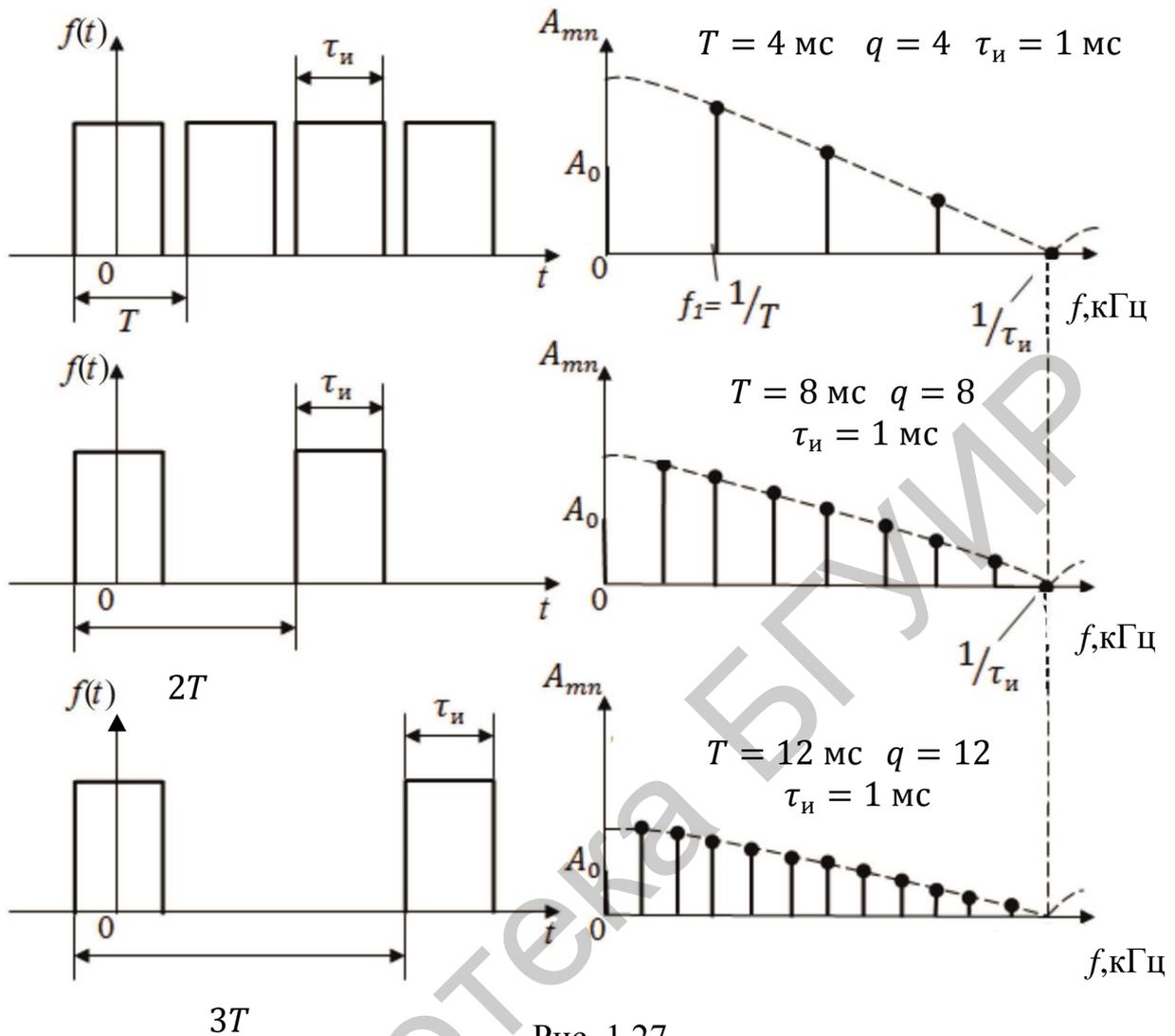


Рис. 1.27

### 1.3.3. Спектры неограниченной периодической последовательности видеоимпульсов, имеющих форму равнобедренного треугольника

Согласно рис. 1.28 периодическая последовательность видеоимпульсов, имеющих форму равнобедренного треугольника, записывается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 2E_m/\tau_{и} (t + \tau_{и}/2), & \text{при } -\tau_{и}/2 \leq t \leq 0; \\ -2E_m/\tau_{и} (t - \tau_{и}/2) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_{и}/2. \end{cases} \quad (1.34)$$

Подставляя соотношения (1.34) для  $f(t)$  в выражение (1.9), с учетом того, что

$$\int e^{\alpha x} dx = 1/\alpha e^{\alpha x}; \quad \int x e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}/\alpha^2 (\alpha x - 1);$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha/2,$$

получим выражение для  $\dot{A}_{mn}$ :

$$\dot{A}_{mn} = 2E_m/q (\sin x/x)^2, \quad (1.35)$$

где  $x = n\pi/q$ ,  $q = T/\tau_{и}$ .

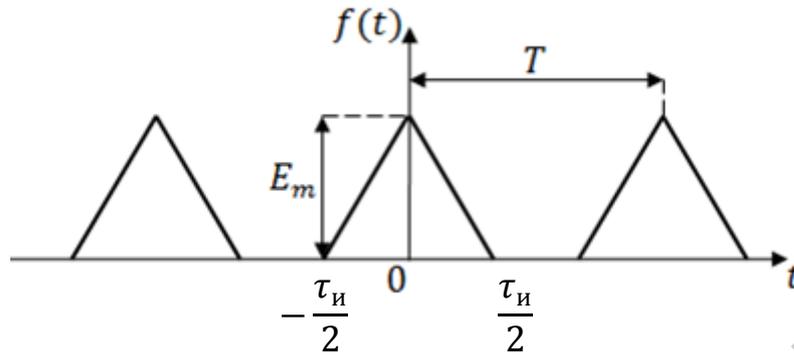


Рис. 1.28

Найденное значение  $\dot{A}_{mn}$  подставим в формулу (1.8). Учитывая, что при  $k = 0$   $\sin x/x = 1$ , получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t} = \frac{E_m}{2q} + \frac{E_m}{2q} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x/x)^2 (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) = \\ &= \frac{E_m}{2q} + \frac{E_m}{2q} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{n\pi}{2q} / \frac{n\pi}{2q} \right)^2 \cos n\omega_1 t. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Из соотношения (1.36) следует, что постоянная составляющая

$$A_0 = E_m/2q, \quad (1.37)$$

а комплексные амплитуды гармоник, входящих в состав спектра последовательности треугольных импульсов, определяются из выражения

$$\dot{A}_{mn} = \frac{E_m}{q} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{E_m}{q} \left( \frac{\sin \frac{n\pi}{2q}}{n\pi/2q} \right)^2. \quad (1.38)$$

Отметим, что при выбранном начале отсчета времени (рис. 1.27) все комплексные амплитуды  $\dot{A}_{mn}$  (1.38) вещественны и положительны, т. е.  $\dot{A}_{mn} = A_{mn}$ . Это означает, что ФЧС данного сигнала равен нулю на всех частотах. У АЧС амплитуды гармоник обращаются в нуль при  $n = 2q; 4q; 6q; \dots$  или на частотах  $F_1 = 2/\tau_{и}; F_2 = 4/\tau_{и}; F_3 = 6/\tau_{и}; \dots$ .

Из этого следует, что нули огибающей АЧС при треугольных импульсах в два раза реже, чем при прямоугольных. Кроме того, огибающая АЧС треугольных импульсов спадает быстрее, так как арочный синус  $\sin x/x$  входит в выражение для  $\dot{A}_{mn}$  (см. формулу (1.38)) в квадрате, тогда как для прямоугольных импульсов (см. формулу (1.30)) – в первой степени.

АЧС периодической последовательности треугольных видеоимпульсов (см. рис. 1.28) при скважности  $q = 5$  приведена на рис. 1.29.

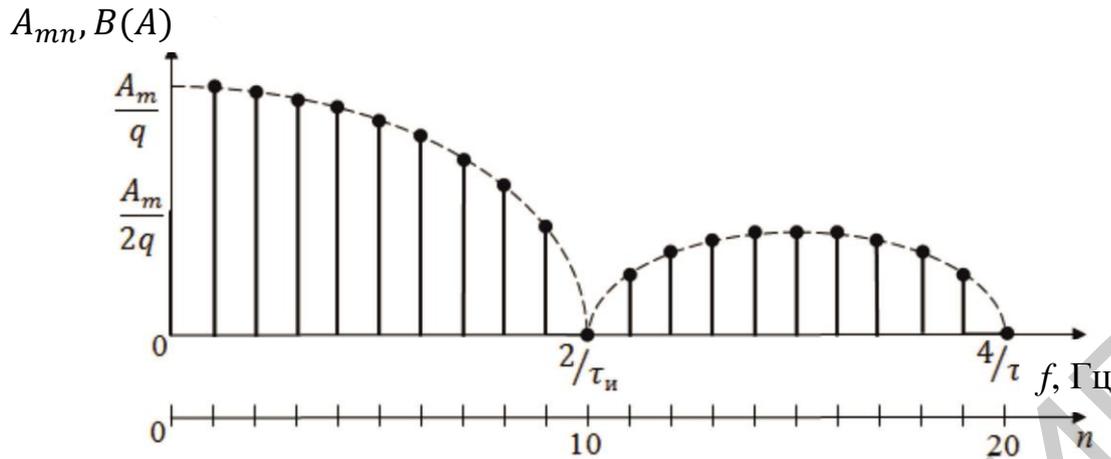


Рис. 1.29

Таким образом, при изменении формы импульсов изменяется форма огибающей спектра, а от расположения импульсов относительно осей координат изменяется и спектр сигнала. Так, например, для сигнала, симметричного относительно оси ординат и являющегося четной функцией (см. рис. 1.17, а), спектр содержит только постоянную составляющую и косинусоиды:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_1 t.$$

У сигнала же, описываемого нечетной функцией и симметричного относительно начала координат (см. рис. 1.17, б), спектр содержит только синусоиды:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega_1 t,$$

а спектр сигнала, описываемого нечетной функцией, но симметричного относительно оси абсцисс (см. рис. 1.18), содержит только нечетные гармоники:

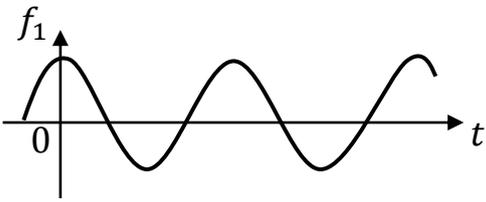
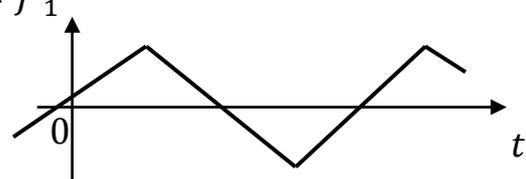
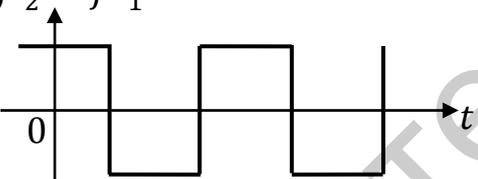
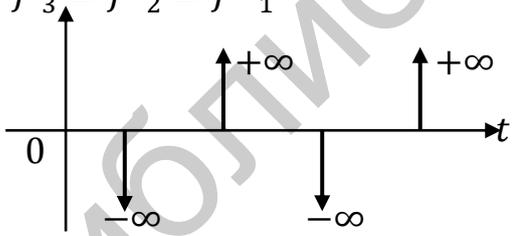
$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [A_n \cos n\omega_1 t + B_n \sin n\omega_1 t].$$

#### 1.3.4. Связь между формой сигнала и его спектром

Форма сигнала в полной мере определяется совокупностью двух его спектров: АЧС и ФЧС. Можно установить ряд характерных связей между формой сигнала и параметрами его АЧС, которые позволяют на практике, имея АЧС, судить о форме сигнала, и наоборот.

Сравнивая спектры прямоугольных и треугольных импульсов (см. пп. 1.3.2 и 1.3.3), заметим, что ряд Фурье в случае треугольных импульсов сходится быстрее, чем в случае прямоугольных импульсов, так как амплитуды гармоник убывают с ростом их номера.

Графики функций и их разложение в ряд Фурье

	$f_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos(2n-1)\Omega t$
	$f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\Omega t$
	$f_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos(2n-1)\Omega t$
	$f_4 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n-1)\Omega t$

Закономерность, по которой уменьшаются амплитуды с ростом их номера, можно выразить через число раз дифференцирования исследуемой функции, необходимое для выделения из нее дельта-функций.

Пусть в  $k$ -й производной исследуемой функции появляются дельта-функции. Тогда для коэффициентов ряда Фурье имеют силу неравенства:

$$|a_n| \leq M/n^k; \quad |b_n| \leq M/n^k,$$

где  $M$  – постоянная, зависящая от формы сигнала.

Скорость убывания амплитуд гармоник в спектре зависит от структурных свойств сигнала: коэффициенты убывают тем быстрее, чем более «гладкой» яв-

ляется форма сигнала и его производных. Если сигнал имеет скачкообразные переходы (его функция имеет конечные разрывы) и в его первой производной появляются  $\delta$ -импульсы, то амплитуды гармоник в его спектре стремятся к нулю очень медленно (порядок  $1/n$ ); если же в пределах периода следования сигнал непрерывен, но в его первой производной имеются конечные разрывы, а во второй –  $\delta$ -импульсы, то амплитуды его гармоник стремятся к нулю быстрее (порядок не ниже  $1/n^2$ ). Чем быстрее убывают коэффициенты ряда Фурье, тем более «гладкая» форма сигнала, тем меньше ширина его спектра. В пределе имеет место наиболее «гладкое» моногармоническое колебание.

Понятие длительности определено лишь для прямоугольных и сходных с ними импульсов. На практике длительность импульса произвольной формы, так же как и ширину спектра сигнала, определяют энергетическим методом, т. е. как интервал времени, в котором сосредоточена большая часть его энергии, например 90 %. Ширина спектра импульсов тем больше, чем меньше длительность импульсов.

Важным свойством АЧС сигнала является то, что произведение длительности импульса на ширину спектра есть величина постоянная для импульсов данной формы:

$$\Delta\omega_c \tau_{\text{и}} = \text{const.}$$

Это свойство присуще спектрам любых сигналов и играет существенную роль при выборе их параметров.

Уменьшение длительности радиолокационных импульсов, например, повышает точность определения координат цели. Однако увеличение при этом ширины спектра сигнала уменьшает помехозащищенность радиоприемных устройств. Поэтому желательно выбирать такую форму импульсов, чтобы произведение  $\Delta\omega_c \tau_{\text{и}}$  имело наименьшую величину. Анализ показывает, что это произведение получается меньше для тех импульсов, которые изменяются во времени более плавно, форма которых более «гладкая». Наименьшая величина произведения  $\Delta\omega_c \tau_{\text{и}}$ , близкая к теоретически достижимому минимуму, – у колоколообразных импульсов.

При грубых оценках в технике принято считать, что это произведение близко к единице:

$$\Delta F_c \tau_{\text{и}} \approx 1 \text{ или } \Delta\omega_c \tau_{\text{и}} \approx 2\pi.$$

## **1.4. Спектры непериодических видеосигналов**

### **1.4.1. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала**

Методика спектрального способа описания непериодических одиночных сигналов приведена в п. 1.2.2 и может быть осуществлена с помощью выражений (1.12)–(1.19). Эту методику необходимо дополнить понятием эффективной ширины спектра одиночных сигналов.

Спектры непериодических сигналов, так же как и периодических, являются бесконечно широкими. Однако у всех реальных сигналов модуль спектральной плотности в выражении (1.18) довольно быстро уменьшается с ростом частоты  $\omega$ . Поэтому вводят понятие «ширина спектра» как область частот, в пределах которой заключена основная часть его энергии. Определить эту энергию через спектральную плотность можно с помощью теоремы Рэлея (аналогичной равенству Ляпунова – Парсеваля для периодических сигналов (1.23)), (см. п. 1.3.1), которая для сплошных спектров имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.39)$$

Равенство (1.39) можно получить путем умножения на  $f(t)$  обеих частей обратного преобразования Фурье (1.16) и интегрирования по времени в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Если функция  $f(t)$  представляет собой ток или напряжение, то квадрат этой функции пропорционален мощности, а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$  – энергии. Следовательно, интеграл  $\int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$  также пропорционален энергии сигнала.

Функцию  $|F(j\omega)|^2$  называют *энергетическим спектром непериодических сигналов*. По виду этой функции можно судить о распределении энергии в спектре непериодического сигнала и о ширине спектра. Причем, чем короче непериодический сигнал, тем шире полоса частот, в которой сосредоточена основная часть энергии сигнала (до 90–95 %).

#### 1.4.2. Спектры убывающей экспоненциальной функции

Рассматриваемая функция (см. рис. 1.9) соответствует, например, напряжению на конденсаторе при его разряде через сопротивление.

Аналитическая запись убывающей экспоненциальной функции имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-t/\tau_n}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.40)$$

Используя прямое преобразование Фурье (1.15), получим спектральную плотность экспоненциального импульса:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-t/\tau_n} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-(1/\tau_n + j\omega)t} dt = \\ &= -\frac{A\tau_n}{1 + j\omega\tau_n} e^{-(1/\tau_n + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A\tau_n}{1 + j\omega\tau_n} = \frac{A}{1/\tau_n + j\omega} = \\ &= \frac{A\tau_n}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_n^2}} e^{-j\arctg \omega\tau_n} = F(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где  $F(\omega) = |F(j\omega)| = A\tau_n/\sqrt{1 + \omega^2\tau_n^2} = A\tau_n/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$  – модуль спектральной плотности или АЧС сигнала;  $\alpha = 1/\tau_n$ ;  $\psi(\omega) = -\text{arctg } \omega\tau_n$  – спектр фаз или ФЧС сигнала.

Графики АЧС  $F(\omega)$  и ФЧС  $\psi(\omega)$  приведены на рис. 1.22, а и б соответственно.

### 1.4.3. Спектры дельта-функции

Дельта-функция  $\delta(t)$ , или функция Дирака, как сигнал в физической системе, представляет собой единичный короткий видеоимпульс с бесконечно большой амплитудой  $U_m = 1/\Delta t$  (рис. 1.30, а) и длительностью, равной  $\Delta t$ .

В пределе, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , амплитуда  $U_m \rightarrow \infty$ , но площадь импульса остается постоянной:  $U_m\Delta t = 1$ .

Для дельта-функции, приведенной на рис. 1.30, б, справедливы соотношения:

$$\delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, \quad (1.42)$$

а для дельта-функции, приведенной на рис. 1.30, в справедливы соотношения:

$$\delta(t - \tau) = 0 \text{ при } t \neq \tau; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau = 1. \quad (1.43)$$

Дельта-функция представляет собой удобную математическую модель таких быстро протекающих процессов, как включение и выключение электрического напряжения (т. е. броски ЭДС самоиндукции при коммутации), короткое замыкание и разрыв в электрической цепи, воздействие на электрическую цепь кратковременных импульсов.

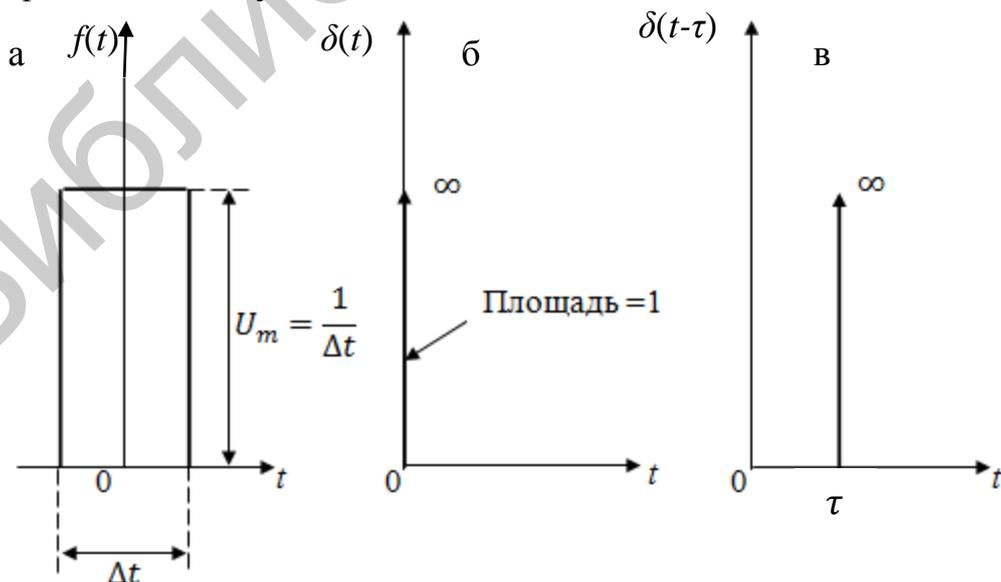


Рис. 1.30

Результат таких воздействий часто не зависит от формы импульса, а определяется интегральным значением, т. е. площадью импульса.

Важным свойством дельта-функции является возможность выделять (отфильтровывать) с ее помощью значения функции  $f(t)$  (т. е. проходящего через электрическую цепь сигнала) в заданный момент времени. Поскольку  $\delta(t) \neq 0$  лишь при  $t = 0$  и в окрестностях этой точки на бесконечно малом интервале от  $-\Delta t$  до  $\Delta t$   $f(t) \rightarrow f(0)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то фильтрующее свойство дельта-функции определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0).$$

Если дельта-функция смещена на время  $\tau$ , то фильтрующее свойство записывается так (рис. 1.31):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau).$$

Дельта-функция, согласно соотношениям (1.42) и (1.43), является абсолютно интегрируемой функцией. Поэтому для получения спектральной плотности дельта-функции можно использовать прямое преобразование Фурье (1.15):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Но так как  $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ , то

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - -j \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \sin \omega t dt. \quad (1.44)$$

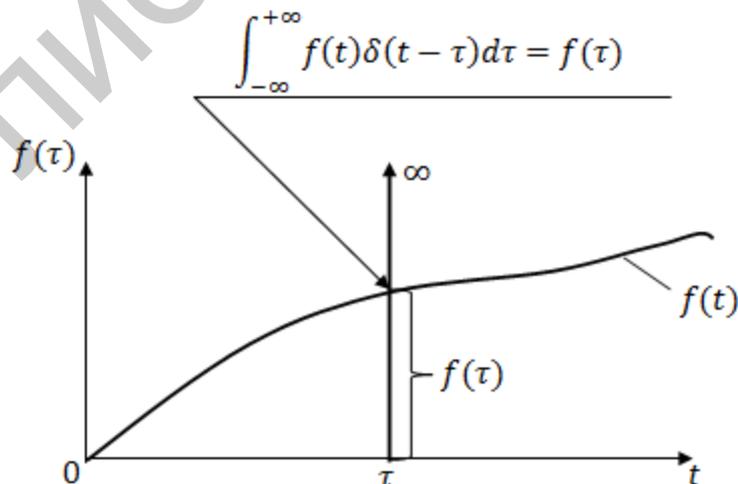


Рис. 1.31

Поскольку дельта-функция (согласно рис. 1.30, б) существует в нуле, то при  $t = 0$  второй интеграл в полученном выражении (1.44) обращается в нуль,

так как  $\sin \omega t|_{t=0} = 0$ . А поскольку  $\cos \omega t|_{t=0} = 1$ , то в выражении (1.44) остается только первый интеграл:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot e^{j0} = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (1.45)$$

где  $F(\omega) = 1$ ;  $\psi(\omega) = 0$ .

Графики спектральной плотности амплитуд  $F(\omega)$  и спектра фаз  $\psi(\omega)$  дельта-функции при  $t = 0$  приведены на рис. 1.32, а и б соответственно.

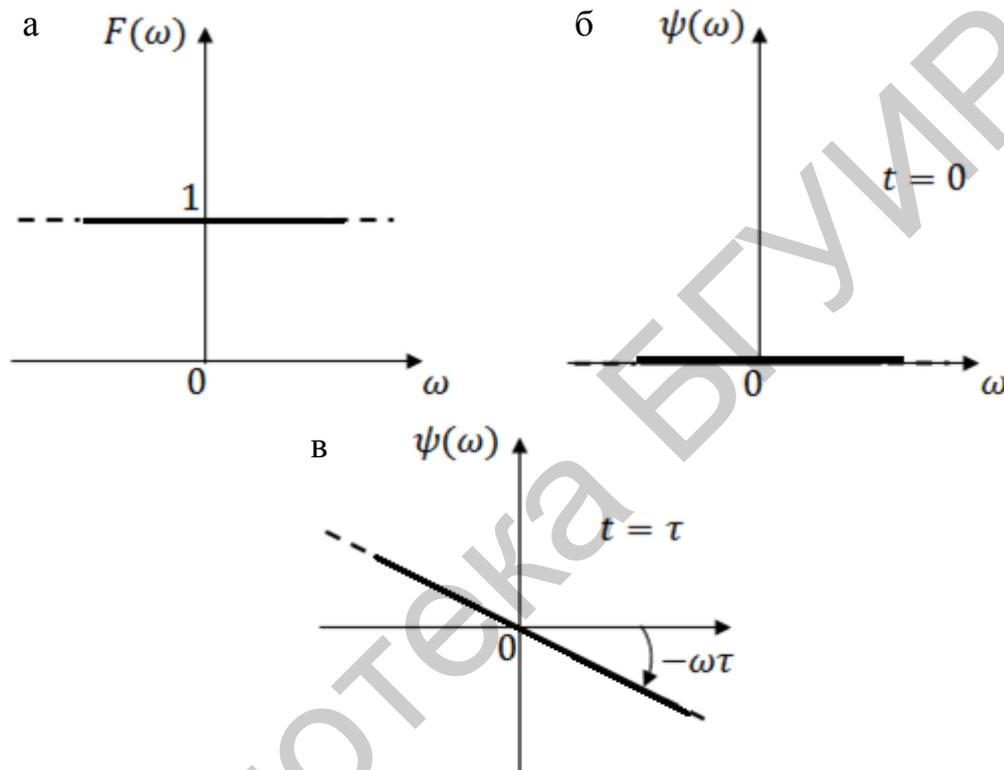


Рис. 1.32

Из рис. 1.32 видно, что спектральная плотность амплитуд (или АЧС)  $F(\omega)$  дельта-функции имеет бесконечно большую ширину и на всех частотах равна единице, а спектр фаз (или ФЧС)  $\psi(\omega)$  равен нулю. Изменение момента начала отсчета времени на АЧС дельта-функции не влияет, а влияет на ФЧС. Так, при смещении сигнала относительно начала координат вправо (см. рис. 1.30, в) на  $t = \tau$  ФЧС получает угол наклона  $\alpha$ , пропорциональный  $\text{arctg } \tau$  (рис. 1.32, в). Угол наклона ФЧС  $\alpha$  будет тем больше, чем больше  $\tau$ .

**П р и м е ч а н и е.** При условии, что спектром (АЧС) функции  $f(t) = \delta(t)$  является  $F(\omega) = 1$ , на основании дуальности преобразований Фурье спектром (АЧС) функции  $f(t) = 1$  (согласно лемме Римана – Лебеги) будет (рис. 1.33)

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega). \quad (1.46)$$

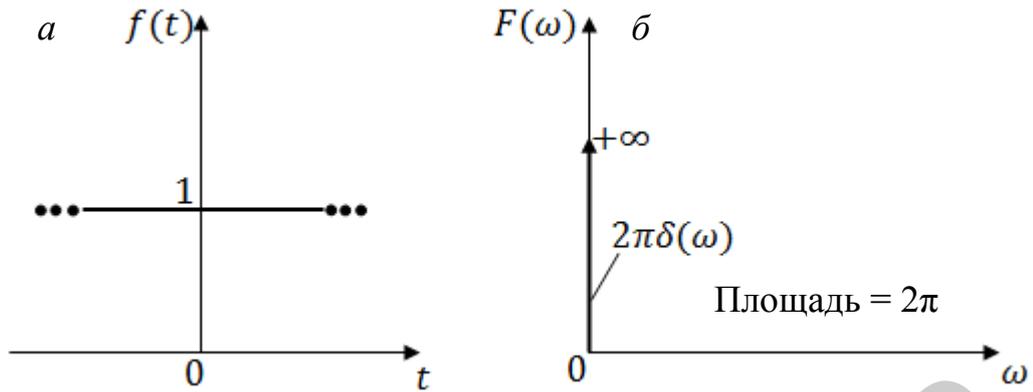


Рис. 1.33

#### 1.4.4. Спектры функции включения

В теории электрических цепей используется единичная функция воздействия  $1(t)$ , называемая также функцией Хевисайда (рис. 1.34, а). Аналитическая запись функции воздействия  $1(t)$  имеет следующий вид:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

При запаздывании во времени (рис. 1.35, б) на  $t_1$ :

$$1(t - t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_1; \\ 1, & t > t_1. \end{cases} \quad (1.48)$$

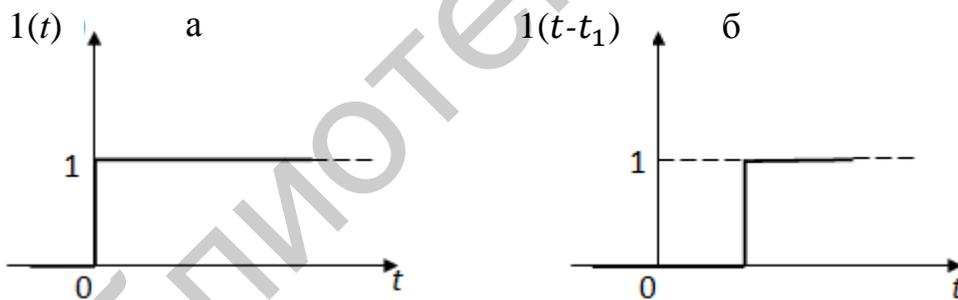


Рис. 1.34

При анализе переходных процессов в электрических цепях единичная функция воздействия  $1(t)$  соответствует, например, подключению постоянного напряжения на вход устройства при замыкании ключа. Если к цепи в момент времени  $t_1$  подключается напряжение  $u(t)$ , то это соответствует воздействию вида  $f(t) = u(t) \cdot 1(t - t_1)$ , т. е. единичная функция обладает важным формирующим свойством: при умножении непрерывной функции  $u(t)$  на единичную  $1(t - t_1)$  получается разрывная функция (рис. 1.35).

При умножении единичной функции на постоянное число  $A$  получается ступенчатая функция, называемая функцией включения (рис. 1.36):

$$f(t) = A \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ A, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.49)$$

$$f(t - t_1) = A \cdot 1(t - t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_1; \\ A, & t \geq t_1. \end{cases} \quad (1.50)$$

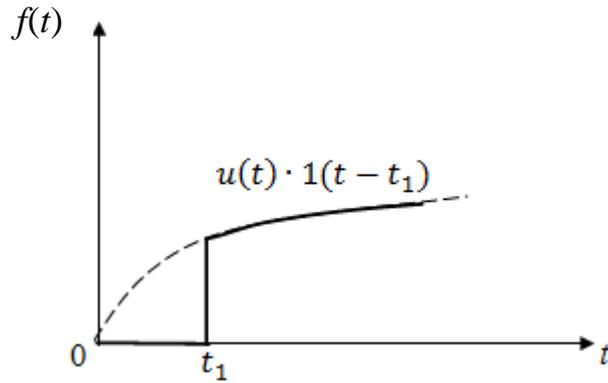


Рис. 1.35

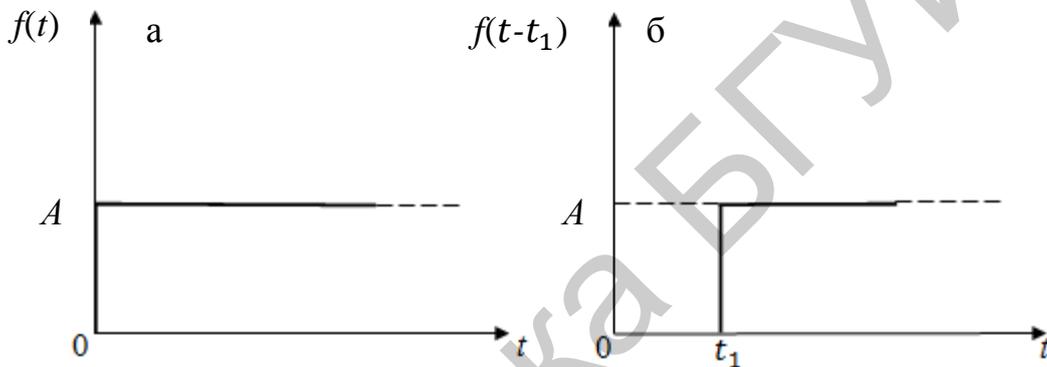


Рис. 1.36

Если принять  $A = 1$  (например,  $f(t) = i(t) = 1$  А или  $f(t) = u(t) = 1$  В), получим единичную ступенчатую функцию, которая не является абсолютно интегрируемой (ее площадь не имеет конечного значения). Поэтому непосредственно применить преобразование Фурье для нахождения спектральной плотности такой функции нельзя, поскольку интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  является расходящимся.

Для получения спектральной плотности функции включения (рис. 1.37, а) представим ее как сумму двух функций (рис. 1.37, б, в):

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Так как спектральная плотность  $F(\omega)$  функции  $f(t) = 1$  согласно лемме Римана – Лебеги равна  $2\pi\delta(\omega)$  (см. формулу (1.46) и рис. 1.33, б), то спектральная плотность функции  $f_1(t) = 1/2$  (см. рис. 1.37, б) равна

$$F_1(j\omega) = 1/2 \cdot 2\pi\delta(\omega) = \pi\delta(\omega). \quad (1.51)$$

Функцию  $f_2(t)$  (см. рис. 1.37, в) можно представить как предел убывающей экспоненциальной функции (см. рис. 1.9) при  $\tau \rightarrow \infty$ , т. е. в виде  $f_2(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Тогда, согласно уравнению (1.41),

$$F_2(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A}{1/\tau + j\omega} = \frac{A}{j\omega} = \frac{A}{\omega} \cdot e^{-\frac{j\pi}{2}} = F_2(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (1.52)$$

где  $F_2(j\omega) = A/\omega$ ;  $\psi(\omega) = -\pi/2$ .

Суммируя равенства (1.51) и (1.52), получим спектральную плотность функции включения:

$$F(j\omega) = A/j\omega + \pi\delta(\omega). \quad (1.53)$$

В этом уравнении первое слагаемое  $A/j\omega$  есть спектральная плотность переменной составляющей функции  $1(t)$ , а второе слагаемое  $\pi\delta(\omega)$  – спектральная плотность ее постоянной составляющей, равной  $1/2$ .

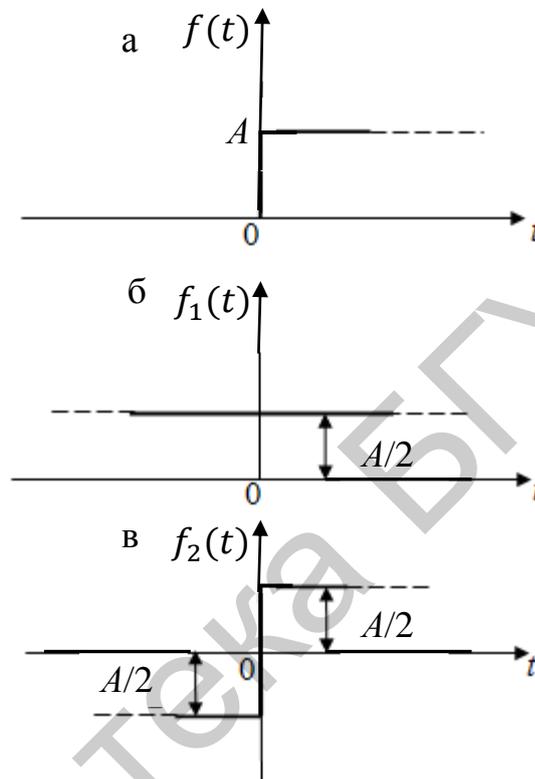


Рис. 1.37

Спектральные характеристики функции  $1(t)$ , согласно выражению

$$F(j\omega) = A/j\omega + \pi\delta(\omega) = F(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (1.54)$$

равны: АЧС  $F(\omega) = A/\omega + \pi\delta(\omega)$ ; ФЧС  $\psi(\omega) = -\pi/2$ . Они приведены на рис. 1.38, а и б соответственно.

Если начало отсчета времени не совпадает с моментом скачка функции включения (см. рис. 1.36, б), то согласно выражению

$$F(j\omega) = A/j\omega \cdot e^{-j\omega t_1} + \pi\delta(\omega) = F(\omega)e^{j\psi'(\omega)}, \quad (1.55)$$

равны: АЧС  $F(\omega) = A/\omega + \pi\delta(\omega)$ ; ФЧС  $\psi'(\omega) = -\pi/2 - \omega t_1$  (где  $t_1$  – время запаздывания функции включения), т. е. при  $t = t_1$  изменяется только ФЧС  $\psi'(\omega)$ , график которого приведен на рис. 1.38, в.

Таким образом, согласно выражениям (1.54) и (1.55), спектральная плотность амплитуд функции включения не зависит от выбора начала отсчета времени.

Спектр АЧС сосредоточен в области низких частот.

Спектр фаз рассматриваемой функции зависит от выбора начала отсчета времени. При  $t_1 \neq 0$  ФЧС, кроме постоянной составляющей, равной  $-\pi/2$ , содержит составляющую  $-\omega t_1$ , линейно изменяющуюся с изменением частоты и зависящую от времени запаздывания  $t_1$  функции включения.

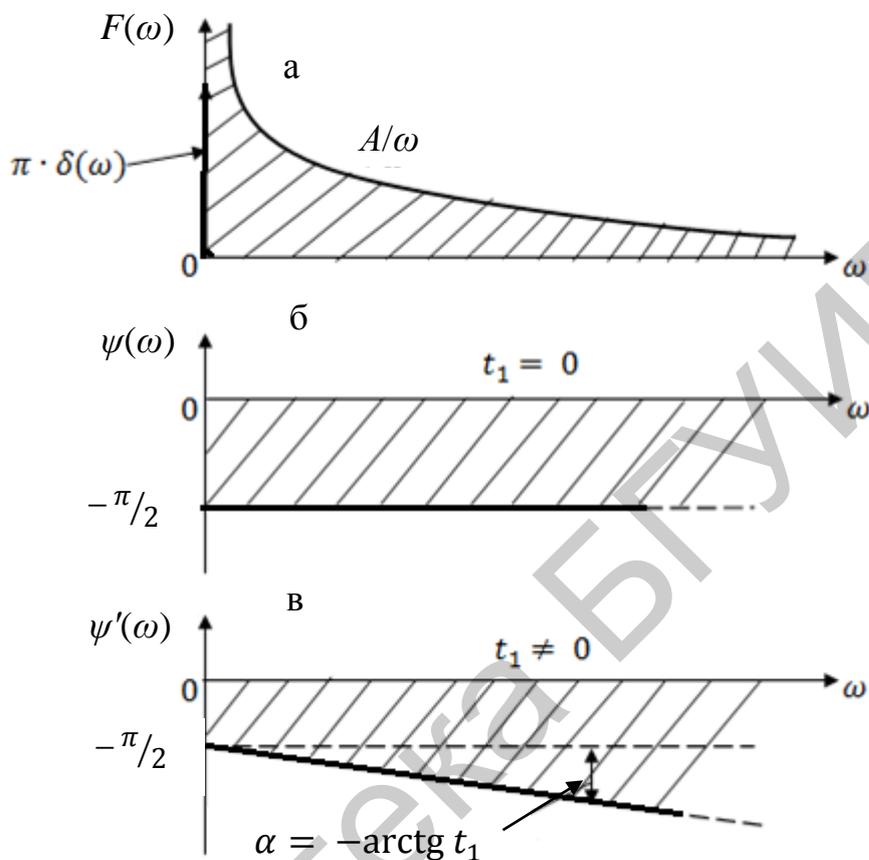


Рис. 1.38

#### 1.4.5. Спектры видеоимпульса прямоугольной формы

Аналитическая запись одиночного видеоимпульса прямоугольной формы (рис. 1.39, а) имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} E_m, & \forall t \in ]-\tau_n/2, \tau_n/2[; \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \quad (1.56)$$

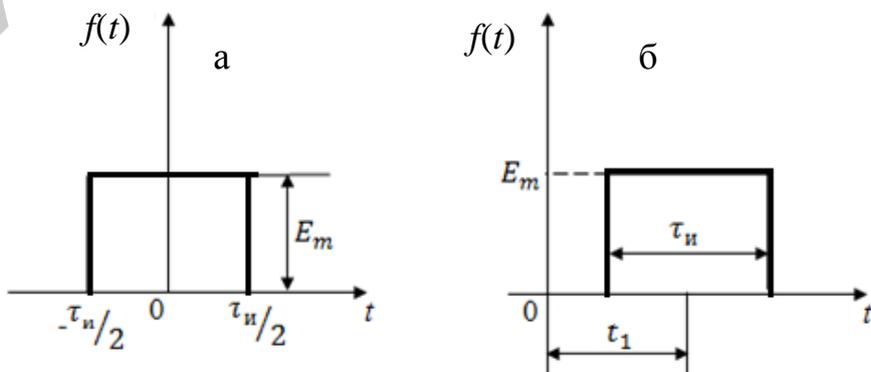


Рис. 1.39

Для получения спектральной плотности рассматриваемого импульса воспользуемся прямым преобразованием Фурье (1.15):

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} E_m e^{-j\omega t} dt = -\frac{E_m}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} = \\
 &= -\frac{E_m}{j\omega} \left( e^{-j\omega \tau_n/2} - e^{j\omega \tau_n/2} \right) = E_m \tau_n \frac{\sin(\omega \tau_n/2)}{\omega \tau_n/2} = \\
 &= E_m \tau_n \sin x/x, \tag{1.57}
 \end{aligned}$$

где АЧС  $F(\omega) = E_m \tau_n |\sin x/x|$ ;  $x = \omega \tau_n/2$ ; ФЧС  $\psi(\omega) = \arg \sin x/x$ .

Графики модуля спектральной плотности  $F(\omega)$  и спектра фаз  $\psi(\omega)$ , согласно выражению (1.57), приведены на рис. 1.40, а и б соответственно.

Из графиков на рис. 1.40 и уравнения (1.57) видно, что спектры одиночного видеоимпульса сплошные. Графики АЧС и ФЧС совпадают по форме с огибающими спектров периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы (см. рис. 1.25). Нули модуля спектральной плотности находятся на частотах  $\omega = n 2\pi/\tau_n$  или  $f = n 1/\tau_n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

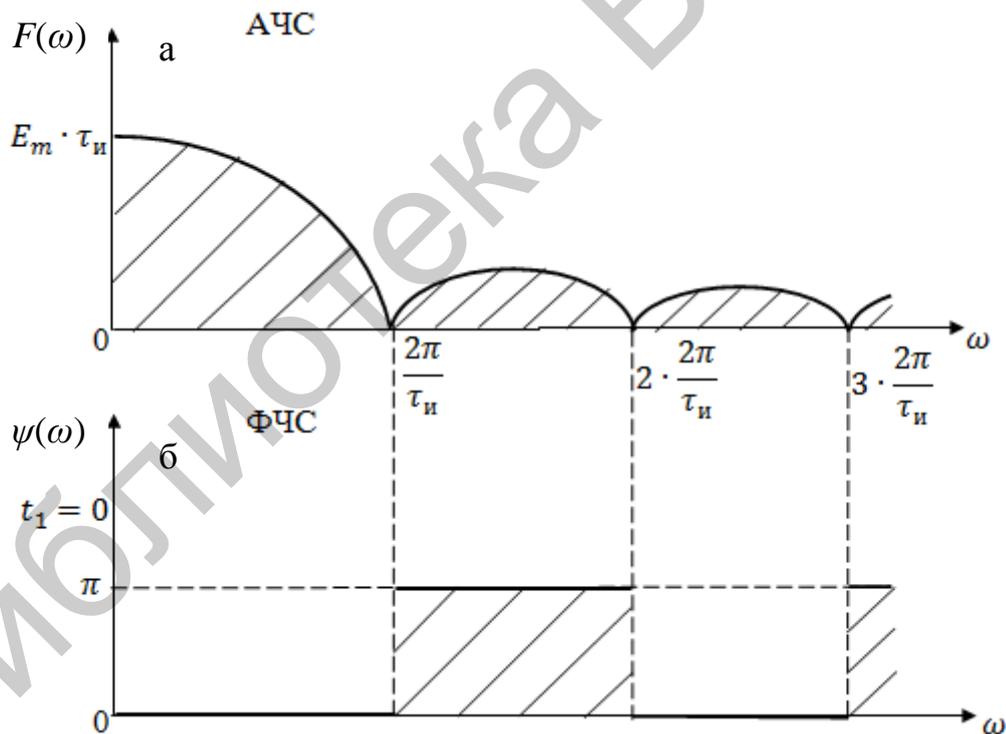


Рис. 1.40

С уменьшением длительности импульса его спектр расширяется, а значение модуля спектральной плотности уменьшается. Из этого можно сделать важный для практики вывод: при малой длительности  $\tau_n$  функция  $e^{-j\omega \tau_n/2}$  близка к единице. Это приводит к тому, что одиночные незнакомые импульсы произвольной формы имеют сплошной спектр, который может быть

приближенно выражен постоянной величиной, пропорциональной площади импульса.

Если же длительность импульса уменьшать, то спектр сужается и, когда  $\tau_n \rightarrow \infty$  (например, для постоянного тока), спектральная плотность вырождается в одну вертикальную линию на нулевой частоте, стремящуюся к бесконечности.

Если импульс задержан на время  $t_1$  относительно начала отсчета времени (рис. 1.39, б), то аналитическая запись такого импульса будет следующая:

$$f(x) = \begin{cases} E_m, & \forall t \in ]t_1 - \tau_n/2, t_1 + \tau_n/2[; \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases} \quad (1.58)$$

А спектральная плотность такого импульса, выраженная прямым преобразованием Фурье (1.15), будет равна

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1 - \tau_n/2}^{t_1 + \tau_n/2} E_m e^{-j\omega t} dt = -\frac{E_m}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} = \\ &= E_m \tau_n \frac{\sin(\omega \tau_n/2)}{\omega \tau_n/2} e^{-j\omega t_1} = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где

$$\text{АЧС} \quad F(\omega) = E_m \tau_n |\sin x/x|; \quad x = \omega \tau_n/2;$$

$$\text{ФЧС} \quad \psi(\omega) = -\omega t_1 + \begin{cases} 0 & \text{при } \sin x/x > 0; \\ \pi & \text{при } \sin x/x < 0. \end{cases} \quad (1.60)$$

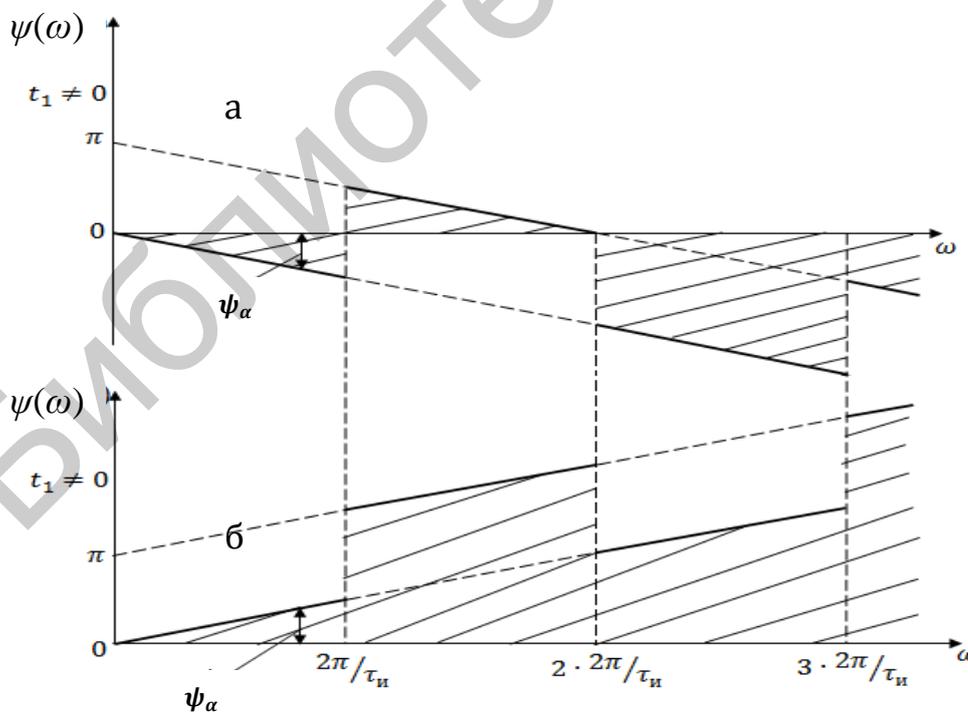


Рис. 1.41

График модуля спектральной плотности  $F(\omega)$  рассматриваемого импульса (см. рис. 1.39, б) такой же, как и у импульса, приведенного на рис. 1.39, а, т. е. (см. рис. 1.40, а) характер АЧС не связан со сдвигом импульса относительно начала координат, а существенно зависит от длительности импульса.

От сдвига импульса относительно начала координат зависит ФЧС (1.60). На рис. 1.41, а приведен ФЧС импульса, сдвинутого относительно начала координат вправо, а на рис. 1.41, б – влево. Из рис. 1.41 видно, что угол наклона ФЧС  $\alpha$  пропорционален времени сдвига импульса  $t_1$ .

#### 1.4.6. Спектры видеоимпульса колоколообразной формы

При выборе начала отсчета времени в середине колоколообразного (гаусова) импульса (рис. 1.5) его аналитическое выражение имеет вид

$$f(t) = E_m e^{-(\alpha t)^2}, \quad (1.61)$$

где  $\alpha$  – постоянная, определяющая ширину импульса.

Чем меньше  $\alpha$ , тем шире импульс (рис. 1.42, а). Длительность такого импульса теоретически бесконечно велика. На практике за длительность импульса  $\tau_n$  принимают время, в течение которого максимальное его значение  $E_m$  уменьшается в определенное заданное число ( $n$ ) раз (например, в  $\sqrt{2}$  раз или в 2 раза).

При  $t_1 = \tau_n/2$   $f(t_1) = E_m e^{-(\alpha t_1)^2} = \frac{E_m}{n}$ , откуда  $n = e^{(\alpha t_1)^2}$  или  $\ln n = (\alpha t_1)^2 = (\alpha \tau_n/2)^2$ .

Следовательно,

$$\alpha = 2\sqrt{\ln n}/\tau_n. \quad (1.62)$$

При  $n = \sqrt{2}$ ,  $\alpha \approx 1,2/\tau_n$ , при  $n = 2$ ,  $\alpha \approx 1,7/\tau_n$ .

Для расчетов выбирают  $n = 1,283$ , так как тогда

$$\alpha \approx 1/\tau_n. \quad (1.63)$$

При подстановке выражения (1.60) в прямое преобразование Фурье (1.15) получим спектральную плотность рассматриваемого импульса (рис. 1.42, б):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = E_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2 t^2 + j\omega t)} dt.$$

Для вычисления данного интеграла преобразуем показатель степени:  $\alpha^2 t^2 + j\omega t = \alpha^2 t^2 + j\omega t - (\omega/2\alpha)^2 + (\omega/2\alpha)^2 = (\alpha t + j\omega/2\alpha)^2 + (\omega/2\alpha)^2$ .

Обозначим  $\alpha t + j\omega/2\alpha = x$ , тогда  $\alpha dt = dx$  и  $dt = 1/\alpha dx$ .

При этом

$$F(j\omega) = E_m/\alpha \cdot e^{-(\omega/2\alpha)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  называется *интегралом Лапласа*. Он является табличным и равен  $\sqrt{\pi}$ . Тогда спектральная плотность

$$F(j\omega) = E_m \sqrt{\pi}/\alpha \cdot e^{-(\omega/2\alpha)^2} = F(\omega) \quad (1.64)$$

является вещественной величиной ввиду четности функции и так же, как и сам импульс, имеет колоколообразную форму (см. рис. 1.42, б). Спектр фаз рассматриваемого видеоимпульса при выбранном начале отсчета времени равен нулю.

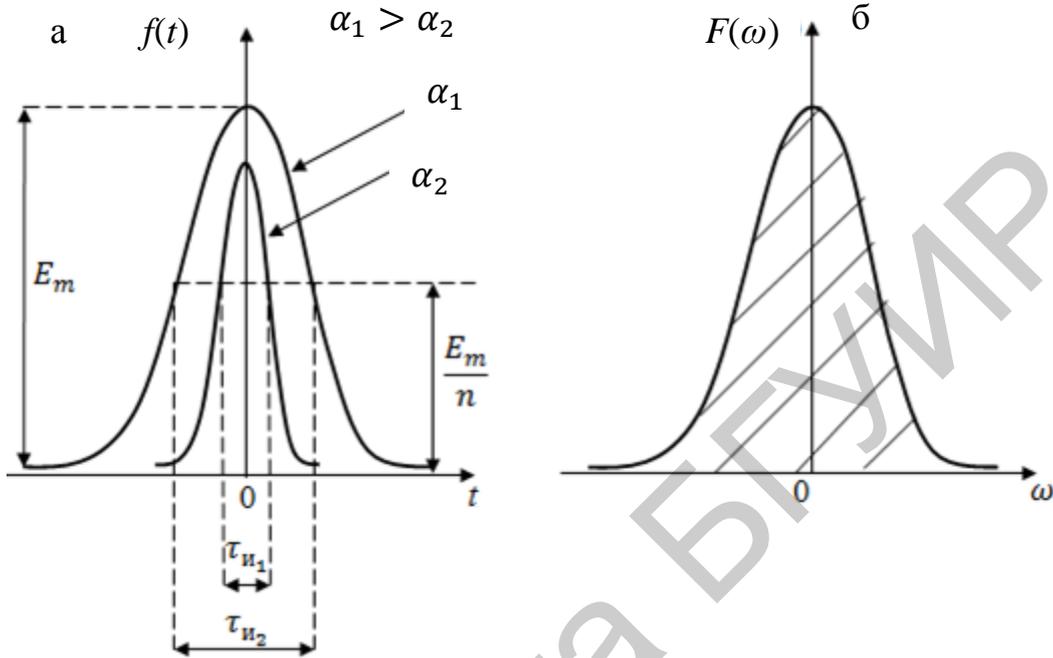


Рис. 1.42

Колоколообразный импульс широко используется в теории сигналов, поскольку импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: чтобы получить одну из этих функций по заданной другой, достаточно заменить  $t$  на  $\omega$  или наоборот.

#### 1.4.7. Спектры видеоимпульсов треугольной и косинусоидальной формы

Аналитическое выражение треугольного видеоимпульса (рис. 1.7) следующее:

$$f(t) = \begin{cases} E_m \left(1 + \frac{2t}{\tau_n}\right) & \text{при } -\tau_n/2 \leq t \leq 0; \\ E_m \left(1 - \frac{2t}{\tau_n}\right) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_n/2; \\ 0 & \text{при } t < -\tau_n/2; t > \tau_n/2. \end{cases} \quad (1.65)$$

Спектральная плотность  $F(\omega)$  такого импульса при подстановке выражения (1.65) в прямое преобразование Фурье (1.15) равна

$$F(\omega) = \frac{E_m \tau_n}{2} \frac{1 - \cos \omega(\tau_n/2)}{1/2 (\omega \tau_n/2)^2}. \quad (1.66)$$

График спектральной плотности (1.66) для треугольного видеоимпульса приведен на рис. 1.43, а.

Для косинусоидального видеоимпульса (рис. 1.8) аналитическое выражение имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} E_m \cos \pi t / \tau_{и} & \text{при } -\tau_{и}/2 \leq t \leq \tau_{и}/2; \\ 0 & \text{при } t < -\tau_{и}/2; t > \tau_{и}/2. \end{cases} \quad (1.67)$$

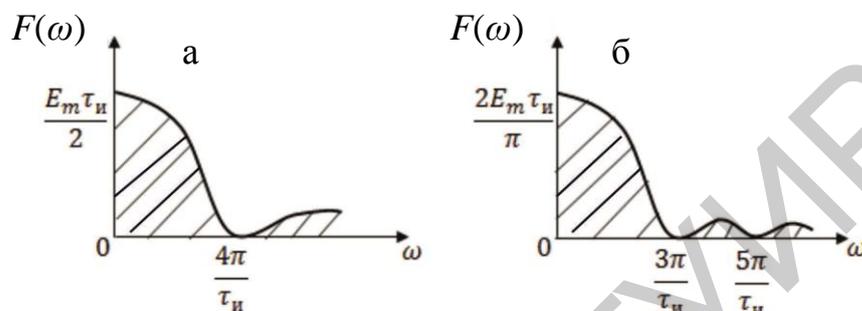


Рис. 1.43

Спектральная плотность  $F(\omega)$  такого импульса, полученная подстановкой выражения (1.67) в прямое преобразование Фурье (1.15), следующая:

$$F(\omega) = \frac{2E_m \tau_{и}}{\pi} \frac{\cos \omega(\tau_{и}/2)}{1 - (2/\pi \cdot \omega \cdot \tau_{и}/2)^2}. \quad (1.68)$$

График спектральной плотности (1.68) для косинусоидального видеоимпульса приведен на рис. 1.43, б.

В прил. 3 приведен расчет  $F(\omega)$  АЧС периодической последовательности видеоимпульсов косинусоидальной формы.

В табл. 1.1 даны значения произведения  $\Delta f \tau_{и}$  для рассмотренных в пп. 1.4.2, 1.4.5 – 1.4.7 непериодических сигналов.

Таблица 1.1

Значения  $\Delta f \tau_{и}$  для периодических сигналов

Импульс	$\Delta f \tau_{и}$
Экспоненциальный	0,73
Прямоугольный	0,46
Треугольный	0,43
Косинусоидальный	0,22
Колоколообразный	1,13

Из табл. 1.1 видно, что произведение  $\Delta f \tau_{и}$  оказывается наибольшим для прямоугольного и экспоненциального импульсов; меньше значения этого произведения у треугольного и косинусоидального импульсов; и, наконец, наименьшее значение  $\Delta f \tau_{и} = 0,22$  у колоколообразного импульса. Это означает, что по сравнению с импульсами другой формы колоколообразный импульс такой же длительности имеет наименьшую ширину спектра. Вот почему

прием и передача сигналов колоколообразной формы обладают большой помехоустойчивостью. Именно поэтому импульс колоколообразной формы имеет широкое применение в радиотехнике.

#### 1.4.8. Спектры пачки видеоимпульсов прямоугольной формы с колоколообразной огибающей

Пачка видеоимпульсов прямоугольной формы с колоколообразной огибающей (рис. 1.44, а) аналитически записывается в следующем виде:

$$f(t) = A_m(t)f_0(t), \quad (1.69)$$

где  $f_0(t)$  – периодическая последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы единичной амплитуды;  $A_m(t)$  – колоколообразная огибающая амплитуд.

Представим  $f_0(t)$  в виде ряда Фурье (см. п. 1.2.1) в комплексной форме:

$$f_0(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{F}_{mn} e^{jn\omega_1 t}. \quad (1.70)$$

Тогда

$$f(t) = A_m(t)f_0(t) = A_m(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \dot{F}_{mn} e^{jn\omega_1 t}. \quad (1.71)$$

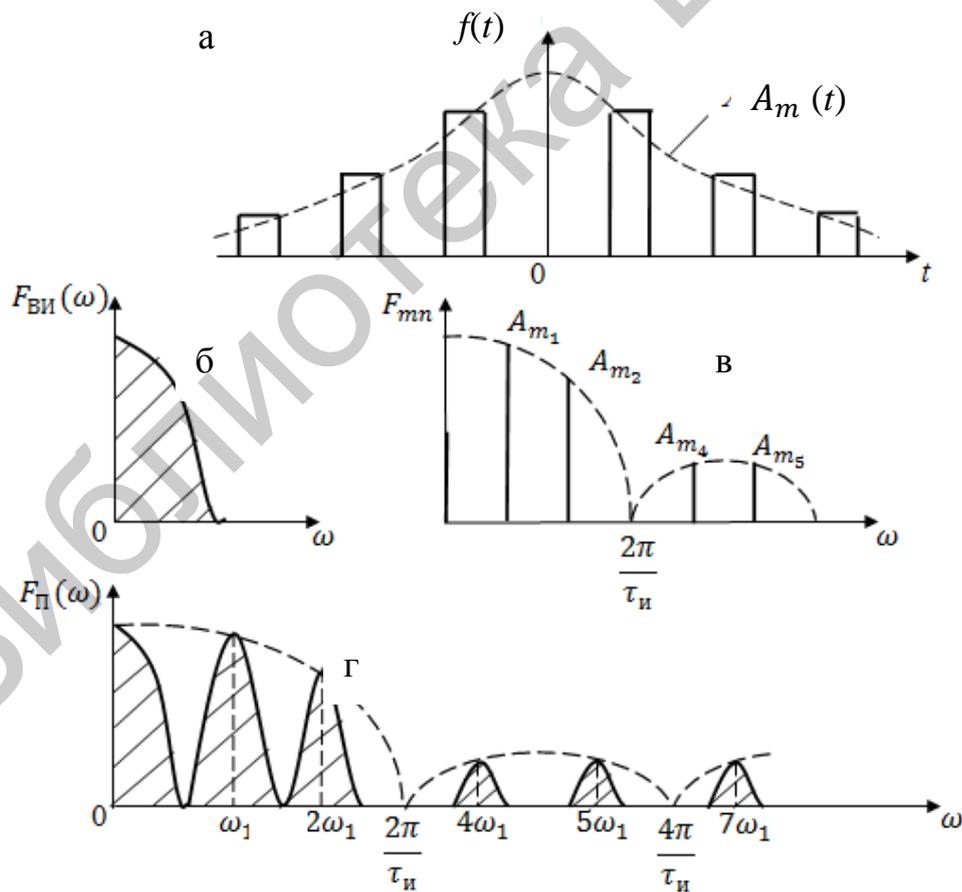


Рис. 1.44

Для получения спектральной плотности пачки видеоимпульсов воспользуемся прямым преобразованием Фурье (см. в п. 1.2.2 формулу (1.15)):

$$\begin{aligned}
 F_{\Pi}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ A_m(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_{mn} e^{jn\omega_1 t} \right] e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_{mn} F_{\text{ви}}(j(\omega - n\omega_1)), \tag{1.72}
 \end{aligned}$$

где  $F_{\text{ви}}(j(\omega - n\omega_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t)e^{jn(\omega - n\omega_1)t} dt$  – спектральная плотность огибающей пачки видеоимпульсов  $F_{\text{ви}}(j\omega)$ , смещенная вправо по оси частот  $\omega$  на величину  $n\omega_1$ .

Из выражения (1.72) видно, что спектральная плотность пачки видеоимпульсов  $F_{\Pi}(\omega)$  равна сумме спектральных плотностей, каждая из которых смещена по частоте на  $n\omega_1$ . Спектральная плотность  $F_{\Pi}(\omega)$  пропорциональна  $n$ -й комплексной амплитуде ряда Фурье  $\dot{F}_{mn}$  исходной периодической последовательности видеоимпульсов и имеет вид спектральной плотности огибающей.

На рис. 1.44, б изображен модуль спектральной плотности огибающей видеоимпульсов  $F_{\text{ви}}(\omega)$ ; на рис. 1.44, в – амплитудно-частотный спектр периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы со скважностью  $q = 3$ ; на рис. 1.44, г – модуль спектральной плотности пачки видеоимпульсов  $F_{\Pi}(\omega)$ .

#### 1.4.9. Спектры пачки видеоимпульсов произвольной формы

К числу широко применяемых на практике сигналов относится пачка (серия) импульсов. На рис. П.2.1 (прил. 2) пачка видеоимпульсов состоит из конечного числа периодически повторяющихся импульсов произвольной формы. Пусть начало отсчета времени проходит через середину импульса.

На основании теоремы линейности и теоремы о сдвиге (см. прил. 1) спектральная плотность рассматриваемой пачки импульсов

$$\begin{aligned}
 F_{\text{пачки}}(j\omega) &= F_1(j\omega) + F_2(j\omega) + \dots + F_n(j\omega) = \\
 &= F_1(j\omega)[1 + e^{-j\omega T} + \dots + e^{-j(n-1)\omega T}],
 \end{aligned}$$

где  $F_1(j\omega)$  – спектр первого импульса;  $n$  и  $T$  – число импульсов и период их следования в пачке.

В квадратных скобках этого выражения – геометрическая прогрессия, знаменатель которой  $g = e^{-j\omega T}$ . Известно, что сумма геометрической прогрессии определяется дробью  $\frac{a_1 - a_n g}{1 - g}$ , где  $a_1$  и  $a_n$  – первый и последний члены прогрессии.

Следовательно,

$$\frac{a_1 - a_n g}{1 - g} = \frac{1 - e^{-j(n-1)\omega T} e^{-j\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{1 - e^{-jn\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j(n-1)\omega \frac{T}{2}}.$$

Таким образом,

$$F_{\text{пачки}}(j\omega) = F_1(j\omega) \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j(n-1)\omega \frac{T}{2}},$$

а модуль спектральной плотности пачки импульсов

$$F_{\text{пачки}}(\omega) = F_1(\omega) \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|.$$

После нормирования по его значению  $F_{\text{пачки}}(0)$ , т. е. при  $\omega = 0$ , получаем модуль нормированной спектральной плотности:

$$F_{\text{пачки н}} = \frac{F_{\text{пачки}}(\omega)}{F_{\text{пачки}}(0)} = \frac{F_1(\omega)}{F_1(0)} \cdot \frac{1}{n} \left| \frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right| = F_{\text{н}}(\omega) G(\omega),$$

где  $F_{\text{н}}(\omega) = F_1(\omega)/F_1(0)$  – модуль нормированного АЧС импульса в пачке;  $G(\omega) = 1/n \cdot |\sin n\omega T/2 / \sin \omega T/2|$  — функция частоты, не зависящая от формы импульсов и определяемая лишь их числом и периодом следования.

Полученное выражение справедливо для пачек импульсов любой формы. С его помощью, зная спектр импульса в пачке и вид функции  $G(\omega)$ , можно построить спектр всей пачки импульсов. Построение производится путем перемножения двух функций  $F_{\text{н}}(\omega)$  и  $G(\omega)$ .

Особенностью функции  $G(\omega)$  является то, что ее числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль при  $\omega T/2$ , кратном  $\pi$ , т. е.  $\omega T/2 = k\pi$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Раскрывая получающуюся при этом неопределенность по правилу Лопиталю, находим, что в этих случаях  $G(\omega) = 1$ , так как

$$\lim_{\omega T/2 \rightarrow k\pi} \frac{1}{n} \left| \frac{\sin n\omega T/2}{\sin \omega T/2} \right| = \lim_{\omega T/2 \rightarrow k\pi} \left| \frac{\cos n\omega T/2}{\cos \omega T/2} \right| = 1.$$

В интервале частот от 0 до  $\omega = 2\pi/T = \Omega$  числитель дроби в  $G(\omega)$ , а следовательно, и функции  $G(\omega)$  принимает нулевое значение  $n - 1$  раз. Периодичность числителя функции  $G(\omega)$  в  $n$  раз выше, чем знаменателя. Графики функции  $G(\omega)$  имеют лепестковую структуру (рис. П.2.2 прил. 2). На рис. П.2.2, а  $n = 4$ , а на рис. П.2.2, б  $n = 5$ .

В общем случае графики спектра всей пачки импульсов состоят из больших и малых лепестков. Высота больших лепестков определяется максимальным значением  $G_{\text{max}} = 1$ , а высоты малых лепестков – локальными максимумами  $G_{\text{л.мах}}$  функции  $G(\omega)$ . Число локальных максимумов и их значения можно получить путем исследования функции  $G(\omega)$  или найти в таблице (см. табл. П.2.1 прил. 2). Большие лепестки вдвое шире малых. Ширина всех малых лепестков одинакова. Расстояние между серединами больших лепестков есть интервал повторения функции  $G(\omega)$ , равный частоте следования  $\Omega = 2\pi/T$  импульсов в пачке.

#### 1.4.10. Спектр пачки видеоимпульсов прямоугольной формы

На рис. П.2.3 прил. 2 изображена пачка прямоугольных видеоимпульсов с  $n = 5$  и  $q = T/\tau_{и} = 2$ .

Для прямоугольного видеоимпульса в соответствии с выражением (1.57)

$$F_n(\omega) = F_1(\omega)/F_1(0) = \left| \frac{\sin n\omega T/2}{\omega T/2} \right|.$$

График этой функции модулируется аричным синусом  $Sa(x) = \sin x/x$  (см. п. 1.3.2) и равен нулю на оси частот в точках, соответствующих частотам  $q\Omega = 2\Omega, 4\Omega, \dots$ , кратным скважности. Построенный спектр пачки видеоимпульсов приведен на рис. П.2.4 прил. 2. На нем в координатных осях построены функции  $F_n(\omega)$  и  $G(\omega)$ . Спектральная характеристика пачки получена путем графического перемножения этих функций.

В табл. П.2.2 прил. 2 приведены спектры пачки прямоугольных видеоимпульсов с различным числом  $n$ .

Анализ значений локальных максимумов (см. табл. П.2.1 прил. 2) и амплитудно-частотных спектров (см. табл. П.2.2 прил. 2) позволяет сделать вывод о связи спектров последовательности пачек и одиночных импульсов. С ростом числа импульсов  $n$  большие лепестки сужаются; высота малых лепестков уменьшается, а их число растет; спектр постепенно вырождается из сплошного в линейчатый и при  $n \rightarrow \infty$  превращается в дискретный. При уменьшении числа импульсов в пачке лепестки в арке огибающей амплитуд расширяются, и в пределе при  $n = 1$  спектр становится сплошным.

### 1.5. Спектры модулированных сигналов

Для передачи информации в радиотехнике используются радиоволны – высокочастотные (несущие) электромагнитные колебания, в которых передаваемая информация заложена тем или иным способом (например, с помощью модуляции).

*Модуляцией* называется изменение параметров несущего колебания по закону передаваемого сигнала.

В самом общем случае модулированный сигнал записывается в виде колебания:

$$f(t) = A_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0 t) = A_m(t) \cos(\theta(t)), \quad (1.73)$$

в котором амплитуда  $A_m$ , частота  $\omega_0$  и фаза  $\theta$  могут изменяться по закону передаваемого сообщения.

В зависимости от того, какой из параметров изменяется (амплитуда  $A_m$  или угол  $\theta$ ) различают два основных вида модуляции: амплитудную (АМ) и угловую.

Угловая модуляция, в свою очередь, подразделяется на частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ). Эти два вида модуляции (ЧМ и ФМ) тесно связаны между со-

бой; различие между ними проявляется лишь в характере изменения во времени угла  $\theta$  при одном и том же законе модуляции.

Для большинства используемых в радиотехнике сигналов характерно, что при модуляции параметры радиосигнала изменяются медленно и в пределах одного периода высокочастотного колебания его можно считать синусоидальным. Поэтому функции  $A_m(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  можно считать медленно изменяющимися функциями времени. Модуляция, как правило, не оказывает влияния на способность высокочастотных колебаний распространяться в пространстве.

Модулированные колебания в общем случае не являются периодическими и относятся к числу квазигармонических, почти периодических функций. Такие функции могут быть разложены в тригонометрический ряд и представлены как сумма гармонических составляющих, частоты которых в общем случае не являются кратными, а представляют комбинации частот и называются комбинационными. В отличие от такого ряда ряд Фурье содержит гармонические составляющие с кратными частотами.

В развитии теории модулированных колебаний большую роль сыграли работы Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, М. В. Шулейкина, В. И. Сифорова, И. С. Гоноровского и других ученых. В наиболее полном виде строгая математическая формулировка основных свойств модулированных колебаний и единых методов их исследования были впервые даны в 1940 г. в монографии С. М. Рытова «Модулированные колебания и волны».

### 1.5.1. Амплитудно-модулированные колебания

Амплитудная модуляция относится к числу простейших и получивших широкое применение благодаря своей простоте в осуществлении и исследовании.

При АМ передаваемая информация есть модулирующая функция или управляющий сигнал  $a(t)$  (рис. 1.45, а), который воздействует на амплитуду  $A_{m0}$  колебания несущей функции  $a_0(t) = A_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi_0)$  (рис. 1.45, б).

При этом огибающая амплитуд модулированного сигнала становится переменной величиной (рис. 1.45, в):  $A_m(t) = A_{m0} + k_A a(t)$ , где  $k_A$  – коэффициент пропорциональности. Тогда выражение для амплитудно-модулированного сигнала (рис. 1.45, г) записывается в следующем виде:

$$f(t) = A_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0) = (A_{m0} + k_A a(t)) \cos(\omega_0 t + \psi_0), \quad (1.74)$$

где  $A_m(t)$  – огибающая амплитуд, соответствующая закону изменения управляющего сигнала  $a(t)$ ;  $\omega_0, \psi_0$  – угловая частота и начальная фаза несущей функции  $a_0(t)$ .

Для соответствия огибающей амплитуд  $A_m(t)$  закону изменения управляющего сигнала  $a(t)$  необходимо, чтобы  $A_m(t)$  не имела отрицательных значений. Это можно осуществить путем выбора соответствующих значений  $k_A, A_m$  и  $A_{m0}$ .

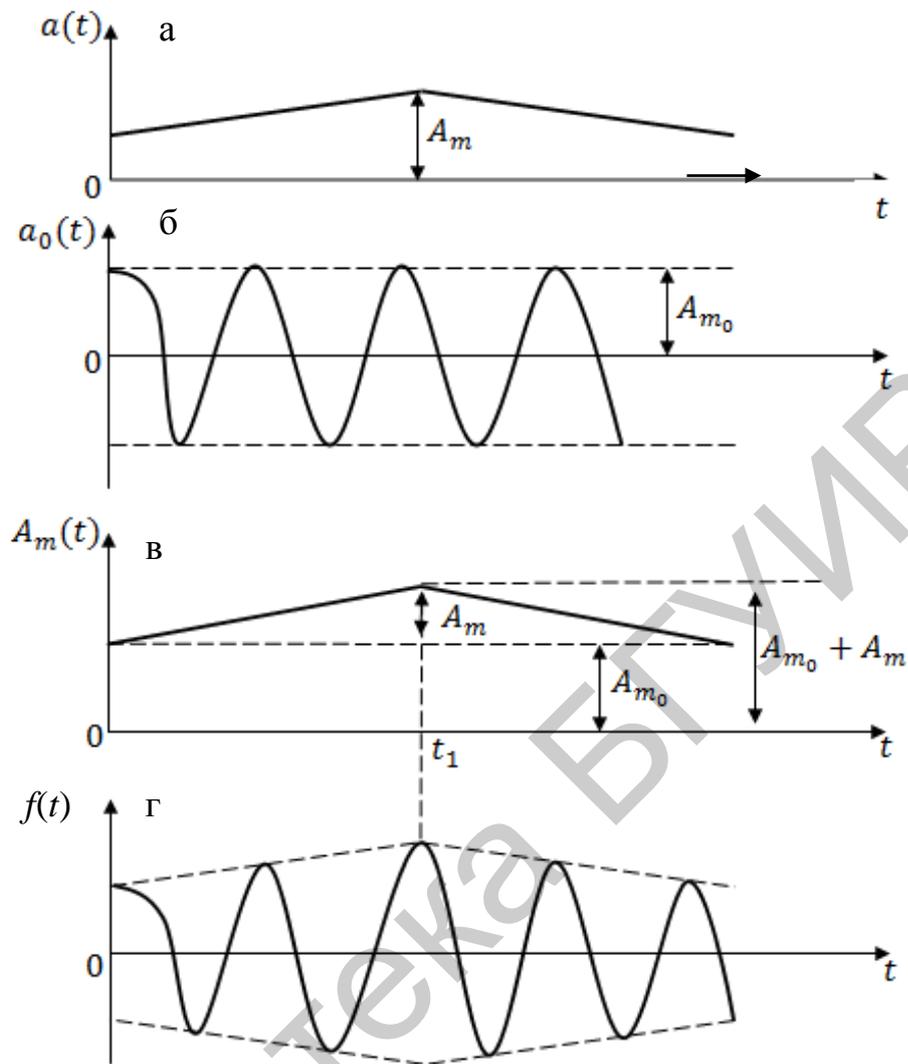


Рис. 1.45

На рис. 1.45, а  $a(t)$  – модулирующая функция или управляющий сигнал (передаваемая информация).

На рис. 1.45, б  $a_0(t)$  – несущая функция (высокочастотное заполнение).

На рис. 1.45, в  $A_m(t)$  – огибающая амплитуд.

На рис. 1.45, г  $f(t)$  – амплитудно-модулированные колебания.

### 1.5.2. Спектры сигналов с однотональной амплитудной модуляцией

Если модулирующая функция  $a(t)$  имеет гармонический характер и представляет собой гармоническое колебание с низкой частотой  $\Omega$  (рис. 1.46, а)

$$a(t) = A_m \cos(\Omega t + \theta),$$

то такой АМ-сигнал называют сигналом с однотональной амплитудной модуляцией, который представляет собой сложный сигнал, имеющий гармонические составляющие.

Эта особенность была установлена в 1913 г. Н. Н. Андреевым, а затем подробно исследована в работах М. В. Шулейкина в 1916 г.

Если несущая функция (рис. 1.46, б) имеет вид

$$a_0(t) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + \psi_0), \quad (1.75)$$

то огибающая амплитуд (рис. 1.46, в) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_m(t) &= A_{m_0} + k_A a(t) = \\ &= A_{m_0} + k_A A_m \cos(\Omega t + \theta) = A_{m_0} (1 + m \cos(\Omega t + \theta)), \end{aligned} \quad (1.76)$$

где  $m = \Delta A_m / A_{m_0}$  – коэффициент глубины модуляции (коэффициент модуляции);  $\Delta A_m = k_A A_m$  – изменение амплитуды огибающей.

С учетом уравнений (1.74) и (1.75) мгновенное значение однотонового АМ-колебания (рис. 1.46, г) имеет вид

$$f(t) = A_{m_0} (1 + m \cos(\Omega t + \theta)) \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.77)$$

Для того чтобы огибающая амплитуд  $A_m(t)$  была положительной величиной, необходимо, чтобы коэффициент модуляции  $m$  находился в пределах  $0 < m < 1$ , а  $A_{m_0} \geq A_m$ . Такую модуляцию называют неискаженной (см. рис. 1.46, г). При  $m > 1$  наступает перемодуляция (рис. 1.47).

Огибающая амплитуд  $A_m(t)$  при перемодуляции не соответствует управляющему сигналу  $a(t)$ , т. е. передаваемая информация искажается.

При неискаженной модуляции огибающая амплитуд АМ-колебания изменяется (см. рис. 1.46, в) в пределах от  $A_{m \min} = A_{m_0}(1 - m)$  до  $A_{m \max} = A_{m_0}(1 + m)$ .

При этом коэффициент глубины модуляции, равный отношению максимального приращения  $\Delta A_m$  амплитуды колебаний к ее среднему значению  $A_{m_0}$ , может быть найден так:

$$m = \Delta A_m / A_{m_0} = (A_{m \max} - A_{m_0}) / A_{m_0}.$$

Но из рис. 1.46, в видно, что  $A_{m_0} = (A_{m \max} + A_{m \min}) / 2$ . Тогда

$$m = \frac{A_{m \max} - \frac{A_{m \max} + A_{m \min}}{2}}{\frac{A_{m \max} + A_{m \min}}{2}} = \frac{A_{m \max} - A_{m \min}}{A_{m \max} + A_{m \min}}. \quad (1.78)$$

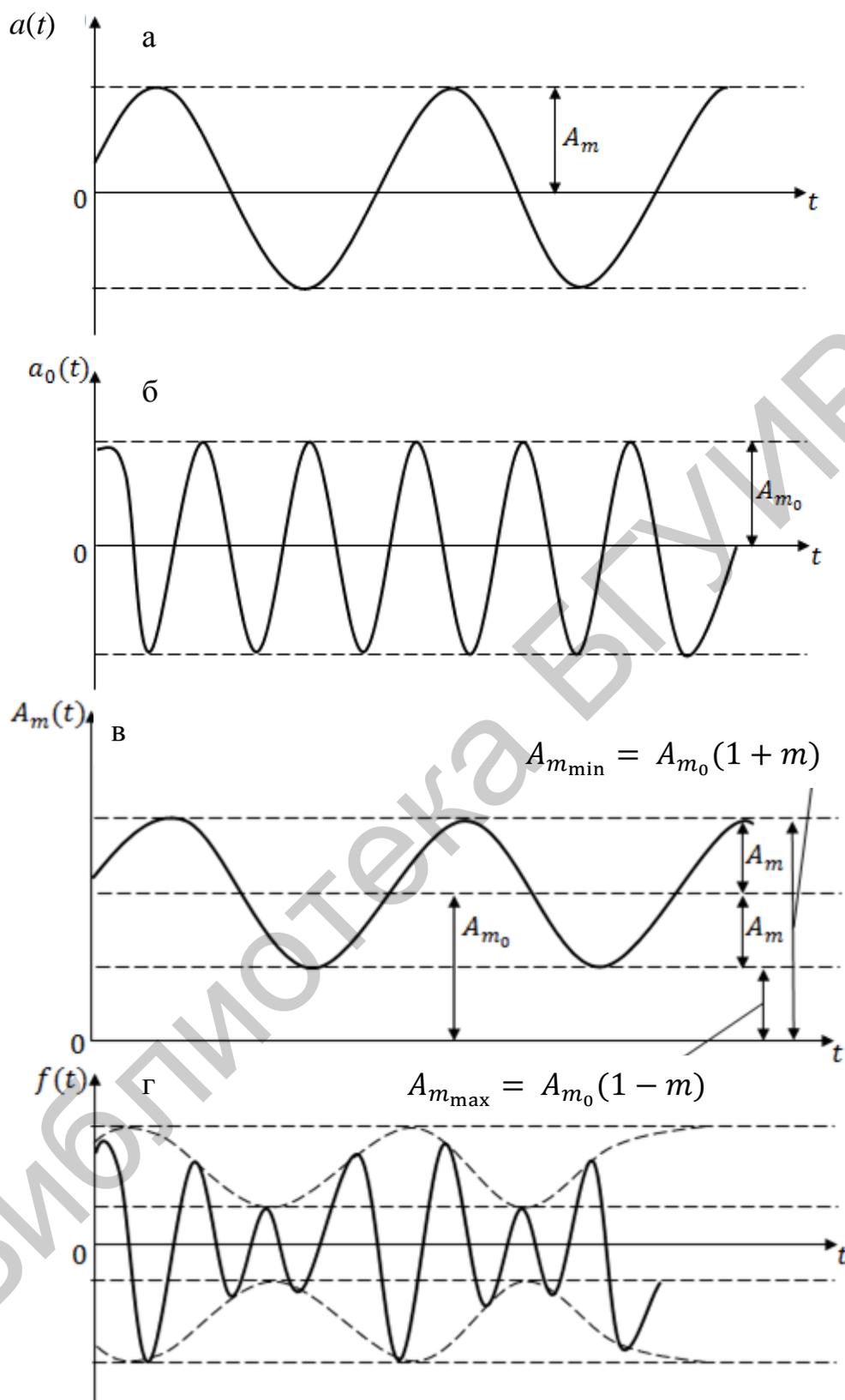


Рис. 1.46

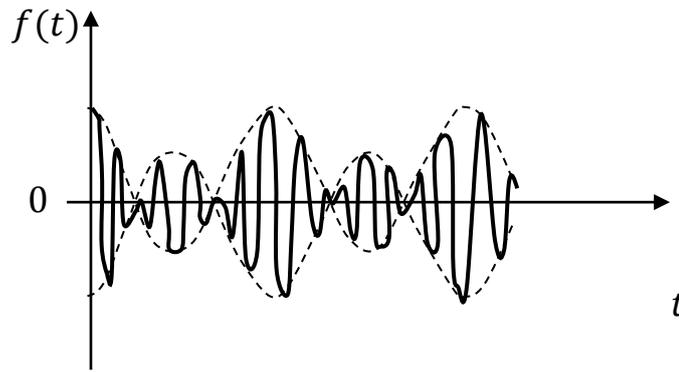


Рис. 1.47

Спектральное представление сигнала с однотоновой модуляцией можно получить путем тригонометрического преобразования уравнения (1.77):

$$f(t) = A_{m_0}(1 + m \cos(\Omega t + \theta)) \cos(\omega_0 t + \psi_0) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + \psi_0) + m A_{m_0} \cos(\Omega t + \theta) \cos(\omega_0 t + \psi_0),$$

но так как  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ , то

$$f(t) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + \psi_0) + \frac{m A_{m_0}}{2} \cos((\Omega + \omega_0)t + \psi_0 + \theta) + \frac{m A_{m_0}}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \psi_0 - \theta). \quad (1.79)$$

Из соотношения (1.79) следует, что АМ-сигнал с однотоновой модуляцией может быть представлен в виде суммы трех колебаний (рис. 1.48). Первое слагаемое представляет собой несущее колебание с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_{m_0}$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим и называются боковыми гармониками с верхней  $(\omega_0 + \Omega)$  и нижней  $(\omega_0 - \Omega)$  боковыми частотам. Амплитуды этих составляющих одинаковы  $(m A_{m_0}/2)$  и зависят от глубины модуляции, а их начальные фазы  $(\psi_0 \pm \theta)$  симметричны на оси абсцисс относительно фазы несущего колебания  $\psi_0$ . Чем меньше коэффициент  $m$ , тем меньше амплитуды боковых составляющих (при  $m = 0$  они отсутствуют).

Следовательно, АМ-колебание с однотоновой модуляцией имеет дискретный спектр (см. рис. 1.48), состоящий из трех спектральных линий. Ширина спектра равна  $2\Omega$ . Огибающая ФЧС линейна.

Для установления связи спектров АМ-сигнала со спектрами несущей функции и огибающей амплитуд построим по уравнению (1.75) спектры (АЧС и ФЧС) несущей функции (на рис. 1.49, а, б это спектральные линии  $A_{m_0}$  и  $\psi_0$  на частоте  $\omega_0$ ). А по уравнению (1.76) спектры (АЧС и ФЧС) огибающей амплитуд (на рис. 1.49, а, б – это спектральные линии  $m A_{m_0}$  и  $\theta$  на частоте  $\Omega$ ). Из сравнения построенных на рис. 1.49, а, б спектров со спектрами АМ-сигнала (рис. 1.49, г) видно, что спектры АМ-сигнала можно получить из спектров несущей функции и огибающей амплитуд следующим образом.

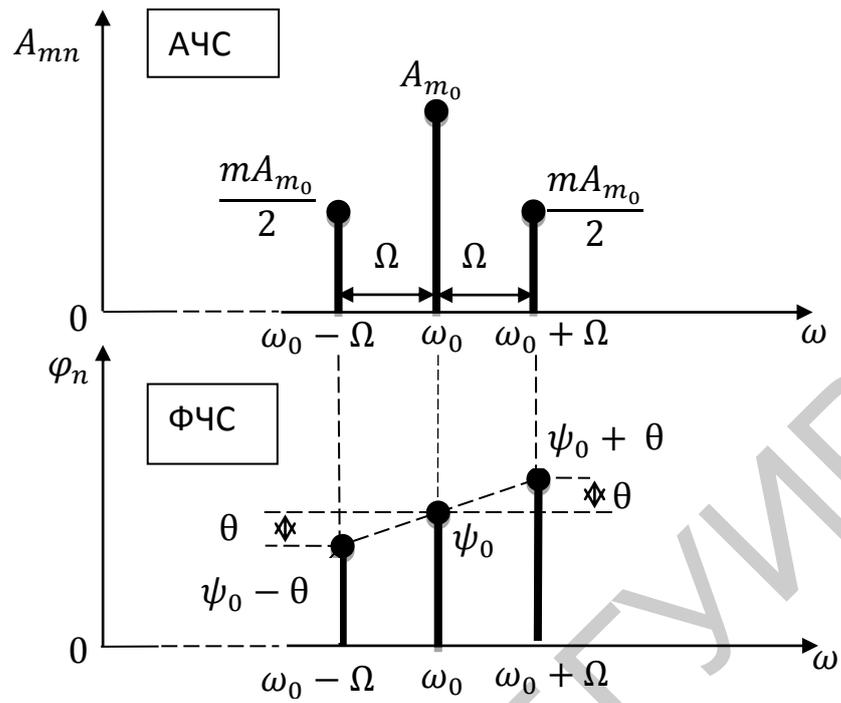


Рис. 1.48

Спектральные линии несущей функции  $A_{m_0}$  и  $\psi_0$  на частоте  $\omega_0$  без изменения по величине становятся центральными гармониками АЧС и ФЧС АМ-сигнала. Боковые гармоники АМ-сигнала получаются путем сдвига по оси частот на величину  $\omega_0$  спектральных линий огибающей амплитуд  $mA_{m_0}$  и  $\theta$ , причём боковые составляющие располагаются симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$  на расстоянии  $\pm\Omega$ , их амплитуды равны половине спектральной линии огибающей амплитуд, т. е.  $mA_{m_0}/2$ , а начальные фазы – равны  $\psi_0 \pm \theta$ .

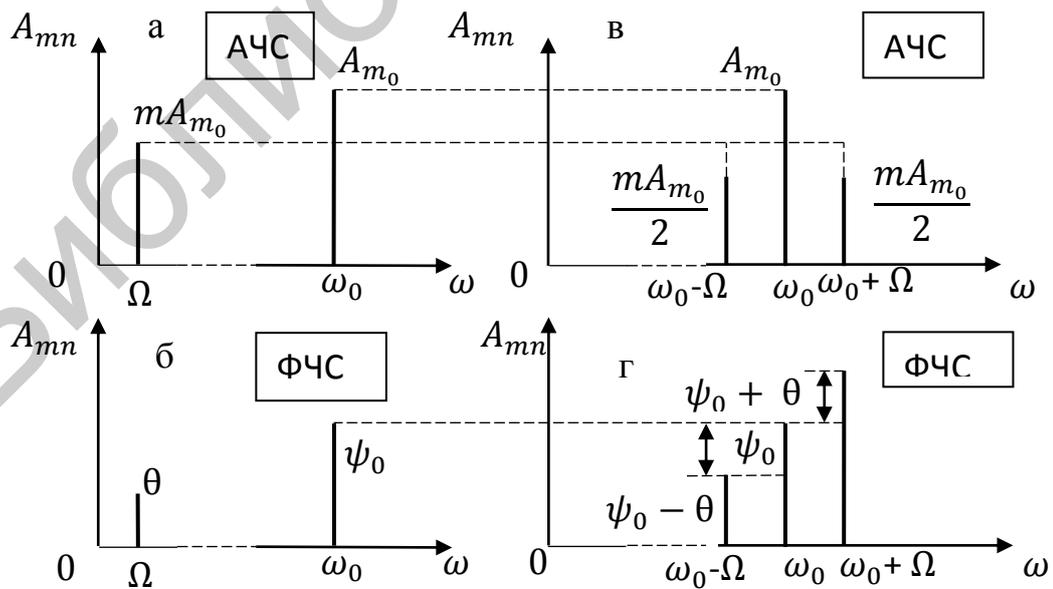


Рис. 1.49

Амплитудно-модулированному колебанию с однотоновой модуляцией, описываемому выражением (1.79), соответствует векторная диаграмма, изображенная на рис. 1.50. Это колебание представляется суммой трех векторов. Вектор колебания несущей частоты имеет длину  $A_{m_0}$  и вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ .

Векторы колебаний боковых частот имеют длину  $mA_{m_0}/2$  и вращаются один с угловой скоростью  $\omega_0 + \Omega$ , а другой – со скоростью  $\omega_0 - \Omega$ . Следовательно, эти векторы вращаются относительно вектора несущей частоты с угловой скоростью  $\Omega$  в противоположные стороны. Так как они в любой момент времени расположены симметрично относительно вектора колебания несущей частоты, то их сумма дает вектор, совпадающий по направлению с вектором несущей частоты. Поэтому результирующий вектор вращается с неизменной угловой скоростью  $\omega_0$ , а его длина периодически изменяется с частотой  $\Omega$  в пределах от  $A_{m_0}(1 - m)$  до  $A_{m_0}(1 + m)$ .

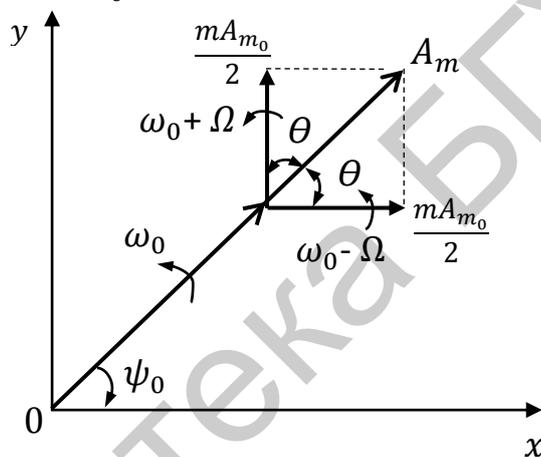


Рис. 1.50

### 1.5.3. Мощность амплитудно-модулированных сигналов

Активная мощность немодулированных периодических сигналов равна сумме мощностей гармонических составляющих (см. формулу (1.25)). Для амплитудно-модулированных сигналов средняя за период высокочастотная мощность, выделяющаяся на активном сопротивлении в 1 Ом, определяется при условии  $\omega_0 \gg \Omega$  следующим образом:  $P(t) = A^2(t)/2$ , где  $A(t)$  – амплитуда напряжения или тока.

Различают следующие характерные значения мощности АМ-сигнала:

- мощность режима молчания (при отсутствии модуляции):  $P_0 = \frac{A^2 m_0}{2}$
- мощность в «максимуме»:  

$$P_{\max} = A^2_{m_{\max}}/2 = A^2_{m_0}(1 + m)^2/2;$$
- мощность в «минимуме»:  

$$P_{\min} = A^2_{m_{\min}}/2 = A^2_{m_0}(1 - m)^2/2.$$

Средняя за период модуляции мощность АМ-сигнала определяется соотношением:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t)/2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2_{m_0} (1 + m \cos(\Omega t + \theta))^2 / 2 dt = \\ = k A^2_{m_0} / 2 (1 + m^2 / 2) = P_0 (1 + m^2 / 2), \quad (1.80)$$

где  $k - R$  или  $G$ ;  $A - I$  или  $U$ ;  $P_0$  – мощность немодулированного сигнала.

Из полученного соотношения видно, что мощность АМ-сигнала равна сумме мощностей колебания с несущей частотой и колебаний с боковыми частотами и зависит от глубины модуляции. Так, при  $m = 0$   $P_{\text{cp}} = P_0$ , а при  $m = 1$

$$P_{\text{cp}} = P_0 (1 + 1/2) = 1,5 P_0,$$

т. е. мощность однотонового АМ-сигнала в полтора раза превосходит мощность немодулированного сигнала и на передачу полезной информации тратится только третья часть мощности передатчика. В этом существенный недостаток АМ-сигналов. Поэтому на практике применяется передача информации без несущей частоты или только с одной боковой спектральной составляющей.

**Пример 1.2.** Записать уравнение тока однотоново модулированного по амплитуде сигнала, если несущая частота  $f_0 = 400$  Гц, частота управляющего  $\Omega/2\pi = 800$  Гц, коэффициент модуляции  $m = 0,4$ , амплитуда тока несущей частоты  $I_{m_0} = 0,3$  А. Вычислить также мощность несущей волны  $P_0$ , мощность в максимальном и минимальном режиме и среднюю за период мощность.

**Решение.** Согласно выражению (1.76), где  $m = \Delta A_m / A_{m_0}$ ,  $\Delta I_m = m I_{m_0} = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$  А. По уравнению (1.77), принимая равными нулю начальные фазы ( $\psi_0 = 0$  и  $\theta = 0$ ), получим

$$i(t) = (0,3 + 0,12 \cos 2\pi 8 \cdot 10^2 t) \cos 2\pi 4 \cdot 10^5 t \text{ А.}$$

Согласно п. 1.5.3:

а) мощность несущей волны  $P_0 = A^2_{m_0} / 2$  или

$$P_0 = I^2_{m_0} / 2 = 0,3^2 / 2 = 0,045 \text{ Вт};$$

б) мощность в «максимуме»

$$P_{\text{max}} = A^2_{m_{\text{max}}} / 2 = I^2_{m_0} (1 + m)^2 / 2 = 0,045 (1 + 0,4)^2 = 0,088 \text{ Вт};$$

в) мощность в «минимуме»

$$P_{\text{min}} = A^2_{m_{\text{min}}} / 2 = I^2_{m_0} (1 - m)^2 / 2 = 0,045 (1 - 0,4)^2 = 0,016 \text{ Вт};$$

г) средняя мощность за период модуляции  $T$

$$P_{\text{cp}} = P_0 (1 + m^2 / 2) = 0,045 (1 + 0,5 \cdot 0,4^2) = 0,049 \text{ Вт}.$$

Наибольшее значение  $P_{\text{cp}}$  получается при стопроцентной модуляции (при  $m = 1$ ). При этом  $P_{\text{cp}} = 1,5 P_0 = 1,5 \cdot 0,045 = 0,0675$  Вт, а  $P_{\text{max}} = 4 P_0 = 4 \cdot 0,045 = 0,18$  Вт.

#### 1.5.4. Спектры сигналов с многотональной амплитудной модуляцией

При многотональной амплитудной модуляции управляющий сигнал (модулирующую функцию) можно представить в виде суммы гармоник:

$$a(t) = \sum_{k=1}^n A_{mk} \cos(k\Omega t + \theta_k), \quad (1.81)$$

а огибающая амплитуда тогда записывается так:

$$A_m(t) = A_{m_0} (1 + \sum_{k=1}^n m_k \cos(k\Omega t + \theta_k)), \quad (1.82)$$

где  $m_k = \Delta A_{mk} / A_{m_0}$  – коэффициент модуляции  $k$ -й гармоники управляющего сигнала.

При этом выражение для АМ-сигнала с многотональной модуляцией имеет следующий вид:

$$f(t) = A_{m_0} [1 + \sum_{k=1}^n m_k \cos(k\Omega t + \theta_k)] \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.83)$$

После тригонометрических преобразований, аналогичных тем, какие были сделаны для однотонового АМ-сигнала в п. 1.5.2, выражение для АМ-сигнала с многотональной модуляцией (1.83) примет вид

$$f(t) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + \psi_0) + \sum_{k=1}^n m_k A_{m_0} / 2 \cdot \cos((\omega_0 + k\Omega)t + \psi_0 + \theta_k) + \\ + \sum_{k=1}^n m_k A_{m_0} / 2 \cdot \cos((\omega_0 - k\Omega)t + \psi_0 - \theta_k). \quad (1.84)$$

Из выражения (1.84) видно, что каждая гармоническая составляющая модулирующего сигнала (1.81) дает пару боковых частот.

В результате получается спектр, состоящий из колебания с несущей частотой  $\omega_0$  и двух полос частот с верхними  $(\omega_0 + k\Omega)$  и нижними  $(\omega_0 - k\Omega)$  боковыми частотами, расположенных симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$ . Эти полосы частот, расположенные по обе стороны от несущей, называют верхней и нижней боковыми полосами спектра (рис. 1.51).

Из рис. 1.51 видно, что верхняя боковая полоса воспроизводит спектр модулирующей функции, а нижняя представляет собой зеркальное отображение верхней относительно несущей частоты  $\omega_0$ . Таким образом, в процессе амплитудной модуляции осуществляется транспозиция (перенос) спектра модулирующей функции по оси частот на величину  $\omega_0$ .

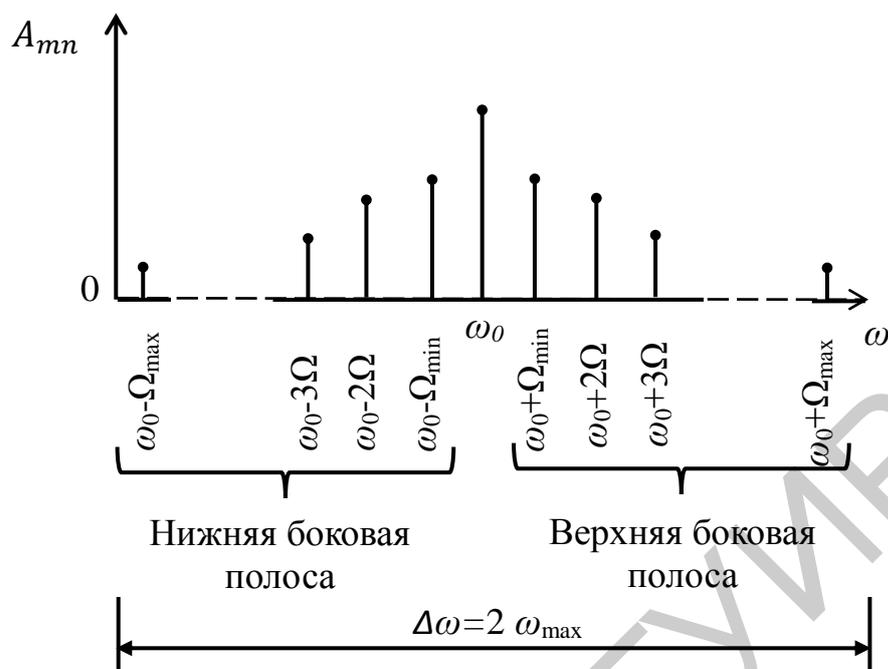


Рис. 1.51

Как и в случае относительного АМ-сигнала, спектр многотонального АМ-сигнала можно получить из спектров несущей функции и огибающей амплитуд. При этом спектр составляющей с частотой  $\omega_0$  будет таким же, как и спектр несущей функции, а остальные составляющие спектра будут представлять собой гармоники спектра огибающей амплитуд, расположенные симметрично относительно  $\omega_0$ . Их амплитуды вдвое меньше амплитуд гармоник спектра огибающей, а начальные фазы отличаются от начальной фазы  $\psi_0$  на  $\pm\theta_k$ .

Если полоса частот модулирующего сигнала ограничена сверху максимальной частотой  $\Omega_{\max}$ , то соответствующий ему АМ-сигнал будет иметь спектр, ширина которого вдвое больше:  $\Delta\omega = 2\Omega_{\max}$  ( $\Delta F = 2F_{\max}$ ). Для телевизионных сигналов, например, при  $F_{\max} = 5$  МГц  $\Delta F_{\max} = 10$  МГц. Диапазоны частот различных сигналов приведены в табл. 1.2. При одновременной работе в определенном диапазоне частот нескольких радиопередаточных станций во избежание помех при приеме сигнала за счет перекрытия необходимо, чтобы несущие частоты ближайших (по шкале частот) станций были разнесены одна от другой не менее чем на  $\Delta F = 2F_{\max}$ .

Довольно широкий диапазон частот, занимаемый АМ-сигналами, является недостатком такого вида модуляции.

К числу недостатков амплитудной модуляции следует отнести также плохую помехозащищенность и низкую экономичность радиопередатчиков АМ-сигналов.

Таблица 1.2

Диапазоны частот сигналов

Сигнал	Диапазон частот
Телеграфный	50–1000 Гц
Радиовещательный	0,2–10 кГц
Телевизионный (канал изображения)	5–10 МГц
Радиолокационный	0,01–100 МГц

Указанные недостатки устраняются или в значительной мере снижаются при других видах модуляции, в частности при угловой модуляции.

**Пример 1.3.** По радио передается сигнал, содержащий колебания трех тонов:  $F_1 = 500$  Гц,  $F_2 = 2$  кГц и  $F_3 = 5$  кГц. Их амплитуды относятся соответственно как 3:2:1. Передача производится при амплитудной модуляции. Колебания с несущей частотой  $f_0 = 500$  кГц имеют амплитуду  $I_0 = 10$  А. Рассчитать амплитудно-частотный спектр АМ колебаний при максимально допустимой глубине модуляции.

**Решение.** Частоты колебаний, входящих в состав спектра, следующие:

$$f_0 = 500 \text{ кГц}; \quad f_{1,2} = (500 \pm 0,5) \text{ кГц}; \\ f_{3,4} = (500 \pm 2) \text{ кГц}; \quad f_{5,6} = (500 \pm 5) \text{ кГц}.$$

Максимально допустимая глубина модуляции означает, что ток в некоторые моменты времени будет уменьшаться до нуля. Следовательно, если коэффициенты модуляции для трех тонов обозначить соответственно  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , то  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ . При этом, согласно условию, отношение этих коэффициентов должно быть 3:2:1. Тогда

$$m_1 = \frac{3}{3+2+1} = 0,5; \quad m_2 = \frac{2}{3+2+1} = 0,33; \quad m_3 = \frac{1}{3+2+1} = 0,17; \\ I_{m_{1,2}} = I_0 m_1/2 = 2,5 \text{ А}; \quad I_{m_{3,4}} = I_0 m_2/2 = 1,65 \text{ А}; \quad I_{m_{5,6}} = I_0 m_3/2 = 0,85 \text{ А}.$$

**Пример 1.4.** Модулирующий сигнал имеет вид  $a(t) = 8 \cos 400\pi t + 4 \cos 800\pi t + 3 \cos 1200\pi t$ . Записать выражение сигнала, многотонально модулированного по амплитуде, если несущая частота  $f_0 = 200$  кГц, амплитуда немодулированного колебания  $A_{m_0} = 10$  А, коэффициент модуляции  $m = 0,4$ . Начальную фазу колебаний несущей частоты принять равной нулю.

**Решение.** Согласно соотношению (1.82)  $\Delta A_{m_1} = 0,4 \cdot 83,2 \text{ А}; \quad \Delta A_{m_2} = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ А}; \quad \Delta A_{m_3} = 0,4 \cdot 3 = 1,2 \text{ А}.$

Тогда соотношение (1.83) примет вид

$$f(t) = (10 + 3,2 \cos 400\pi t + 1,6 \cos 800\pi t + 1,2 \cos 1200\pi t) \cdot \cos 4 \cdot 10^5 \pi t.$$

Коэффициенты амплитудной модуляции для каждой гармонической составляющей управляющего модулирующего сигнала определяется по формуле

$$m_k = \Delta A_{m_k} / A_{m_0}: \quad m_1 = 3,2/10 = 0,32; \quad m_2 = 1,6/10 = 0,16; \quad m_3 = \\ = 1,2/10 = 0,12.$$

Так как  $m_1 + m_2 + m_3 = 0,6 < 1$ , то явления перемодуляции не возникнет.

## 1.6. Спектры радиосигналов

### 1.6.1. Связь между спектрами видеосигналов и радиосигналов

Для установления связи между спектром АМ-радиосигнала  $F_{PC}(j\omega)$  и спектром его огибающей (если огибающая (или видеосигнал) является функцией времени  $F_{BC}(j\omega)$ ) подставим выражение для АМ-сигнала  $f(t) = A_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0)$  в прямое преобразование Фурье (1.15):

$$F_{PC}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Используя соотношение  $\cos \alpha = \frac{(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})}{2}$ , где  $\alpha = \omega_0 t + \psi_0$ , получим

$$\begin{aligned} F_{PC}(j\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \psi_0)} \cdot e^{-j\omega t} dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t) \cdot e^{-j(\omega_0 t + \psi_0)} \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \end{aligned}$$

  
 спектр видеосигнала  $F_{BC}(j\omega)$ , смещенный  
вправо на  $+\omega_0$

$$+ \frac{1}{2} e^{-j\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt. \quad (1.85)$$

  
 спектр видеосигнала  $F_{BC}(j\omega)$ , смещенный влево на  $-\omega_0$

Первый интеграл в формуле (1.85) является спектром огибающей видеосигнала, смещенным по оси частот вправо на  $+\omega_0$ . Второй интеграл является спектром огибающей, смещенным по оси частот влево на  $-\omega_0$ . Обозначив эти спектры соответственно  $F_{BC}(\omega - \omega_0)$  и  $F_{BC}(\omega + \omega_0)$ , получим

$$F_{PC}(j\omega) = 1/2 e^{j\psi_0} F_{BC}[j(\omega - \omega_0)] + 1/2 e^{-j\psi_0} F_{BC}[j(\omega + \omega_0)]. \quad (1.86)$$

Это равенство устанавливает связь между спектром АМ-радиосигнала и спектром его огибающей (видеосигнала). На рис. 1.52 приведен пример амплитудно-частотных спектров АМ-радиосигнала и его огибающей, имеющий колоколообразную форму.

Ширина спектра видеосигнала, как правило, меньше несущей частоты  $\omega_0$ . При этом слагаемые равенства (1.86) практически не перекрываются по частоте, т. е. в области положительных частот спектр радиосигнала:

$$F_{PC}(j\omega) \approx 1/2 e^{j\psi_0} F_{BC}[j(\omega - \omega_0)], \text{ откуда} \\ F_{PC}(\omega) \approx 1/2 |F_{BC}(j(\omega - \omega_0))|, \quad (1.87)$$

а в области отрицательных частот  $F_{PC}(j\omega) \approx 1/2 e^{-j\psi_0} F_{BC}[j(\omega + \omega_0)]$ , откуда

$$F_{PC}(\omega) \approx 1/2 |F_{BC}(j(\omega + \omega_0))|. \quad (1.88)$$

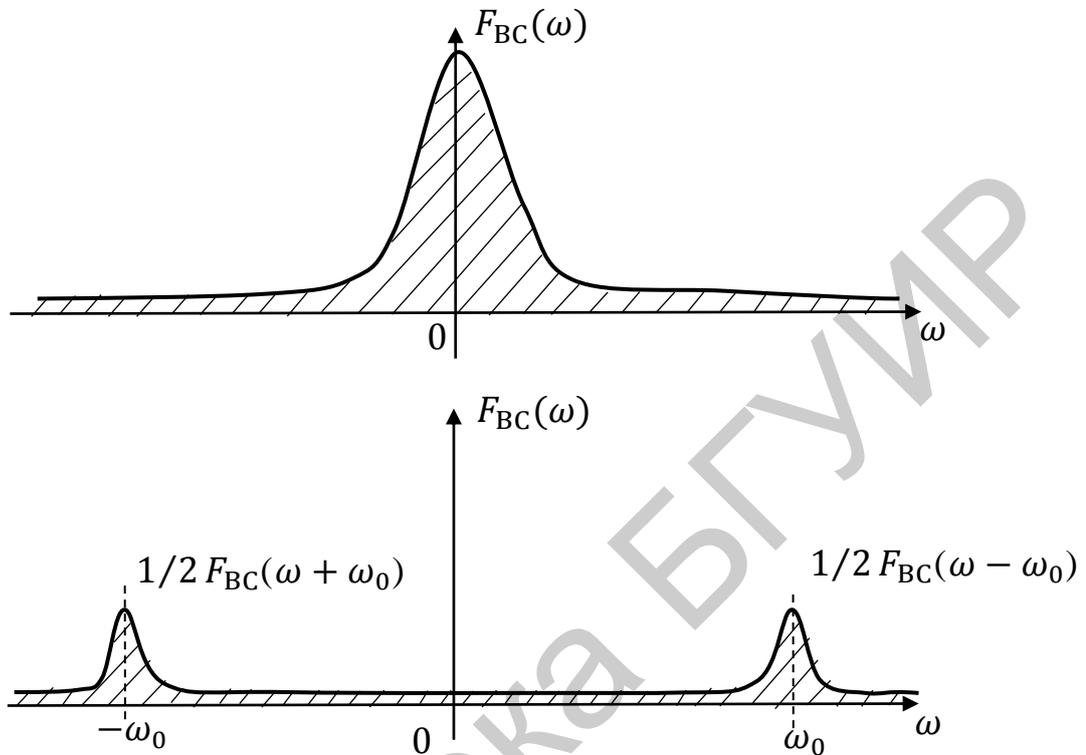


Рис. 1.52

### 1.6.2. Спектры одиночного радиоимпульса прямоугольной формы

На рис. 1.53 приведен одиночный радиоимпульс прямоугольной формы.

Колебания подобного вида имеют большое практическое значение и широко применяются в радиолокации. Стопроцентную модуляцию сигналами прямоугольной формы называют манипуляцией.

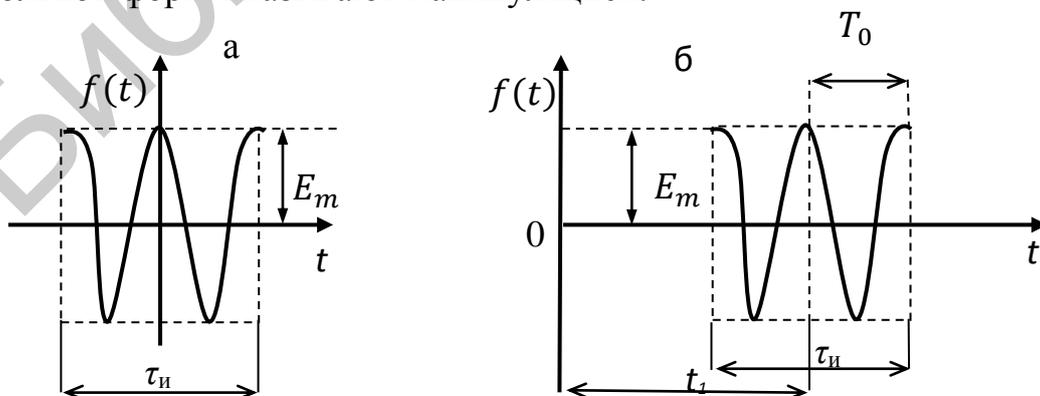


Рис. 1.53

При выборе начала отсчета времени для рассматриваемого радиоимпульса в его середине

$$f(t) = \begin{cases} E_m \cos(\omega_0 t + \psi_0) \forall t \in [-\tau_n/2; \tau_n/2] \\ 0 \text{ вне этого интервала,} \end{cases}$$

где фазу  $\psi_0$  положим равной нулю.

Согласно выражению (1.57) спектральная плотность огибающей такого импульса

$$F_{BC}(j\omega) = E_m \tau_n \sin(\omega \tau_n/2) / (\omega \tau_n/2).$$

Заменив в этом выражении  $\omega$  на  $\omega - \omega_0$ , т. е., считая, что ширина спектра огибающей намного меньше несущей частоты  $\omega_0$ , и учитывая соотношение (1.87), получим спектральные плотности амплитуд и фаз для рассматриваемого радиоимпульса в диапазоне положительных частот:

$$F_{PC}(j\omega) \approx \frac{1}{2} e^{j\psi_0} \cdot F_{BC}[j(\omega - \omega_0)] \approx \frac{1}{2} e^{j\psi_0} E_m \tau_n \times \\ \times \sin((\omega - \omega_0)\tau_n/2) / ((\omega - \omega_0)\tau_n/2) \approx \frac{1}{2} e^{j\psi_0} E_m \tau_n \sin x / x, \quad (1.89)$$

где  $x = (\omega - \omega_0)\tau_n/2$ .

Модуль спектральной плотности

$$|F_{PC}(j\omega)| = F_{PC}(\omega) \approx \frac{E_m \tau_n}{2} |(\sin x) / x|, \quad (1.90)$$

а фазочастотный спектр

$$\psi_{PC}(\omega) = \psi_0 + \arg \frac{\sin x}{x} = \psi_0 \pm \begin{cases} 0 \text{ при } \sin x / x > 0; \\ \pi \text{ при } \sin x / x < 0. \end{cases} \quad (1.91)$$

Графики модуля спектральной плотности и фазочастотного спектра одиночного радиосигнала согласно выражениям (1.90) и (1.91) соответственно приведены рис. 1.54, а и б. Из графиков видно, что спектры одиночного радиоимпульса являются сплошными и отличаются от спектров видеоимпульса прямоугольной формы (см. рис. 1.39) смещением вправо по оси частот на величину  $\omega_0$ , уменьшением вдвое амплитуды модуля спектральной плотности, увеличением вдвое ширины спектра. Так же, как и у одиночного видеоимпульса, при увеличении длительности радиоимпульса спектр его сужается. При  $\tau_n \rightarrow \infty$  модуль спектральной плотности на частоте  $\omega_0$  становится бесконечно большим. Сигнал в этом случае приближается к гармоническому колебанию с частотой  $\omega_0$ .

При изменении начальной фазы несущей функции  $\psi_0$  изменяется только ФЧС (перемещается вверх или вниз параллельно оси абсцисс (рис. 1.54, в)). При изменении начала отсчета времени  $t_1$  (см. рис. 1.53, б) АЧС, как и у одиночного видеоимпульса, остается прежним, а ФЧС имеет угол наклона относительно оси абсцисс, пропорциональной времени  $t_1$  (рис. 1.54, г).

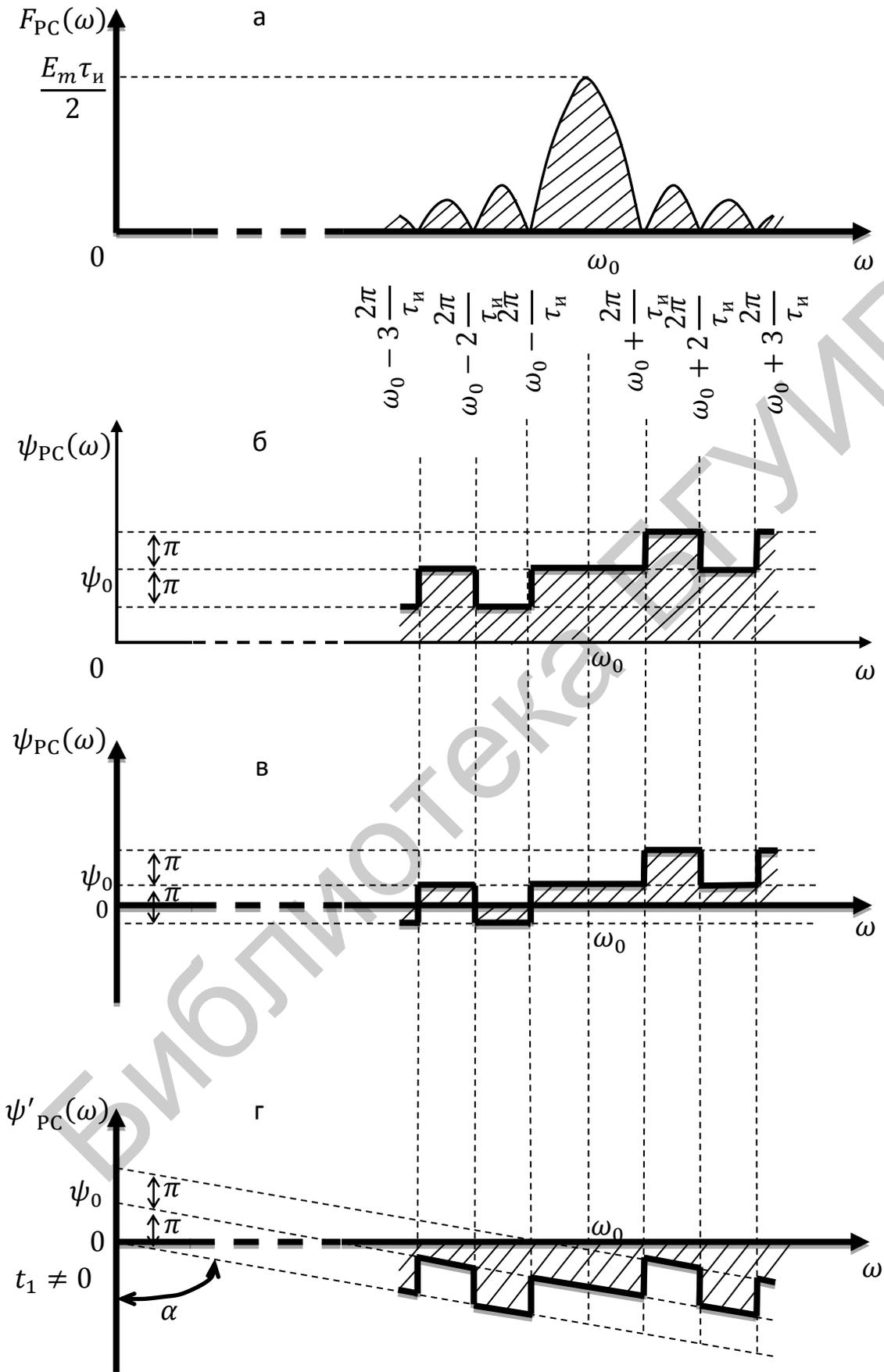


Рис. 1.54

### 1.6.3. Спектры неограниченной периодической последовательности когерентных радиоимпульсов прямоугольной формы

Неограниченная периодическая последовательность радиоимпульсов (рис. 1.55) характеризуется формой огибающей (в данном случае прямоугольной с максимальной амплитудой  $E_m$ ), их длительностью  $\tau_{и}$ , частотой следования  $\omega_1 = 2\pi/T$ , параметрами высокочастотного заполнения импульсов: частотой ВЧ-колебания  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  и начальными фазами несущей частоты в импульсах.

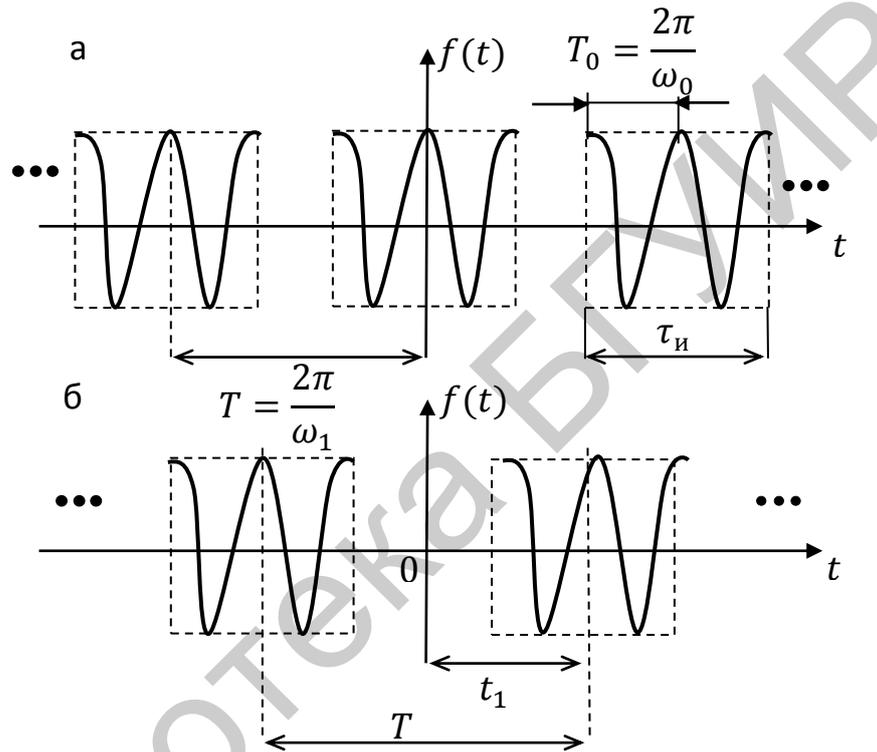


Рис. 1.55

Если частоты несущих колебаний в каждом импульсе одинаковы, а начальные фазы равны или отличаются на постоянную величину, то такие радиоимпульсы называют *когерентными*. Неограниченные последовательности радиоимпульсов, огибающие которых являются периодическими функциями, могут быть как периодическими (если период следования импульса  $T$  и период ВЧ-заполнения  $T_0$  кратны), так и непериодическими (если  $T$  и  $T_0$  не являются кратными).

На практике часто используется последовательность радиоимпульсов, формируемая автогенератором, работающим в импульсном режиме. При этом начальные фазы ВЧ-заполнения, имеющего одну и ту же несущую частоту  $\omega_0$  в каждом импульсе, являются одинаковыми, период следования импульсов  $T$  и период ВЧ-заполнения  $T_0$ , как правило, кратны. Такие импульсы – когерентны, а их последовательности – периодические. Поэтому для анализа спектров неограниченной последовательности когерентных радиоимпульсов прямоуголь-

ной формы можно воспользоваться методикой получения спектров периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы (см. п. 1.3.2) и связью между спектрами радиосигналов и видеосигналов (см. п. 1.6.1).

В качестве огибающей рассматриваемых радиоимпульсов используются прямоугольные видеоимпульсы, амплитуды гармоник которых рассчитываются по формуле (1.30):

$$F_{\text{BC}}(\omega) \approx 2E_m/q \frac{\sin(n\omega_1\tau_n/2)}{n\omega_1\tau_n/2}.$$

Если данное выражение подставить в формулу (1.87) и принять  $\psi_0 = 0$ , то для положительных частот

$$\begin{aligned} F_{\text{PC}}(j\omega) &\approx 1/2 F_{\text{BC}}(j(\omega - \omega_0)), \\ \text{а} \quad F_{\text{PC}}(\omega) &\approx (E_m/q) |\sin((n\omega_1 - \omega_0)\tau_n/2)/(n\omega_1 - \omega_0)\tau_n/2|; \\ \psi_{\text{PC}}(\omega) &= \arg \frac{\sin x}{x}, \text{ где } x = (n\omega_1 - \omega_0)\tau_n/2. \end{aligned}$$

Полученные соотношения показывают, что огибающая АЧС последовательности радиоимпульсов прямоугольной формы определяется функцией  $\text{Sa}(x) = \sin x/x$ , т. е. так же, как и для последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы. Разница лишь в том, что эта функция сдвинута вправо по оси частот на величину  $\omega_0$ , а ее максимум вдвое меньше (рис. 1.56, а).

Аналогичного результата можно достичь следующим образом. Спектральное представление периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы было получено ранее в виде суммы постоянной и гармонических составляющих (см. формулу (1.31)):

$$f_{\text{BC}}(t) = \frac{E_m}{q} + \frac{2E_m}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin(n\omega_1\tau_n/2)}{n\omega_1\tau_n/2} \right| \cos(n\omega_1 t + \psi_n).$$

Заполнение видеоимпульсов ВЧ-колебаниями приводит к смещению спектра вправо по оси частот на величину несущей  $\omega_0$ . Этому переносу спектра на несущую частоту математически соответствует умножение спектра видеоимпульсов на гармоническую функцию с высокой частотой  $\omega_0$ , т. е.

$$f_{\text{PC}}(t) = f_{\text{BC}} \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (1.92)$$

Тогда ряд Фурье для последовательности радиоимпульсов, если в выражении (1.92) принять  $\psi_0 = 0$ , запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{\text{PC}}(t) &= \frac{E_m}{q} \cos(\omega_0 t) + \frac{2E_m}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \cos(n\omega_1 t + \psi_n) \cos(\omega_0 t) = \\ &= \frac{E_m}{q} \cos(\omega_0 t) + \frac{E_m}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \cos((\omega_0 - n\omega_1)t - \psi_n) + \\ &\quad + \frac{E_m}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \cos((\omega_0 - n\omega_1)t + \psi_n), \end{aligned} \quad (1.93)$$

где  $x = (\omega_0 - n\omega_1)\tau_n/2$ .

На рис. 1.56 основная гармоника на несущей частоте  $\omega_0$ , имеющая наибольшую амплитуду, обозначена штриховой линией.

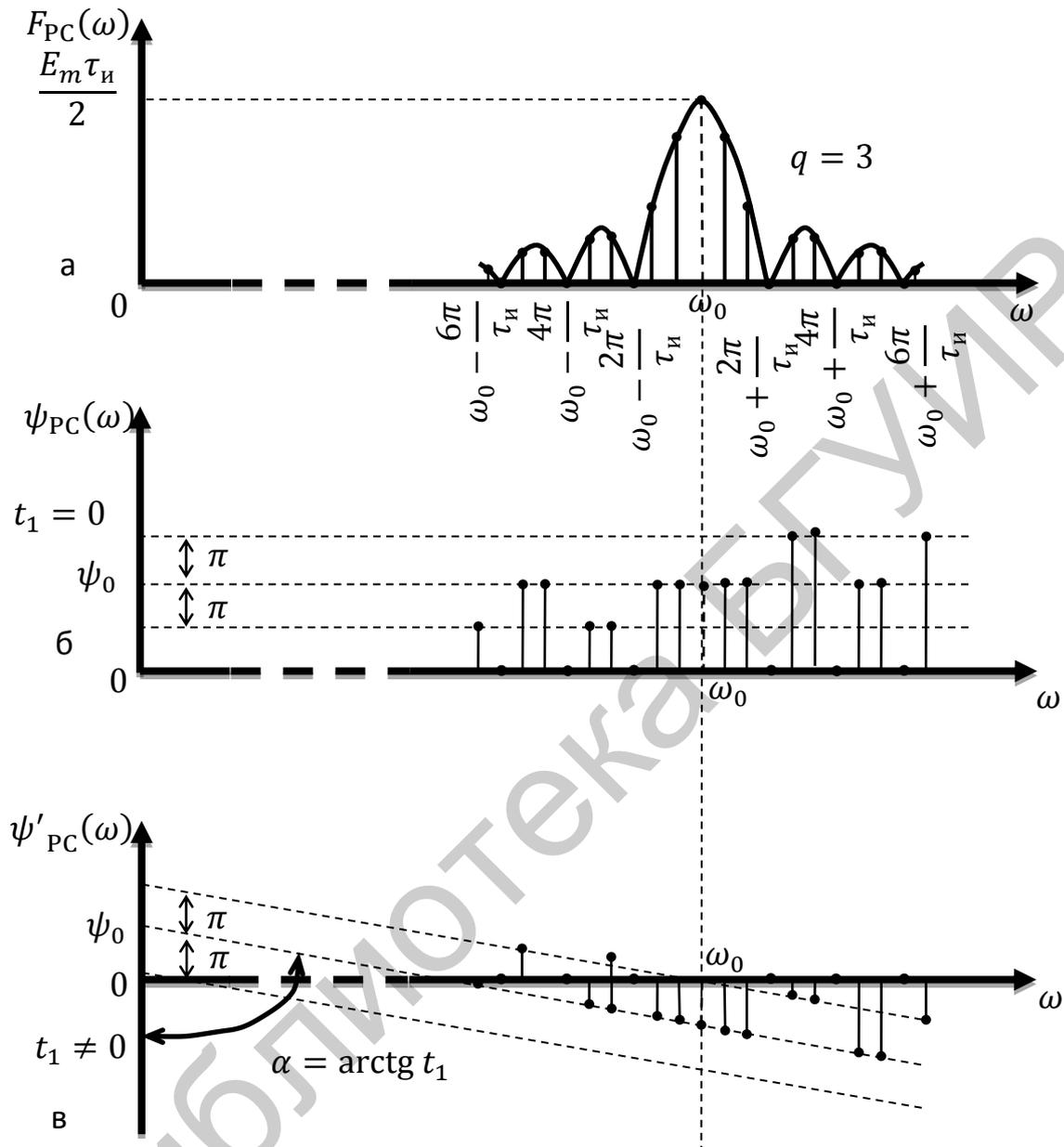


Рис. 1.56

Изменение начала отсчета времени (см. рис. 1.55, б) влияет так же, как и у видеоимпульсов, на спектр фаз (см. рис. 1.56, б и в).

Эффективная ширина спектра радиоимпульсов в два раза больше, чем у одинаковых по длительности видеоимпульсов.

### 1.6.4. Спектр пачки прямоугольных радиоимпульсов

Спектр пачки радиоимпульсов любой формы может быть вычислен на основании выражения (1.87)

$$F_{\text{РС}}(j\omega) \approx \frac{1}{2} e^{j\psi_0} F_{\text{ВС}}[j(\omega - \omega_0)]$$

и приведенной в п. 1.4.9 формулы:

$$F_{\text{пачки}}(j\omega) = F_1(j\omega) \frac{\sin(n\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j\omega(n-1)T/2}.$$

Для случая пачки прямоугольных радиоимпульсов (рис. 1.57) амплитудно-частотный спектр

$$F_{\text{пачки}}(j\omega) = E_m \tau_{\text{и}} |\sin x/x| \cdot \left| \frac{\sin(n\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right|, \text{ где } x = (\omega\tau_{\text{и}})/2.$$

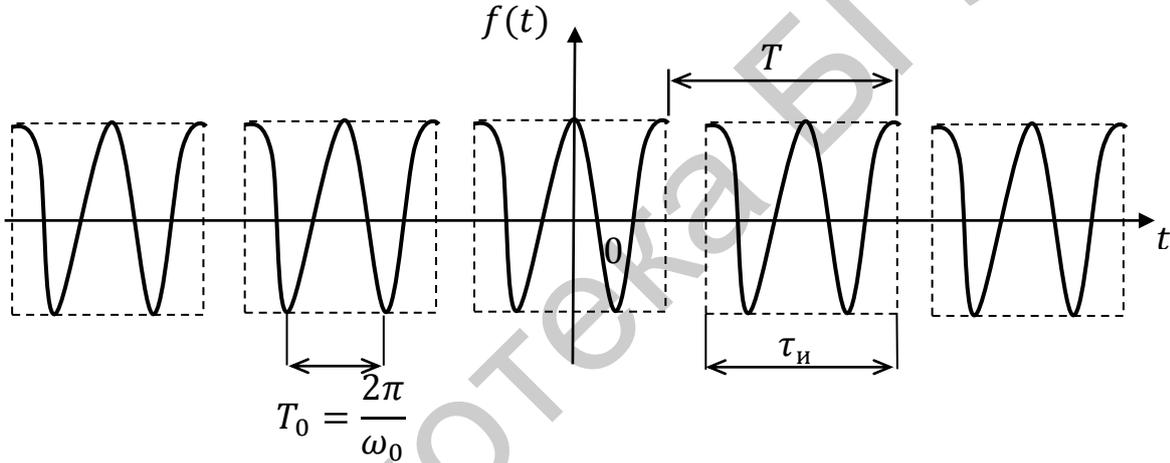


Рис. 1.57

В результате АЧС пачки радиоимпульсов прямоугольной формы имеет следующий вид:

$$|F_{\text{пачки}}(j\omega)| = \frac{E_m \tau_{\text{и}}}{2} \left| \frac{\sin((\omega - \omega_0)/2 \cdot \tau_{\text{и}})}{(\omega - \omega_0)/2 \cdot \tau_{\text{и}}} \right| \times \left| \frac{\sin[(\omega - \omega_0)n \cdot (T/2)]}{\sin[(\omega - \omega_0) \cdot (T/2)]} \right|. \quad (1.94)$$

График АЧС (1.94) приведен на рис. 1.58. Ширина спектра такой пачки, как и в случае одиночного радиоимпульса, определяется формулой  $\Delta f = (2-5)/\tau_{\text{и}}$ .

**Пример 1.5.** На вход приемного устройства поступает пачка прямоугольных радиоимпульсов (см. рис. 1.57), содержащая 5 импульсов длительностью  $\tau_{\text{и}} = 10$  мкс, с частотой повторения  $F = 20$  кГц. ВЧ-заполнение  $f_0 = 50$  МГц. Построить спектр такого сигнала.

**Решение.** Поскольку сигнал содержит 5 импульсов, то длительность пачки  $\tau_{\text{пачки}} = 5T + \tau_{\text{и}} = 5 \cdot 0,05 \cdot 10^{-3} + 10^{-5} = 26 \cdot 10^{-5}$  с.

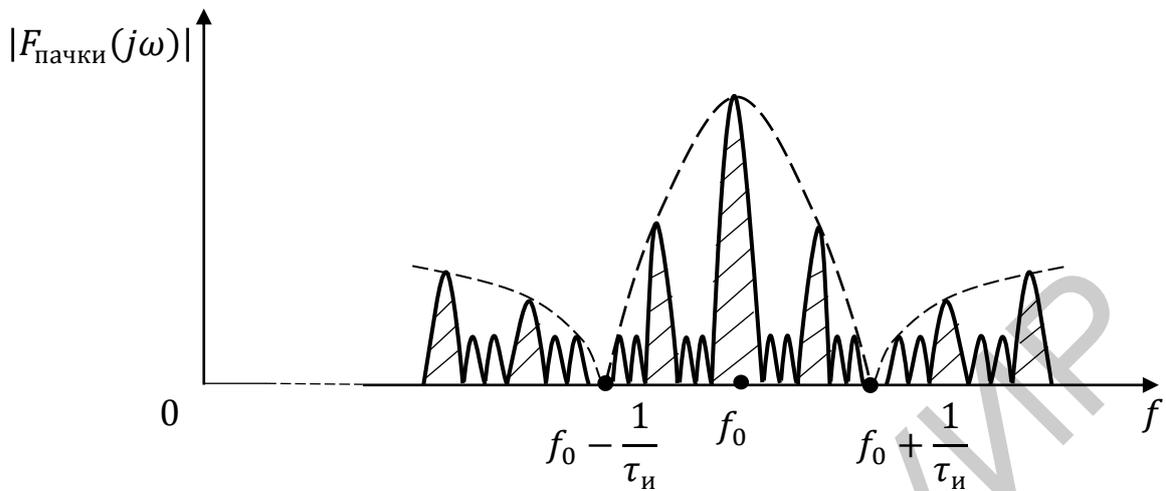


Рис. 1.58

Параметры спектра сигнала:

- 1) скважность  $q = T/\tau_{и} = 1/(\tau_{и} \cdot F) = 1/(10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^4) = 5$ ;
- 2) число лепестков в главной арке огибающей  $N = 2q - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ ;
- 3) ширина лепестков  $\Delta f \approx 1/\tau_{пачки} = 1/(26 \cdot 10^{-5}) \approx 3,8$  кГц.

Спектр пачки из 5 прямоугольных радиоимпульсов приведен на рис. 1.59. Ширина спектра по уровню 90 % энергии (основная арка огибающей) равна  $\Delta f_c = 2/\tau_{и} = 2/10^{-5} = 200$  кГц.

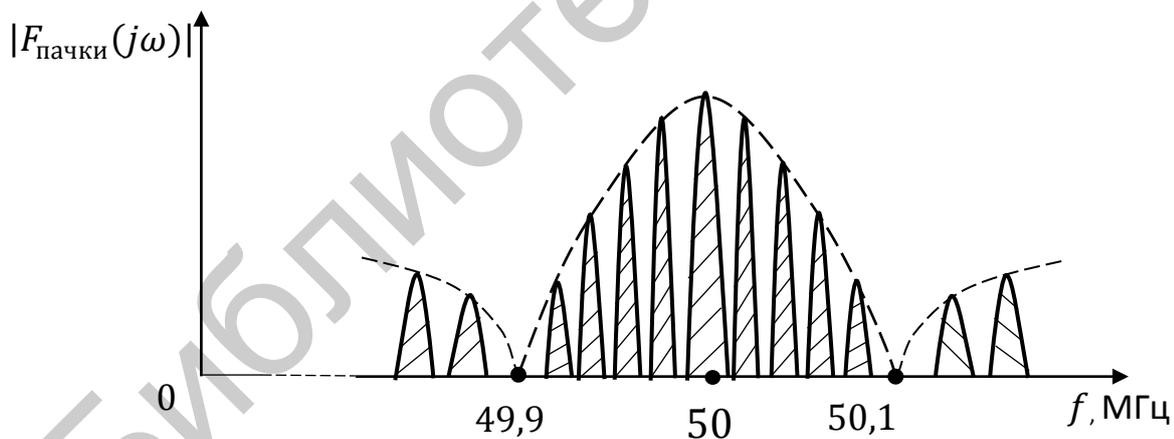


Рис. 1.59

### 1.6.5. Спектры одиночного радиоимпульса и пачки прямоугольных радиоимпульсов колоколообразной формы

Аналитическая запись одиночного радиоимпульса колоколообразной формы (рис. 1.60) следующая:

$$f(t) = E_m e^{-(\alpha t)^2} \cos(\omega_0 t + \psi). \quad (1.95)$$

Длительность данного радиоимпульса определяется так же, как и в случае видеоимпульса (см. п. 1.4.6).

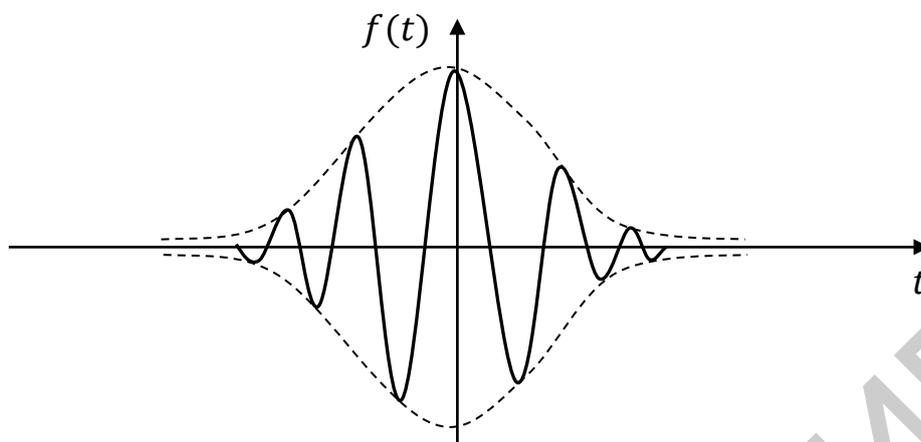


Рис. 1.60

Используя выражения (1.64) и (1.87), получаем спектральную плотность одиночного радиоимпульса колоколообразной формы:

$$F(j\omega) = E_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha t)^2 - j\omega t} \cos(\omega_0 t + \psi) dt =$$

$$= E_m / 2\alpha \sqrt{\pi} e^{-((\omega - \omega_0) / 2\alpha)^2} e^{j\psi} + E_m / 2\alpha \sqrt{\pi} e^{-((\omega + \omega_0) / 2\alpha)^2} e^{j\psi}.$$

Пренебрегая слагаемым с отрицательными частотами, получим

$$F(j\omega) = (E_m / 2\alpha) \sqrt{\pi} e^{-((\omega - \omega_0) / (2\alpha))^2} e^{j\psi}. \quad (1.96)$$

Спектр (1.96) – вещественен (рис. 1.61). Форма спектра – колоколообразная. Чем больше длительность импульса (т. е. меньше  $\alpha$ ), тем шире спектр, и наоборот.

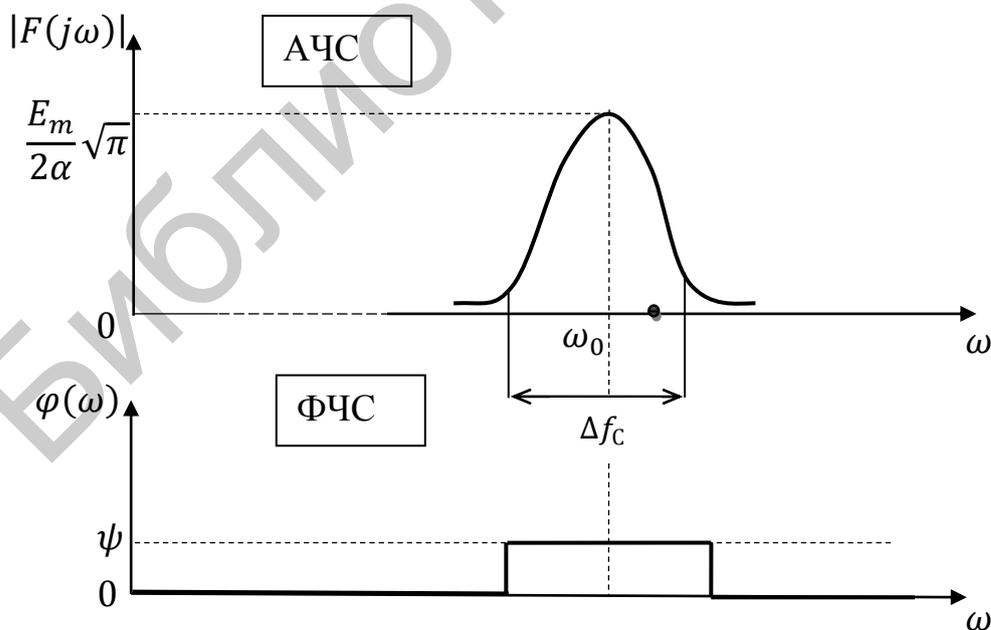


Рис. 1.61

Если пачку видеоимпульсов (рис. 1.62, а) с колоколообразной огибающей (см. п. 1.4.8) использовать в качестве модулирующего сигнала при амплитудной модуляции несущего высокочастотного колебания, то получим колоколообразную пачку прямоугольных радиоимпульсов (рис. 1.62, б). Спектр рассматриваемой пачки (рис. 1.62, в) в два раза шире спектра модулирующей функции и содержит две боковые полосы модуляции.

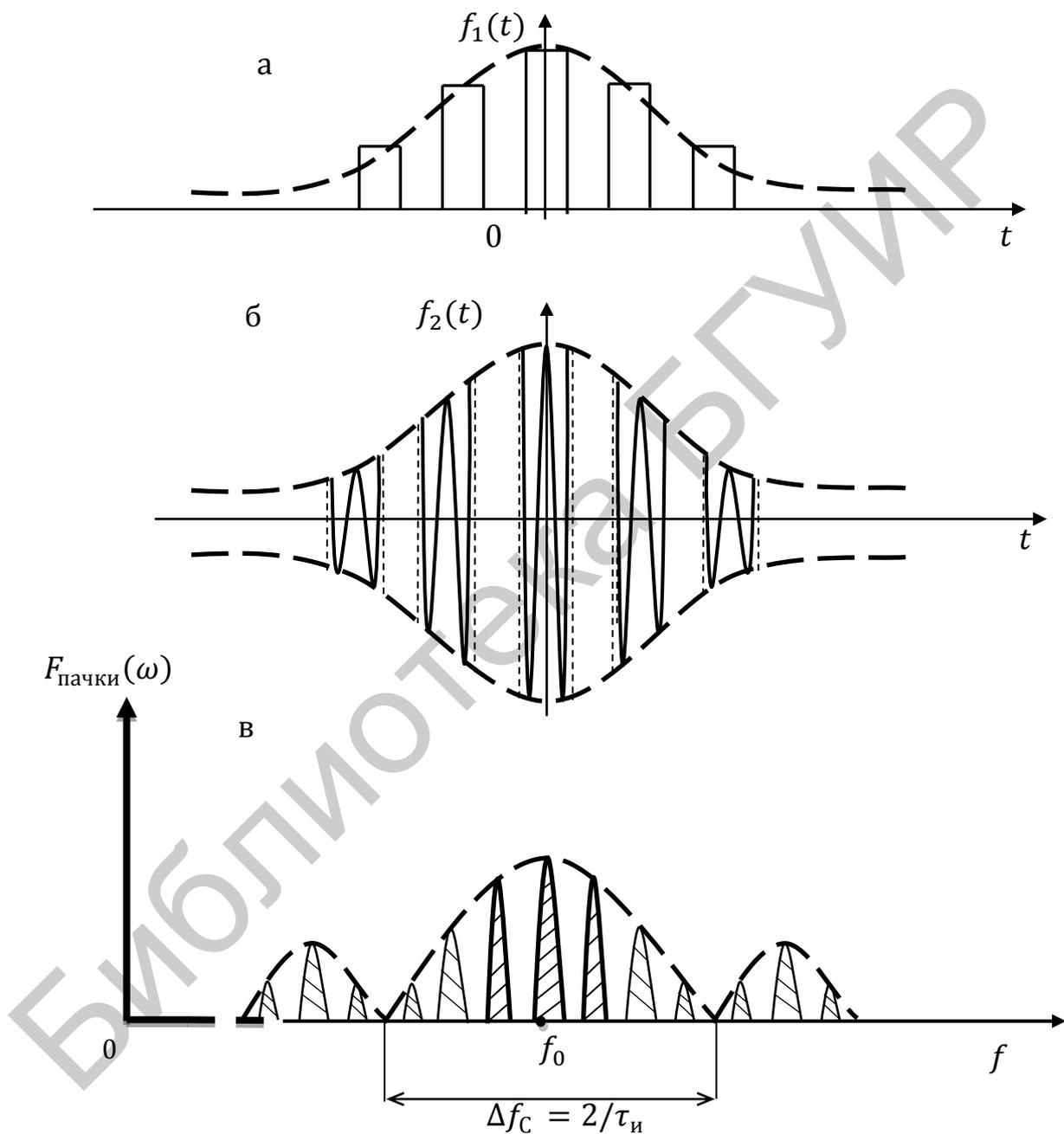


Рис. 1.62

Верхняя боковая полоса представляет собой спектр модулирующей функции, вдвое уменьшенный по амплитуде и смещенный вправо по частотной

оси на величину  $f_0$ . Нижняя боковая полоса модуляции является зеркальным отображением верхней относительно несущей частоты  $f_0$ .

### 1.6.6. Спектры затухающего радиосигнала

Приведенный на рис. 1.63 затухающий радиосигнал имеет экспоненциальную огибающую, спектральная плотность которой, согласно формуле (1.41), имеет следующий вид:

$$F(j\omega) = \frac{A\tau_{и}}{1 + j\omega\tau_{и}}; F(\omega) = \frac{A\tau_{и}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_{и}^2}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

где  $\alpha = 1/\tau_{и}$ .

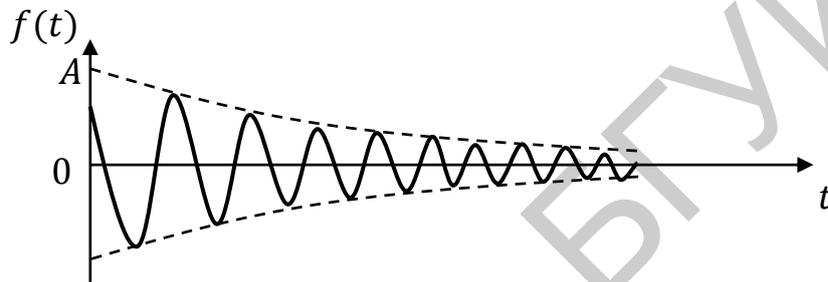


Рис. 1.63

Используя выражение (1.87), получим

$$F_{РС}(j\omega) = \frac{1}{2} e^{j\psi_0} \frac{A\tau_{и}}{1 + j(\omega - \omega_0)\tau_{и}}, \quad (1.97)$$

откуда

$$F_{РС}(\omega) = \frac{A}{2\sqrt{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}}, \quad (1.98)$$

$$\psi(\omega) = \psi_0 - \arctg \frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}. \quad (1.99)$$

На рис. 1.64 приведены графики  $F_{РС}(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , построенные по уравнениям (1.98) и (1.99) соответственно при  $\omega_0 \gg \alpha$ .

### 1.7. Угловая модуляция

Принципы, лежащие в основе угловой модуляции, были выдвинуты Г. Л. Ф. Гельмгольцем в 1862 г. задолго до развития радиотехники. Впервые угловая модуляция была применена в радиосвязи в 1912 г. для телеграфной манипуляции сигналов передатчиков путем изменения их частоты. Первые схемы частотных модуляторов на электронных лампах были предложены в 1921 г. Г. А. Зейтленком и Е. И. Каменским. В работах В. И. Сифорова и В. Б. Пестрякова (1936–1938 гг.) было исследовано влияние помех при приеме частотно-модулированных (ЧМ) колебаний и показаны преимущества этого вида модуляции.

Благодаря высокой помехоустойчивости, малым искажениям, экономичности радиопередатчиков, угловая модуляция используется в настоящее время в радиорелейной связи, радиотелеграфии, радиолокации, в радиовещании и телевидении, в измерительной и ядерной технике.

Угловая модуляция имеет разновидности. Одна из них – фазовая модуляция (ФМ), другая – частотная (ЧМ).

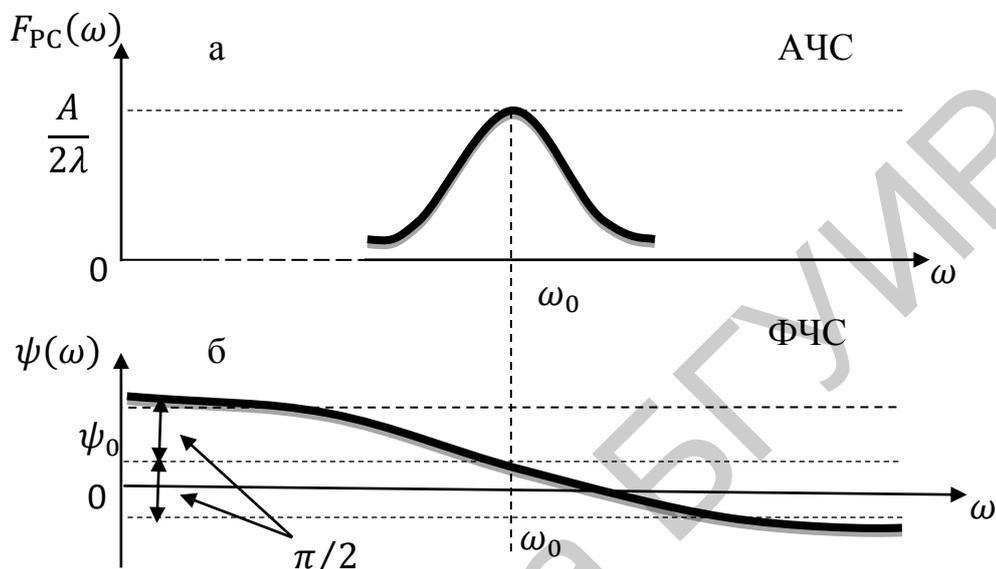


Рис. 1.64

### 1.7.1. Фазовая модуляция

При фазовой модуляции управляющий модулирующий сигнал  $a(t)$  воздействует на начальную фазу  $\psi_0$  колебания несущей:

$$a_0(t) = Am_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0).$$

При этом начальная фаза становится переменной величиной:

$$\psi(t) = \psi_0 + k_\psi a(t), \quad (1.100)$$

где  $k_\psi$  – коэффициент пропорциональности при условии  $\omega(t) \geq 0$ .

С учетом (1.100) фазомодулированный сигнал записывается следующим образом:

$$f_{\text{ФМ}}(t) = Am_0 \cos[\omega_0 t + \psi_0 + k_\psi a(t)] = Am_0 \cos \theta(t), \quad (1.101)$$

где

$$\theta(t) = \omega_0 t + \psi_0 + k_\psi a(t) \quad (1.102)$$

есть полная (текущая) фаза.

Из определения частоты как скорости изменения полной фазы во времени следует, что

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt. \quad (1.103)$$

Подставив в формулу (1.103) выражение (1.102), получим

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt = \omega_0 + k_\psi da(t)/dt, \quad (1.104)$$

т. е. у ФМ-сигнала угловая частота является переменной величиной.

В частном случае, когда  $\theta(t) = \omega_0 t + \psi_0$ ,  $\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$ . Зависимость  $\theta(t)$  при этом изображается прямой линией, тангенс угла наклона которой равен  $\omega_0$  (рис. 1.65).

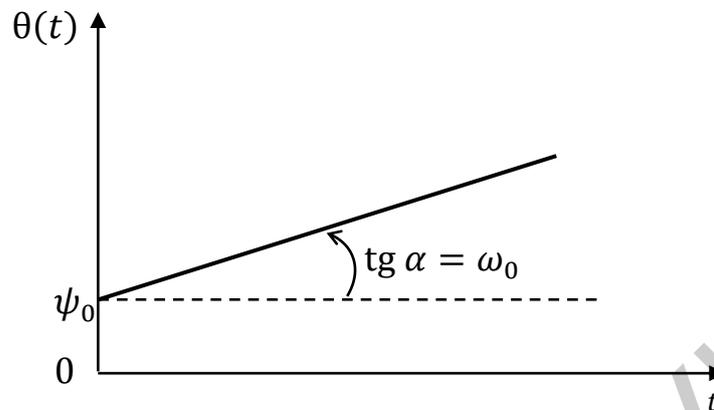


Рис. 1.65

Таким образом, отклонение закона изменения полной фазы от линейного вызывает изменение частоты, а изменение частоты приводит к изменению полной фазы, отличающейся от линейного закона. В общем случае зависимость  $\theta(t)$  может быть представлена графически в виде некоторой кривой (рис. 1.66), не имеющей падающих участков, так как частота, определяемая тангенсом угла наклона касательной к этой кривой, не может быть отрицательной. Очевидно, что частота  $\omega(t)$  в этом общем случае становится переменной величиной.

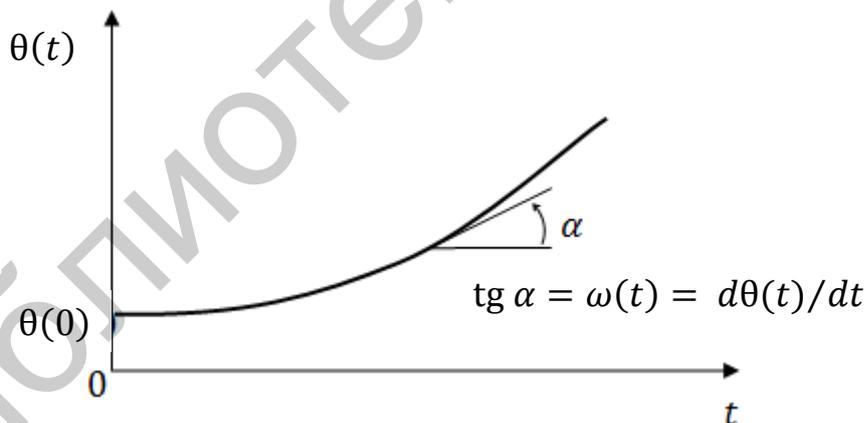


Рис. 1.66

Полная фаза определяется интегрированием мгновенной частоты по времени:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt + C. \quad (1.105)$$

Постоянная интегрирования  $C$  равна  $\psi_0$ . При  $\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$

$$\theta(t) = \int \omega_0 dt + \psi_0 = \omega_0 t + \psi_0. \quad (1.106)$$

Значит, для фазовой модуляции, согласно (1.100), характерно изменение начальной фазы в соответствии с управляющим сигналом.

Полная фаза изменяется по закону, определяемому выражением (1.102), также содержащим управляющий сигнал. Изменение же частоты при фазовой модуляции определяется производной управляющего сигнала по времени (1.103).

**Пример 1.6.** Построить однотонольно модулированное по фазе колебание, если модулирующий сигнал (рис. 1.67, а) имеет вид

$$a(t) = B_m \cos(\Omega t + \theta_0).$$

**Решение.** Полная фаза  $\theta(t)$  (рис. 1.67, б) аналитически записывается в виде функции

$$\theta(t) = \omega_0 t + \psi_0 + M_\psi \cos(\Omega t + \theta_0),$$

где  $M_\psi = k_\psi B_m$  – максимальное изменение (девиация) фазы, или индекс фазовой модуляции, измеряемый в радианах или градусах.

Переменная частота модулированного колебания  $\omega(t)$ , приведенная на рис. 1.67, в, определяется как производная полной фазы по времени:

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt = \omega_0 - \Omega M_\psi \sin(\Omega t + \theta_0).$$

Обозначив  $\Omega M_\psi = \Delta\omega_{\max}$ , получим

$$\omega(t) = \omega_0 - \Delta\omega_{\max} \sin(\Omega t + \theta_0).$$

Однотонольно модулированные по фазе колебания  $f(t)$  (рис. 1.67, г) есть произведение постоянной амплитуды несущей функции  $A_m$  на косинус полной фазы  $\theta(t)$ , т. е.

$$f(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \psi_0 + M_\psi \cos(\Omega t + \theta_0)].$$

**Пример 1.7.** Построить график модулированного по фазе колебания, если управляющий сигнал имеет форму треугольника (рис. 1.68, а).

**Решение.** Согласно (1.102) полная фаза  $\theta(t) = \omega_0 t + \psi_0 + k_\psi a(t)$ . На рис. 1.68, б изображен график изменения полной фазы. При этом значение  $k_\psi$  принято равным 0,25 и отрезок 2–3 равен  $0,25h$ . Точки 4 и 5, соответствующие началу и концу модуляции, переносятся на прямую изменения фазы немодулированного колебания. Затем от точки 3 откладывается отрезок 3–2. Из условия, что зависимость  $\theta(t)$  не может иметь падающих участков (т. е. угол  $\alpha_2$  не может быть отрицательным) определяется максимально возможное значение коэффициента  $k_\psi$ , равное отношению отрезка 1–3 к высоте треугольника  $h$ .

На рис. 1.68, в показано изменение частоты, определяемой по формуле (1.103). В точках, соответствующих моментам времени  $t_1, t_2, t_3$  частота меняется скачком. Числовое значение частоты определяется значением тангенса угла наклона ломаной кривой  $\theta(t)$ , а именно  $\omega_0 = \operatorname{tg} \alpha_0, \omega_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \omega_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ .

На рис. 1.68, г построен график модулированного по фазе колебания  $f(t)$ .

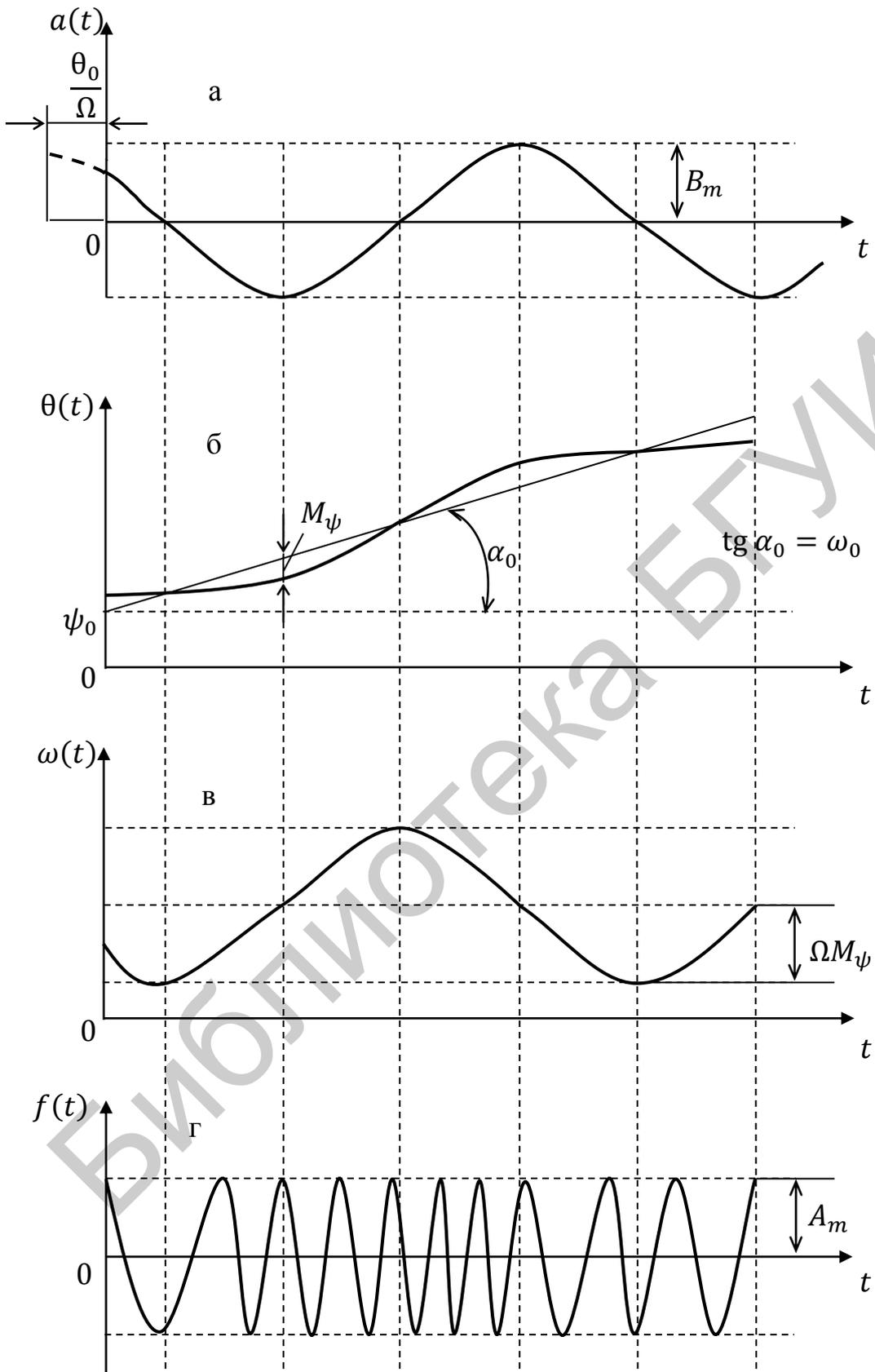


Рис. 1.67

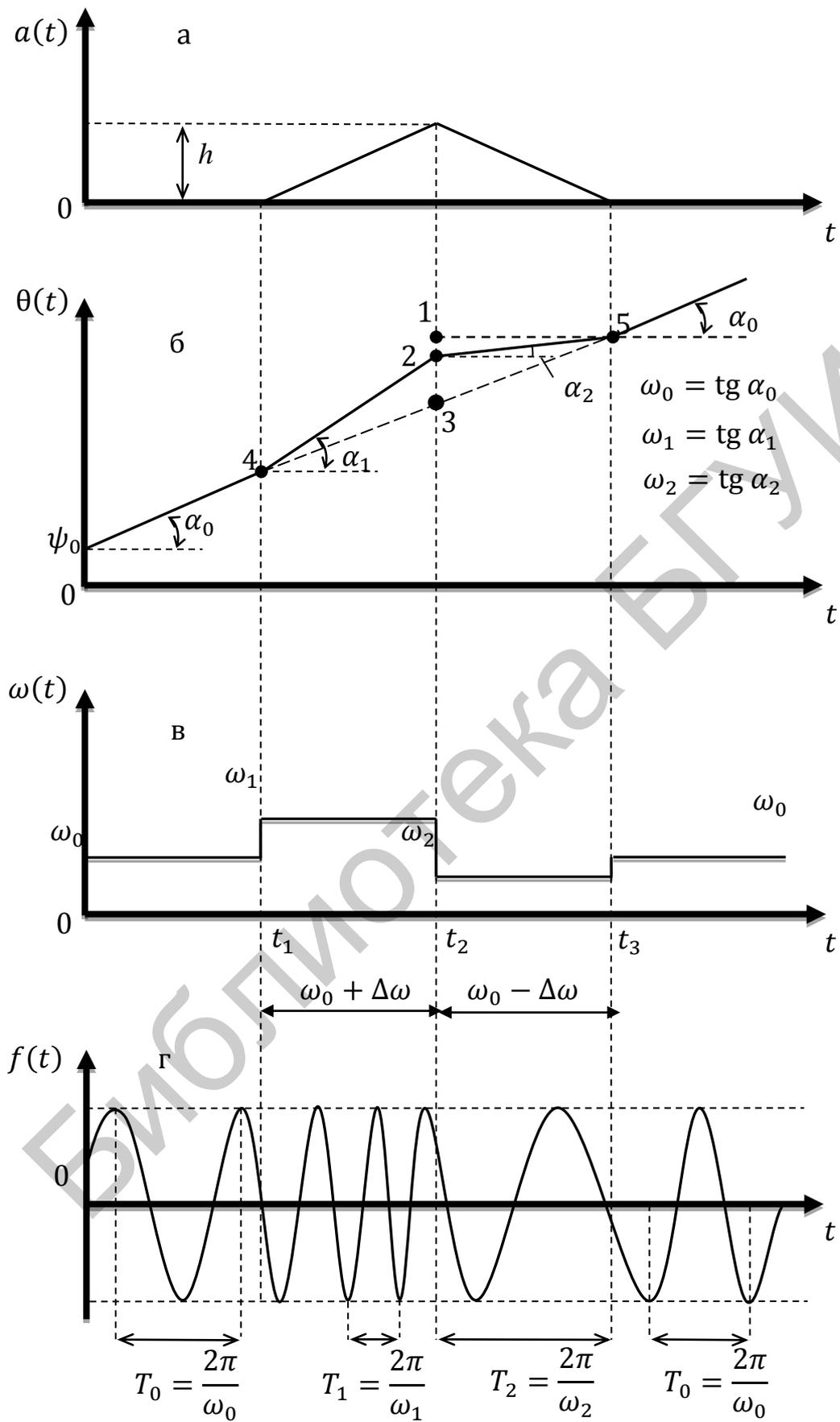


Рис. 1.68

### 1.7.2. Частотная модуляция

При частотной модуляции (ЧМ) управляющий сигнал  $a(t)$  воздействует на частоту  $\omega_0(t)$  несущего колебания  $a_0(t) = Am_0 \cos(\omega_0 t + \psi_0)$ . В этом случае частота ЧМ-колебания становится переменной величины, повторяющей закон изменения управляющего сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_f a(t), \quad (1.107)$$

где  $k_f$  – коэффициент пропорциональности, обеспечивающий условие

$$\omega_0 \geq 0.$$

Из формулы (1.102) следует, что полная фаза ЧМ-сигнала определяется интегрированием частоты по времени и равна

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt + C, \quad (1.108)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, равная  $\psi_0$ .

После подстановки в уравнение (1.108) под знак интеграла частоты  $\omega(t)$  из выражения (1.107) получим

$$\theta(t) = \int_0^t (\omega_0 + k_f a(t)) dt + \psi_0 = \omega_0 t + \psi_0 + k_f \int_0^t a(t) dt. \quad (1.109)$$

С учетом полученного выражения для полной фазы  $\theta(t)$  мгновенное значение ЧМ-сигнала записывается следующим образом:

$$f_{\text{ЧМ}}(t) = Am_0 \cos[\omega_0 t + k_f \int_0^t a(t) dt + \psi_0]. \quad (1.110)$$

Таким образом, согласно выражению (1.110), у ЧМ-сигнала частота  $\omega$  пропорциональна управляющему сигналу, а полная фаза  $\theta(t)$  – интегралу от управляющего сигнала.

Поскольку, согласно выражению

$$\omega(t) = d(\omega_0 t + \psi_0 + k_f a(t))/dt = \omega_0 + k_f da(t)/dt, \quad (1.111)$$

изменение начальной фазы ФМ-сигнала приводит к изменению его частоты, а в соответствии с формулой (1.109) изменение частоты ЧМ-сигнала приводит к изменению его полной фазы, то фазовую и частотную модуляцию можно рассматривать как разновидности одного и того же вида модуляции – угловой.

Общими свойствами ФМ- и ЧМ-сигналов являются постоянство амплитуды модулированных колебаний  $Am_0$  и нелинейный закон изменения полной фазы  $\theta(t)$ .

Изложенное иллюстрирует рис. 1.69. Пусть модулирующий (управляющий) сигнал изменяется по закону (рис. 1.69, а)

$$a(t) = \begin{cases} at & \text{при } 0 \leq t \leq t_1; \\ b - at & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

где  $b$  – значение функции  $a(t)$  при  $t = t_1$ .

Тогда ЧМ-сигнал, согласно равенству (1.107), изменяется по закону

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + k_f a(t) = \omega_0 \pm k_f a(t), \quad (1.112)$$

т. е. частота  $\omega(t)$  ЧМ-сигнала от  $t = 0$  до  $t = t_1$  линейно возрастает пропорционально модулирующей функции  $a(t) = at$ , а от  $t = t_1$  до  $t = t_2$

линейно убывает (рис. 1.69, б). Согласно формуле (1.111) частота ЧМ-сигнала изменяется по закону

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + k_f a(t) = \omega_0 \pm k_f at,$$

т. е. частота  $\omega(t)$  ЧМ-сигнала от  $t = 0$  до  $t = t_1$  линейно возрастает пропорционально модулирующей функции  $a(t) = at$ , а от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  линейно убывает с той же скоростью.

Из рис. 1.68 и рис. 1.69 видно, что при угловой модуляции амплитуда ФМ- и ЧМ-колебаний остается неизменной. Это повышает экономичность радиопередатчиков за счет более полного использования их мощности. Кроме того, вследствие неизменности амплитуды передача ФМ- и ЧМ-сигналов более помехоустойчива. Эти преимущества и определили широкое применение сигналов с угловой модуляцией в радиотехнике.

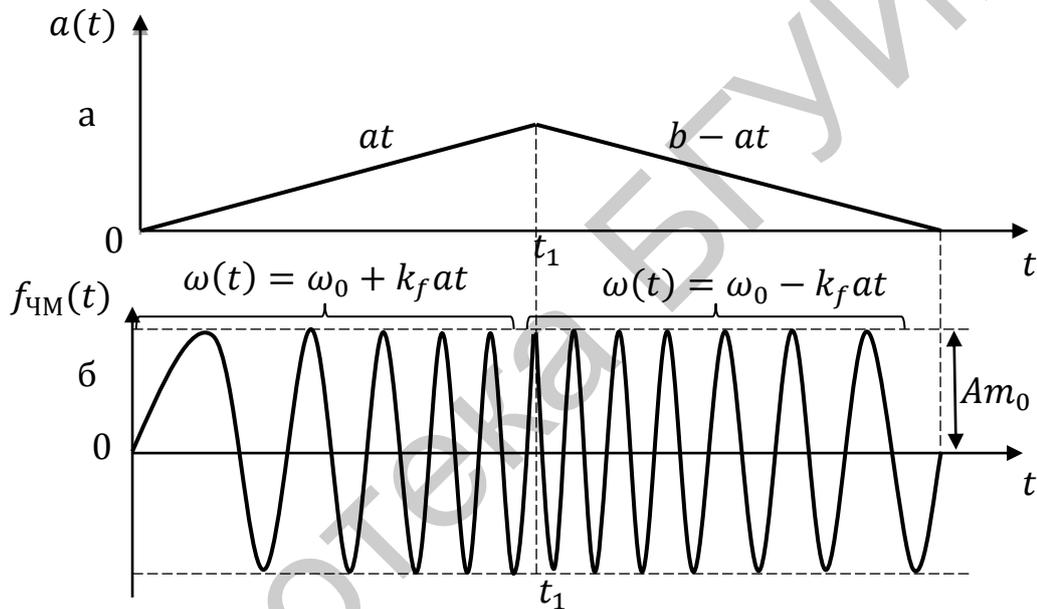


Рис. 1.69

### 1.7.3. Спектры сигналов с однотоновой угловой модуляцией

При однотоново модулированном по частоте колебании управляющий (модулирующий) сигнал имеет вид

$$a(t) = A_m \cos(\Omega t + \theta_0). \quad (1.113)$$

Начальную фазу  $\theta_0$  в этом выражении, а также начальную фазу  $\psi_0$  несущей функции  $a_0(t) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + \psi_0)$  для упрощения записи при анализе спектров примем в дальнейшем равными нулю ( $\theta_0 = 0, \psi_0 = 0$ ).

Подставив значение  $a(t)$  (1.113) в выражение (1.101) получим аналитическую запись для однотонового ФМ-сигнала:

$$\begin{aligned} f_{\text{ФМ}}(t) &= A_{m_0} \cos(\omega_0 t + k_f A_m \cos \Omega t) = A_{m_0} \cos(\omega_0 t + m_\psi \cos \Omega t) = \\ &= A_{m_0} \cos \theta(t), \end{aligned} \quad (1.114)$$

где  $m_\psi = k_\psi A_m$  – индекс фазовой модуляции или максимальное изменение фазы (радианы или градусы).

С учетом (1.114) угловая частота записывается в следующем виде:

$$\omega(t) = d\theta(t)/dt = \omega_0 - m_\psi \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega_\psi \sin \Omega t,$$

где  $\Delta\omega_\psi = m_\psi \Omega = k_\psi A_m \Omega$  – девиация частоты при фазовой модуляции.

Таким образом, у однотонового ФМ-сигнала индекс фазовой модуляции  $m_\psi$  зависит только от амплитуды управляющего сигнала и не зависит от частоты модуляции  $\Omega$ , тогда как девиация частоты  $\Delta\omega_\psi$  является функцией как  $A_m$ , так и  $\Omega$ .

Подставив значение (1.113) в выражение (1.107), получим аналитическую запись для однотонового ЧМ-сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_f a(t) = \omega_0 + \Delta\omega_f \cos \Omega t = \omega_0 (1 + M_f \cos \Omega t), \quad (1.115)$$

где  $\Delta\omega_f = k_f A_m$  – девиация частоты, или максимальное изменение частоты при частотной модуляции;  $M_f = \Delta\omega_f / \omega_0 = k_f A_m / \omega_0$  – коэффициент частотной модуляции. Чтобы угловая частота была положительной величиной, коэффициент  $M_f$  должен быть меньше единицы.

При подстановке частоты  $\omega(t)$  из формулы (1.115) в уравнение (1.109) полная фаза однотонового ЧМ-сигнала

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \int_0^t (\omega_0 + \Delta\omega_f \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + m_f \sin \Omega t, \quad (1.116)$$

где

$$m_f = \Delta\omega_f / \Omega = k_f A_m / \Omega, \quad (1.117)$$

есть индекс частотной модуляции (величина безразмерная).

Таким образом, у однотонового ЧМ-сигнала девиация  $\Delta\omega_f$  является функцией только амплитуды  $A_m$  управляющего сигнала и не зависит от его частоты  $\Omega$ , а индекс ЧМ-сигнала  $m_f$  зависит от  $A_m$  и  $\Omega$ .

С учетом выражения (1.116) аналитическая запись однотонового ЧМ-сигнала имеет следующий вид:

$$f_{\text{ЧМ}}(t) = A m_0 \cos(\omega_0 t + m_f \sin \Omega t). \quad (1.118)$$

Выражения (1.114) и (1.118), полученные для однотоновых ФМ- и ЧМ-сигналов соответственно, являются практически одинаковыми, так как замена  $\cos \Omega t$  на  $\sin \Omega t$  принципиального значения не имеет. Поэтому сигнал с однотоновой угловой модуляцией можно записать так:

$$f(t) = A m_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t), \quad (1.119)$$

где индекс модуляции  $m$  для сигнала с однотоновой фазовой модуляцией записывается выражением  $m_\psi = k_\psi A_m$ , а для сигнала с однотоновой частотной модуляцией – выражением (1.117).

Для анализа спектров сигналов с однотоновой угловой модуляцией перепишем выражение (1.119) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(t) &= A m_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = \\ &= A m_0 (\cos \omega_0 t \cos(m \sin \Omega t) - \sin \omega_0 t \sin(m \sin \Omega t)). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Из курса высшей математики известно, что

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin y) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2ny; \\ \sin(x \sin y) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)y; \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка аргумента  $x$ .

Применив соотношения (1.121) к выражению (1.120) и введя обозначения  $\psi = \Omega t$ ,  $x = m$ , после преобразований получим

$$f(t) = Am_0 [J_0(m)\cos\omega_0 t + J_1(m)(\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t) + J_2(m)(\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t) + \dots]. \quad (1.122)$$

Из полученного равенства (1.122) следует, что спектр сигнала с однотональной угловой модуляцией является дискретным и имеет бесконечное множество гармоник, образующих верхнюю и нижнюю боковые полосы с частотами  $\omega_0 + n\Omega$  и  $\omega_0 - n\Omega$ .

Амплитуда каждой гармонической составляющей частот  $\omega_0 \pm n\Omega$  в спектре колебания с угловой модуляцией определяется абсолютным значением функции Бесселя  $n$ -го порядка с аргументом  $m$  и может быть найдена с помощью графиков или таблиц этих функций. Графики функции Бесселя для  $n \leq 3$  приведены на рис. 1.70, из которого следует, что при  $m \ll 1$ , т. е. при очень малом индексе угловой модуляции,  $J_0(m) \approx 1$ ,  $J_1(m) \approx m/2$ , а функции Бесселя более высших порядков практически равны нулю.

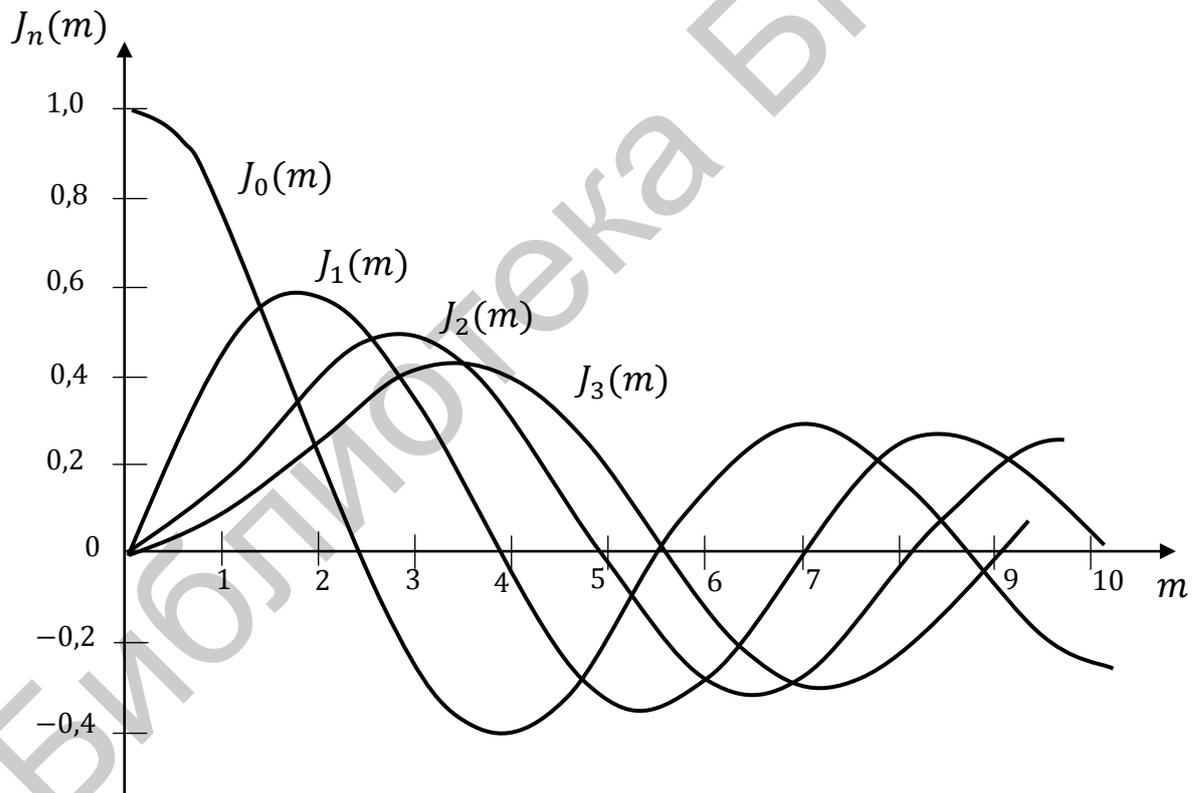


Рис. 1.70

Тогда выражение (1.122) можно записать так:

$$f(t) \approx Am_0 \cos\omega_0 t + \frac{m}{2} Am_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{m}{2} Am_0 \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (1.123)$$

Данное выражение (1.123) для спектра сигнала с однотональной угловой модуляцией отличается от выражения (1.79), описывающего сигнал с однотональной амплитудной модуляцией, только знаком перед последним

слагаемым. Это означает, что спектры амплитуд этих сигналов будут одинаковыми, а фаза у одной из боковых составляющих отличается на  $\pi$  от фазы другой боковой составляющей.

На рис. 1.71, а приведен спектр амплитуд сигнала с однотоновой угловой модуляцией, а на рис. 1.71, б – спектр фаз, у которого спектральная составляющая на частоте  $\omega_0 + \Omega$  принята равной нулю, а боковая составляющая на частоте  $\omega_0 - \Omega$ , согласно выражению (1.123), отличается на  $\pi$ . Это отличие угловой модуляции определяет различный характер колебаний, что видно из сравнения векторной диаграммы колебания с однотоновой амплитудной модуляцией (рис. 1.50) и векторной диаграммы колебания с угловой модуляцией (рис. 1.72).

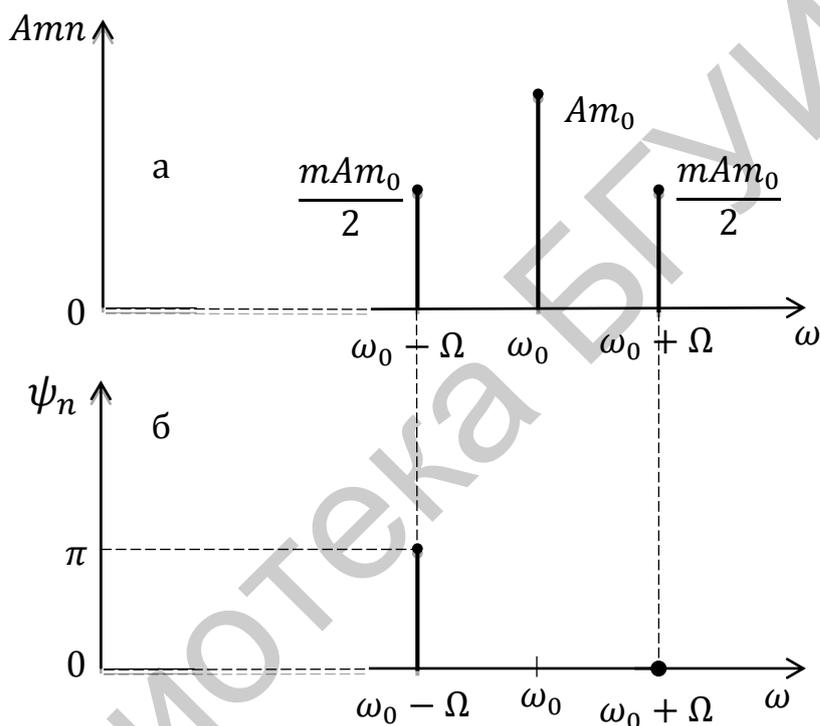


Рис. 1.71

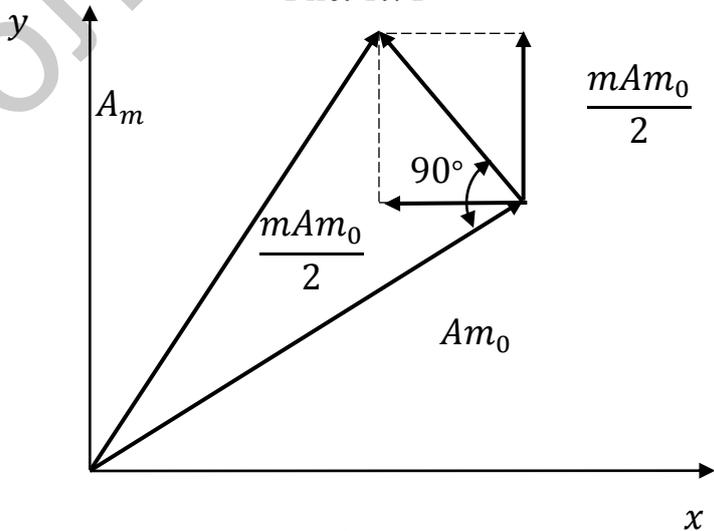


Рис. 1.72

Суммарный вектор колебаний с боковыми частотами при угловой модуляции расположен перпендикулярно вектору колебания несущей частоты.

Результирующий вектор колебания с угловой модуляцией качается относительно вектора колебания несущей частоты с частотой модулирующего сигнала  $\Omega$ . Так как при малых индексах модуляции угол качания мал, то длина этого вектора остается практически постоянной, что означает постоянство амплитуды сигнала с угловой модуляцией.

Так как при  $m \ll 1$  (узкополосная ЧМ) функции Бесселя  $J_0(m) \approx 1$ ,  $J_1(m) \approx m/2$ ,  $J_n(m) \approx 0$  при  $n > 1$ , то в спектре, кроме колебания основной частоты  $\omega_0$ , следует учитывать только первую пару боковых частот  $|\omega_0 \pm \Omega|$ . Тогда ширина спектра сигнала с однотоновой угловой модуляцией (равная  $\approx 2\Omega$ ) такая же, как и у сигнала с однотоновой амплитудной модуляцией. При малых  $m$  амплитудно-частотные спектры ФМ, ЧМ и АМ колебаний практически совпадают. Разница в спектрах возрастает при больших индексах модуляции (широкополосная ЧМ).

При увеличении индекса модуляции  $m$  необходимо учитывать гармоники боковых частот спектра более высоких порядков. Так, при значениях  $m$  от 0,5 до 1 необходимо учитывать вторую пару гармоник боковых частот (рис. 1.73, а). Ширина спектра будет равна  $4\Omega$ . При значениях  $m$  от 1 до 2 необходимо учитывать третью пару гармоник боковых частот (рис. 1.73, б) и т. д.

При больших значениях индекса модуляции, т. е. при  $m \gg 1$ , можно считать, что наивысший номер  $n$  гармоники боковой частоты, амплитуду которой необходимо учитывать, приблизительно равен индексу модуляции  $m$ .

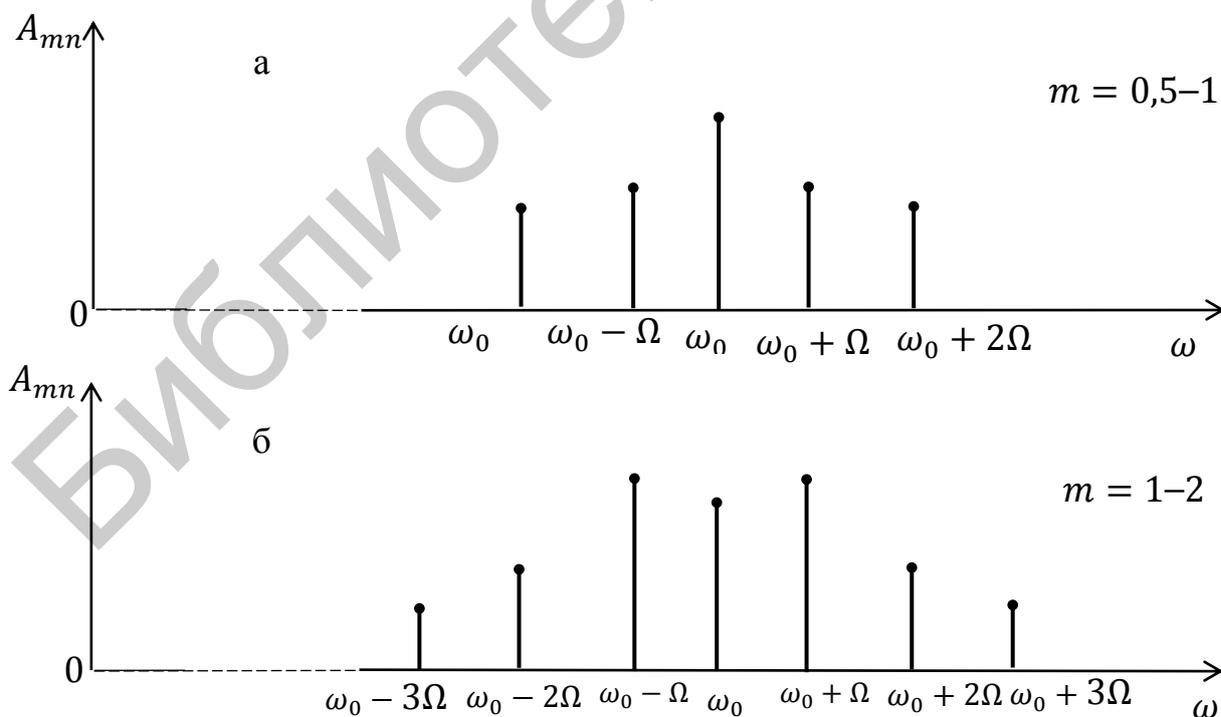


Рис. 1.73

При этом ширина спектра будет равна

$$\Delta\omega = 2m\Omega. \quad (1.124)$$

При одинаковых значениях  $m$ ,  $\omega_0$  и  $\Omega$  спектры сигналов с фазовой и частотной модуляцией одинаковы (рис. 1.74, а), а изменения  $m$  и  $\omega_0$  вызывают одинаковые изменения в спектрах этих колебаний.

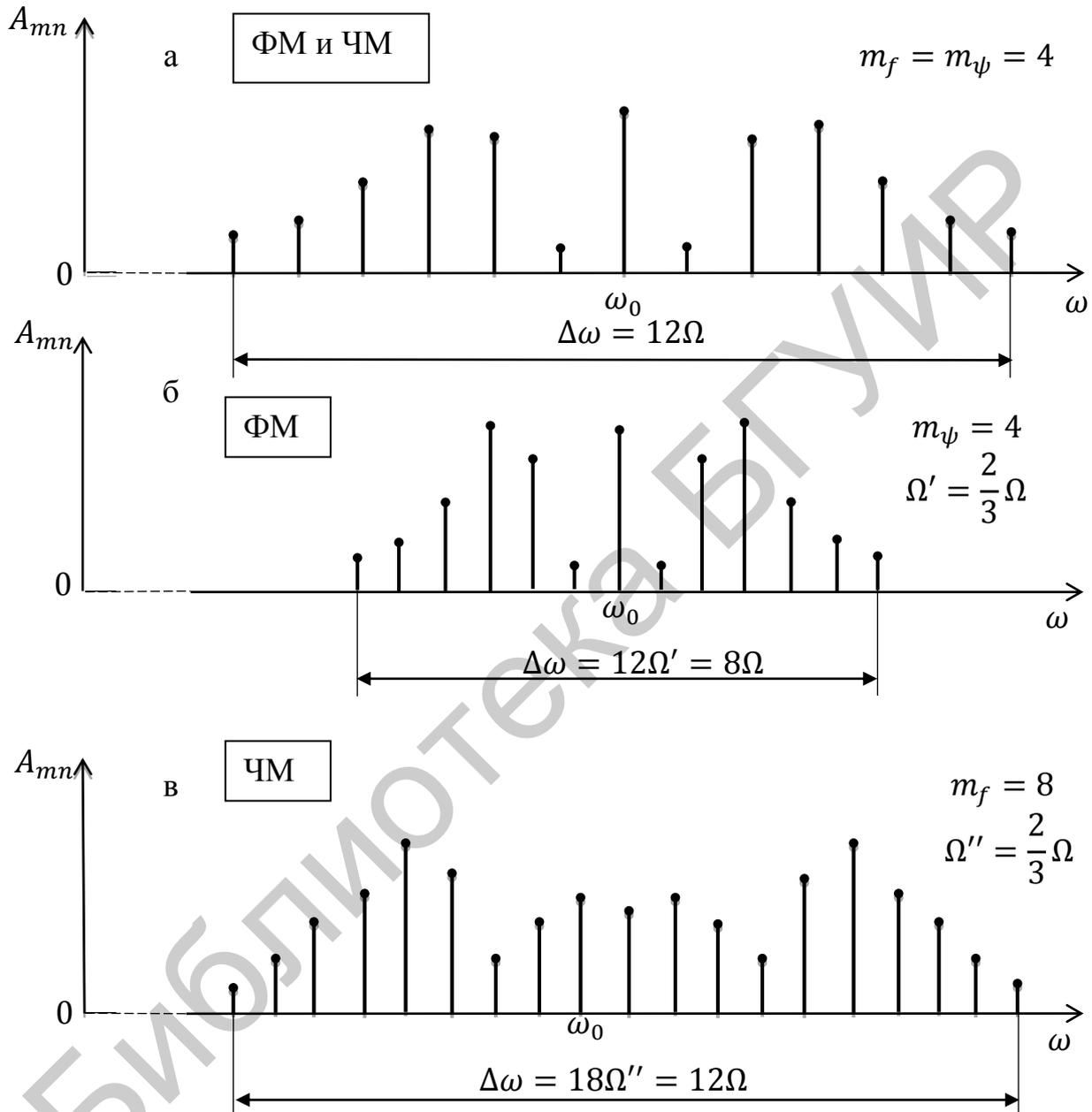


Рис. 1.74

С изменением  $\Omega$  изменяются интервалы между гармоническими составляющими по частоте у спектров сигналов обоих видов угловой модуляции.

У ФМ-сигналов изменение  $\Omega$  вызывает изменение ширины спектра (рис. 1.74, б). При этом соотношение между амплитудами гармоник не меняется, так как индекс фазовой модуляции  $m_\psi$  не зависит от  $\Omega$  ( $m_\psi = k_\psi A_m$ ).

У ЧМ-сигналов с изменением  $\Omega$  изменяется индекс частотной модуляции ( $m_f = k_f A_m / \Omega$ ), что приводит к изменению соотношения между амплитудами гармоник, т. е. к изменению вида спектра (рис. 1.74, в). При этом ширина спектра сигнала практически не изменяется.

Отличительной особенностью спектра ЧМ-колебания в сравнении с ФМ является практически независимость его ширины от частоты модуляции.

Таким образом, ЧМ в отличие от ФМ характеризуется постоянством спектров сигналов, что является одной из причин предпочтительного применения ЧМ на практике. ФМ- и ЧМ-колебания по сравнению с АМ занимают более широкую полосу частот, но обладают двумя важными преимуществами: высокой помехоустойчивостью и возможностью обеспечить передачу более мощного сигнала при равной мощности радиопередатчика, а значит, увеличить дальность радиосвязи.

Для сокращения ширины спектра (или сжатия спектра) необходимо увеличивать индекс модуляции  $m$  или период следования импульсов  $T$ .

В радиовещательных ЧМ-системах при девиации частоты, равной 75 кГц, и частоте модуляции в 1 кГц индекс модуляции  $m = 75/1 = 75$  и ширина спектра равна 150 кГц. В случае амплитудной модуляции ширина спектра равна лишь 2 кГц. Из этого следует вывод, что передача широкополосных ЧМ- и ФМ-сигналов практически возможна только в диапазоне ультракоротких волн (УКВ).

**Пример 1.8.** Рассчитать спектр ЧМ-радиосигнала с амплитудой  $U_m = 100$  мВ, если  $f_0 = 75$  МГц,  $\Delta f = 75$  кГц,  $\Omega = 15$  кГц.

**Решение**

1. Индекс модуляции и максимальный порядок учитываемой гармоники:  
 $m = \Delta f / \Omega = 75 / 15 = 5$ ;  $n_{\max} = m + 1 = 5 + 1 = 6$ .

2. Табличные значения функций Бесселя, взятые при аргументе  $m = 5$ , и рассчитанные с их помощью амплитуды гармонических составляющих приведены в прил. 4. Спектр сигнала показан на рис. 1.75.

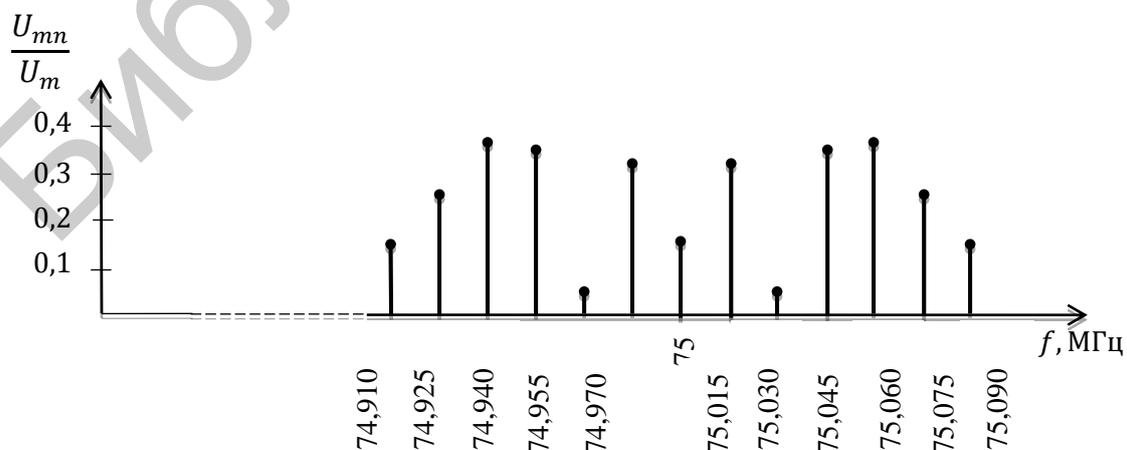


Рис. 1.75

#### 1.7.4. Спектр амплитуд радиоимпульсов с угловой модуляцией

##### А. Фазоманипулированный радиоимпульс

Фазоманипулированный радиоимпульс, имеющий длительность  $\tau_{\text{и}}$  (рис. 1.76, а), состоит из следующих непосредственно друг за другом  $m$  элементарных импульсов, у которых длительность  $\tau_0 = \tau_{\text{и}}/m$ , амплитуды  $A_m$  и несущие частоты одинаковы, а начальные фазы изменяются скачком.

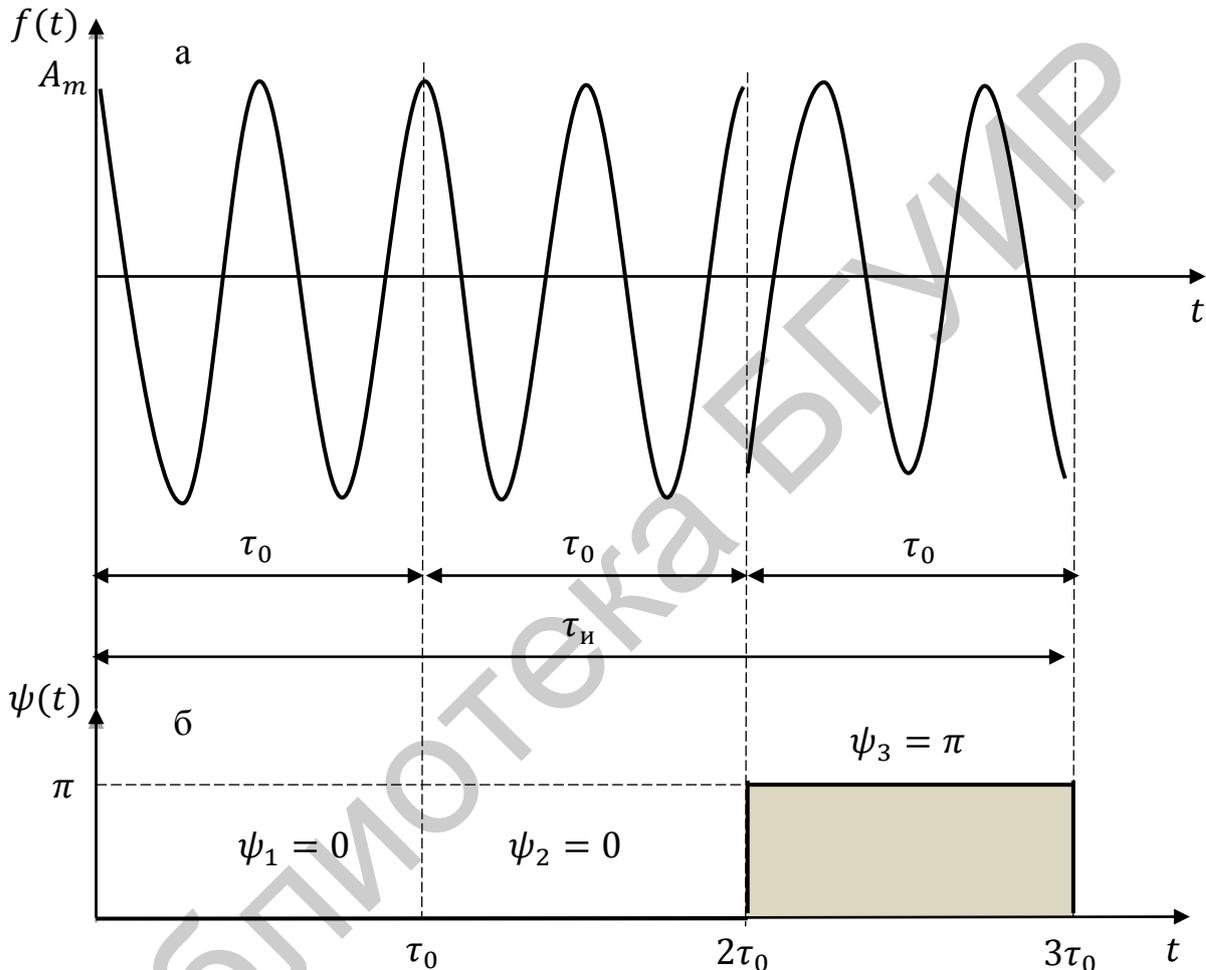


Рис. 1.76

Аналитически фазоманипулированный радиоимпульс записывается в виде

$$f(t) = \begin{cases} A_m \cos[\omega_0 t + \psi(t)] & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}; \\ 0 & \text{для остальных } t, \end{cases}$$

где  $\psi(t)$  – закон (код) фазовой манипуляции несущей.

В радиолокации используются фазоманипулированные импульсы, у которых начальные фазы элементарных импульсов равны 0 или  $\pi$ . На рис. 1.76, б закон чередования фаз следующий:  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ;  $\psi_3 = \pi$ .

Спектральная плотность фазоманипулированного радиоимпульса определяется как сумма спектральных плотностей элементарных импульсов:

$$F(j\omega) = \sum_{k=1}^m F_k(j\omega),$$

тогда спектральная плотность радиоимпульса запишется в виде

$$F(j\omega) = \sum_{k=1}^3 F_k(j\omega) = F_0(j\omega)e^{-j\omega\frac{\tau_0}{2}} + F_0(j\omega)e^{-j\omega\frac{3}{2}\tau_0} + F_0(j\omega)e^{-j(\omega\frac{5}{2}\tau_0 - \pi)} =$$

$$= F_0(j\omega)e^{-j\omega\frac{3}{2}\tau_0}(1 + j2\sin\omega\tau_0),$$

где  $F_0(j\omega)$  – спектральная плотность одиночного элементарного радиоимпульса прямоугольной формы, расположенного симметрично начала отсчета времени (рис. 1.77, а).

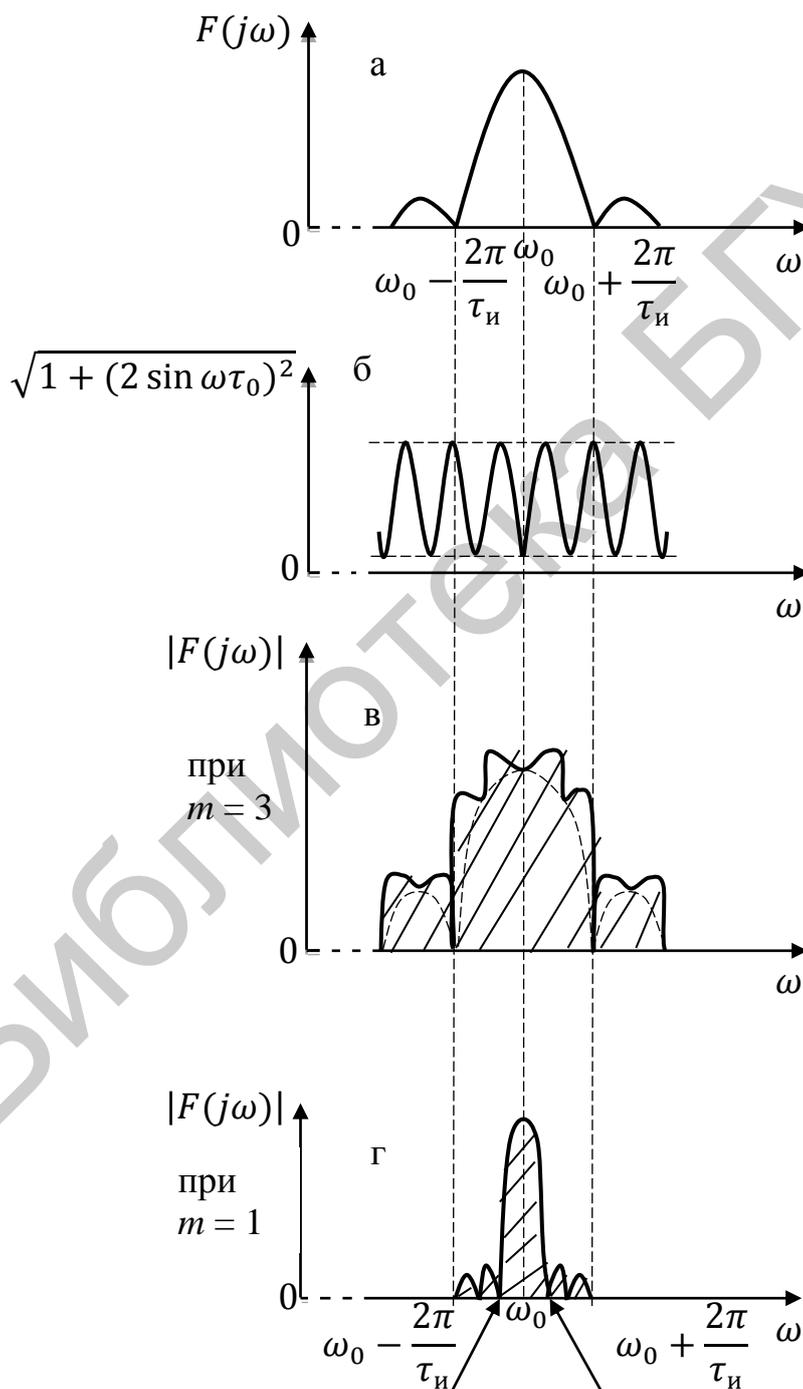


Рис. 1.77

Учитывая, что при  $\omega > 0$

$$F(j\omega) \approx \frac{A_m \tau_0 \sin[(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{2(\omega - \omega_0)\tau_0/2},$$

для спектральной плотности рассматриваемого фазоманипулированного радиоимпульса получим

$$F(j\omega) \approx \frac{A_m \tau_0 \sin[(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{2(\omega - \omega_0)\tau_0/2} e^{-j\frac{3}{2}\tau_0} (1 + j2\sin\omega\tau_0).$$

График модуля спектральной плотности для  $\omega > 0$  и  $m = 3$

$$|F(j\omega)| \approx \frac{A_m \tau_0}{2} \left| \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{(\omega - \omega_0)\tau_0/2} \right| \sqrt{1 + (2\sin\omega\tau_0)^2}$$

приведен на рис. 1.77, в. На рис. 1.77, б приведен график функции  $\sqrt{1 + (2\sin\omega\tau_0)^2}$ .

Для сравнения на рис. 1.77, г приведен график модуля спектральной плотности радиоимпульса прямоугольной формы при  $m = 1$  той же длительности и амплитуды, что и фазоманипулированного радиоимпульса, но без фазовой модуляции.

Ширина спектра фазоманипулированного радиоимпульса равна ширине спектра элементарного импульса и при больших  $m$  может быть значительно больше ширины спектра радиоимпульса без фазовой манипуляции.

**Б. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией**

На рис 1.78, а изображен одиночный радиоимпульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), огибающая которого есть прямоугольный видеоимпульс. При принятых на рис. 1.78, б обозначениях для угловой частоты можно записать

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \tag{1.125}$$

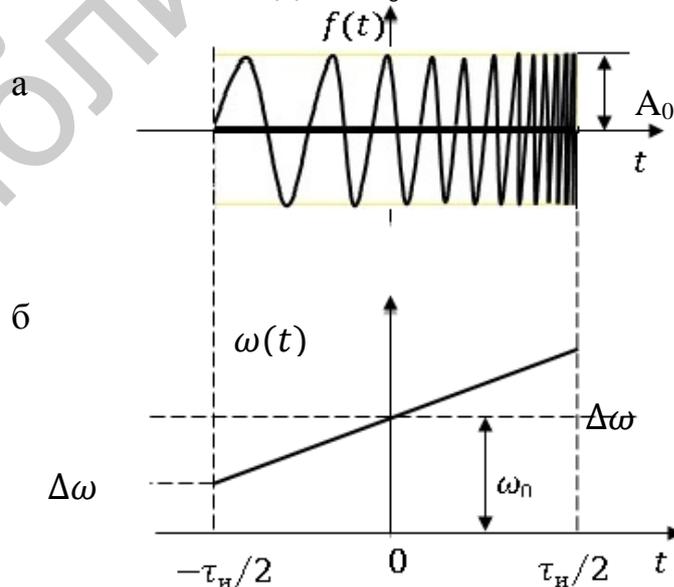


Рис. 1.78

где  $\alpha = 2\Delta\omega/\tau_{\text{и}}$  – скорость изменения частоты;  $\Delta\omega$  – максимальное отклонение (девиация) угловой частоты от среднего значения  $\omega_0$ .

Подставив в выражение (1.108) частоту  $\omega(t)$  из формулы (1.125), получим полную фазу рассматриваемого сигнала:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt + \psi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2 + \psi_0. \quad (1.126)$$

Если в выражении (1.126) положить  $\psi_0 = 0$ , то аналитическая запись рассматриваемого сигнала будет иметь вид

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \alpha t^2/2),$$

где  $\tau_{\text{и}}/2 \leq t \leq \tau_{\text{и}}/2$ .

Для определения спектральной плотности ЛЧМ-сигнала используем прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}\right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A_0}{2} \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{j[(\omega_0 - \omega)t + \alpha t^2/2]} dt + \frac{A_0}{2} \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{-j[(\omega_0 - \omega)t + \alpha t^2/2]} dt. \end{aligned}$$

Для области положительных частот:

$$F(j\omega) \approx \frac{A_0}{2} \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{j[(\omega_0 - \omega)t + \alpha t^2/2]} dt = \frac{A_0}{2} \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{j\gamma(t)} dt, \quad (1.127)$$

где  $\gamma(t) = (\omega_0 - \omega)t + \alpha t^2/2$ .

Дополним выражение для  $\gamma(t)$  до квадрата разности:

$$\gamma(t) = (t\sqrt{\alpha/2} - \beta)^2 - \beta^2, \quad (1.128)$$

где  $\beta = (\omega - \omega_0)/\sqrt{2\alpha}$ .

Подставив выражение (1.128) в спектральную плотность (1.127),

$$F(j\omega) \approx A_0/2 \cdot e^{-j\beta^2} \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{j(t\sqrt{\alpha/2} - \beta)^2} dt,$$

и перейдя к новой переменной  $x = t\sqrt{\alpha/2} - \beta$ , получим

$$F(j\omega) \approx \frac{A_0}{2} e^{-j\beta^2} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_{y_1}^{y_2} e^{jx} dx,$$

где пределы интегрирования равны

$$y_1 = \sqrt{\alpha\tau_{\text{и}}\tau_{\text{и}}/8} - \frac{\omega\omega_0}{\Delta\omega} \sqrt{\Delta\omega^2/2\alpha}; \quad y_2 = -\left(\sqrt{\alpha\tau_{\text{и}}\tau_{\text{и}}/8} - (\omega\omega_0/\Delta\omega) \sqrt{\Delta\omega^2/2\alpha}\right).$$

Безразмерный параметр  $\alpha\tau_{\text{и}}\tau_{\text{и}}$  имеет физический смысл индекса фазовой модуляции. Введем обозначение:  $m = \alpha\tau_{\text{и}}\tau_{\text{и}} = 2\Delta\omega\tau_{\text{и}}$ , где  $2\Delta\omega$  – полное изменение (девиация) угловой частоты внутри импульса. Тогда пределы интегрирования  $y_1$  и  $y_2$  будут следующие:

$$y_1 = 1 - \omega\omega_0/\Delta\omega \sqrt{m/8}, \quad y_2 = -(1 - \omega\omega_0/\Delta\omega \sqrt{m/8}),$$

а выражение для спектральной плотности запишется так:

$$F(j\omega) \approx \frac{A_0}{\sqrt{2\alpha}} e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} \left[ \int_0^{y_2} e^{jx^2} dx - \int_0^{y_1} e^{jx^2} dx \right] =$$

$$= 1/2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} A_0 e^{-j(\omega-\omega_0)^2/2\alpha} \{C(y_1) - C(y_2) + j[S(y_1) - S(y_2)]\},$$

где

$$C(y_1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_1} \cos x^2 dx; \quad C(y_2) = 2/\sqrt{2\pi} \int_0^{y_2} \cos x^2 dx;$$

$$S(y_1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_1} \sin x^2 dx; \quad S(y_2) = 2/\sqrt{2\pi} \int_0^{y_2} \sin x^2 dx.$$

Модуль спектральной плотности рассматриваемого сигнала

$$F(\omega) = 1/2 \sqrt{\pi/\alpha} A_0 \sqrt{[C(y_1) - C(y_2)]^2 + [S(y_1) - S(y_2)]^2}, \quad (1.129)$$

а фазовый спектр

$$\psi(\omega) = -(\omega - \omega_0)/2\alpha + \arctg \frac{S(y_1) - S(y_2)}{C(y_1) - C(y_2)}. \quad (1.130)$$

При больших значениях  $m$  (порядка 500 и более) форма модуля спектральной полосы (1.129) приближается к прямоугольной, ширина спектра близка к  $2\Delta\omega$ .

Второе слагаемое у фазового спектра (1.130) при больших значениях  $m$  приближается к постоянной величине, равной  $\frac{\pi}{4}$ , т. е. фазочастотный спектр близок к квадратичной параболе.

При  $|y_1| = |y_2| \gg 1$ ,  $C(y_1) - C(y_2) = 1$  и  $S(y_1) - S(y_2) = 1$ .

АЧС  $F(\omega) \approx \sqrt{\pi/2\alpha} A_0$ , ФЧС  $\psi(\omega) = \pi/4 - (\omega - \omega_0)^2/2\alpha$ .

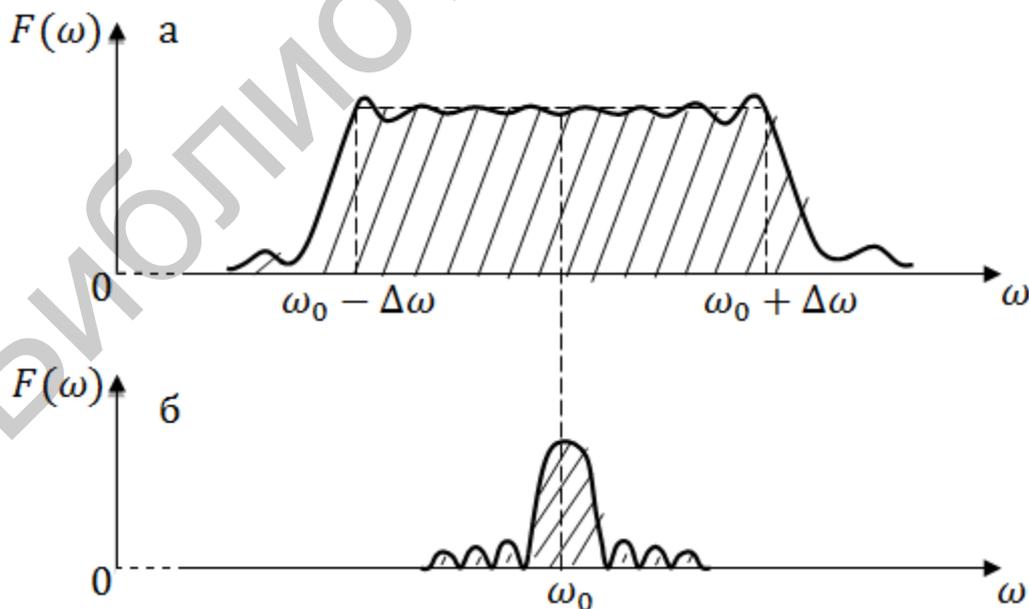


Рис. 1.79

На рис 1.79, а приведен спектр радиоимпульса прямоугольной формы с линейной частотной модуляцией при  $m = 628$ . Для сравнения на рис. 1.79, б изображен спектр радиоимпульса прямоугольной формы без ЛЧМ.

Таким образом, радиоимпульсы с ЛЧМ при  $m = 2\Delta\omega\tau_{\text{и}} \gg 1$  имеют спектральный состав, совпадающий со значением угловой частоты в радиоимпульсе. Модуль спектральной плотности приближается к форме прямоугольной огибающей радиоимпульса, а фазочастотный спектр близок к квадратной параболе.

### 1.7.5. Спектры при многотональной угловой модуляции

Если угловая модуляция производится не однотональным сигналом, а сигналом, содержащим несколько частотных компонентов, то задача нахождения спектрального состава становится довольно сложной. В этом случае применяются различные специальные формы расчета.

Если ограничиться небольшим количеством гармонических составляющих в составе модулирующего сигнала, то задача может быть решена аналогично случаю однотональной модуляции. Например, при

$$f(t) = A_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t)$$

боковые частоты будут равны  $\omega_0 \pm a\Omega_1 \pm b\Omega_2$ , где  $a$  и  $b$  – целые числа от 0 до  $\infty$ .

Амплитуды боковых составляющих будут определяться произведениями вида  $A_m J_a(m_1) J_b(m_2)$ .

Так как  $J_a(m_1)$  и  $J_b(m_2)$  – числа меньше единицы, то эти произведения малы. Поэтому несмотря на появление ряда новых комбинационных частот, существенных изменений ширины спектра за их счет не происходит.

**Пример 1.9.** Рассчитать амплитудно-частотный спектр радиосигнала и ширину его спектра, если при частотной модуляции передается тон с частотой 5 кГц. Несущая частота 100 МГц. Девияция частоты 50 кГц. При расчете принимать во внимание гармонические составляющие с амплитудой не менее 1 А. Амплитуда немодулированных колебаний равна 10 А.

**Решение.** Индекс частотной модуляции  $m_f = \Delta f / f = 50 / 5 = 10$ . Пользуясь математическим справочником, составляем табл. П.5.1 (прил. 5). Все последующие значения функции Бесселя менее 0,01.

Согласно выражению

$$f(t) = A_m \{ J_0(m) \cos \omega_0 t + J_1(m) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ + J_2(m) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ + J_3(m) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \\ + J_4(m) [\cos(\omega_0 + 4\Omega)t - \cos(\omega_0 - 4\Omega)t] \dots \}$$

амплитуды гармонических составляющих спектра равны  $A_m J_n(m)$ . Так как  $A_m = 10$  А, то согласно условиям примера ограничимся рассмотрением составляющих, для которых  $10J_n(m) \geq 1$ , т. е.  $J_n(m) \geq 0,1$ . В результате

получаем амплитуды гармоник на соответствующих частотах (табл. П.5.2. прил. 5). Ширина спектра  $\Delta f = 2F(m + 1)$ , т. е.

$$\Delta f = 2 \cdot 5 \cdot (10 + 1) = 110 \text{ кГц.}$$

### 1.7.6. Сравнение колебаний при амплитудной и угловой модуляции

ФМ(ЧМ) с энергетической точки зрения выгоднее АМ. При АМ амплитуды изменяются от  $A_0$  до  $A_0(1 + m)$ . Если  $m$  меняется от 0 до 100 % (например при радиовещании), то амплитуда тока (напряжения) изменяется в 2 раза и, следовательно, мощность изменяется в 4 раза. На эти максимальные значения тока, напряжения мощности рассчитываются все детали передатчика и источника питания. При угловой модуляции амплитуда постоянна. Поэтому не нужен излишний запас прочности деталей и энергии источников питания.

Ширина спектра при АМ меньше, чем при ФМ(ЧМ). Например, звуковое сопровождение телепередач осуществляется с помощью ЧМ, причем качественная передача сигналов обеспечивается с частотой  $F_{\max} = 7,5$  кГц. В случае АМ ширина спектра была бы  $\Delta f_c = 2 \cdot 7,5 = 15$  кГц, тогда как при ЧМ ширина спектра равна 150 кГц. При такой ширине спектра передача ЧМ сигнала возможна лишь на очень высоких частотах, так как:

- при заданном качестве контуров  $Q$ , чтобы обеспечить полосу пропускания  $2\Delta f = f_0/Q$ , нужна высокая частота  $f_0$ ;
- для эффективного излучения самых низких по частоте боковых составляющих необходимо, чтобы  $f_0 \gg F_{\max}$ ;
- работу соседних передатчиков необходимо обеспечивать без перекрытия их спектров и без взаимных помех.

При ЧМ(ФМ) помехоустойчивость больше, чем при АМ. Пусть, например, в передатчике осуществляется модуляция по закону  $a(t) = D_m \sin \Omega t$ . Тогда при АМ коэффициент амплитудной модуляции  $m$  пропорционален  $D_m$ . При ЧМ(ФМ) индекс модуляции  $m_f(m_\psi)$  пропорционален  $D_m$ . В приемнике колебания после усиления и детектирования на выходе имеют амплитуду  $U_{m \text{ вых}}$ , пропорциональную  $m$  либо  $m_f(m_\psi)$ .

Если на вход приемника вместе с полезным сигналом, амплитуда напряжения которого  $U_{mc}$  и частота  $\omega_c$ , поступает гармоническая помеха с амплитудой напряжения  $U_{m\pi}$  и частотой  $\omega_\pi$ , то при  $\omega_c \approx \omega_\pi$  сигнал и помеха проходят через контуры приемника. Причем должно быть  $U_{mc} > U_{m\pi}$  (иначе прием сигнала вообще затруднен).

В приемниках, предназначенных для АМ-сигналов, изменение фазы на входе не отражается на амплитуде выходного напряжения, пропорциональной лишь амплитуде входного напряжения.

В результате при АМ-приеме появляется паразитная АМ, и индекс паразитной АМ будет равен  $m_\pi = U_{m\pi}/U_{mc}$ .

Значит,

$$U_{m \text{ вых } \pi} / U_{m \text{ вых } c} = m_\pi / m_c \geq U_{m\pi} / U_{mc}, \text{ так как } m_c \leq 1.$$

В приемниках же, предназначенных для приема ФМ(ЧМ)-сигналов, изменение амплитуды на входе (при наличии ограничителя амплитуд) не влияет на амплитуду на выходе. В приемнике появляется ЧМ(ФМ) с индексом модуляции

$$\operatorname{tg}(\Delta\psi_{\Pi \max}) = U_{m\Pi}/U_{m\sigma}.$$

Так как  $U_{m\Pi} < U_{m\sigma}$ , то  $\operatorname{tg}(\Delta\psi_{\Pi \max}) \approx \Delta\psi_{\Pi \max}$  и  $U_{m \text{ Вых } \Pi}/U_{m \text{ Вых } \sigma} \approx \Delta\psi_{\Pi \max} = m$ , то  $U_{m \text{ Вых } \Pi}/U_{m \text{ Вых } \sigma} = m_{\Pi}/m_{\sigma} \leq U_{m\Pi}/U_{m\sigma}$ , поскольку  $m_{\sigma} \gg 1$ .

Таким образом, при АМ отношение амплитуды помехи к амплитуде сигнала на выходе приемника равно или больше, чем на входе, а при ЧМ(ФМ) отношение амплитуд на выходе много меньше, чем на входе.

**П р и м е р 10.** Определить, на какой длине волны  $\lambda$  должен работать передатчик ЧМ-колебаний, если ширина спектра его сигнала  $\Delta f_c = 150$  кГц, а качество контуров приемника  $Q = 100$ .

**Р е ш е н и е.** Так как  $Q = f_0/2\Delta f_{\Pi}$ , и надо, чтобы  $\Delta f_c \leq 2\Delta f_{\Pi}$ , то  $f_0 = Q2\Delta f_{\Pi} \geq Q\Delta f_c = 15 \cdot 10^6 = 15$  МГц, отсюда  $\lambda = 3 \cdot 10^8/(15 \cdot 10^6) = 20$  м.

### 1.8. Импульсная модуляция

Периодическая последовательность импульсов независимо от формы отдельного импульса характеризуется следующими параметрами:

- 1) максимальным значением амплитуды тока или напряжения;
- 2) длительность каждого импульса  $\tau_{\text{и}}$ ;
- 3) частотой следования импульсов  $F = 1/T$ , где  $T$  – период повторения импульсов;
- 4) временным сдвигом импульса, который определяет положение каждого импульса во времени по отношению к точкам на оси времени, расположенным относительно друг друга с интервалами, равными периоду следования импульсов.

Воздействие на четыре перечисленных параметра периодической последовательности импульсов дает столько же основных видов импульсной модуляции.

**П е р в ы й** в и д: амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), т. е. по модулирующему закону  $a_{\text{упр}}(t)$  меняются только амплитуды импульсов (рис. 1.80). Все остальные параметры, характеризующие периодическую последовательность импульсов, остаются неизменными.

Существуют два вида АИМ: первого и второго рода. При АИМ первого рода (АИМ-1) модулированное напряжение или ток в течение всего времени существования каждого импульса (рис.1.80, в) следует за изменением модулирующего напряжения или тока (рис.1.80, б). При АИМ второго рода (АИМ-2) модулированное напряжение или ток (рис. 1.80, г) в течение всего времени существования каждого импульса определяется некоторым заданным фиксированным значением модулирующего напряжения.

Второй вид: модуляция импульсов по длительности (ДИМ), т. е. по модулирующему закону меняется только длительность импульса. Все остальные параметры, характеризующие периодическую последовательность импульсов, остаются неизменными. Модуляция импульсов по длительности может быть односторонней (ОДИМ) и двухсторонней (ДДИМ).



Рис. 1.80

На рис. 1.81, а изображены немодулированные импульсы. При ОДИМ модулируется лишь один из фронтов каждого импульса – передний или задний (рис. 1.81, б). Двухсторонняя модуляция приведена на рис. 1.81, в.

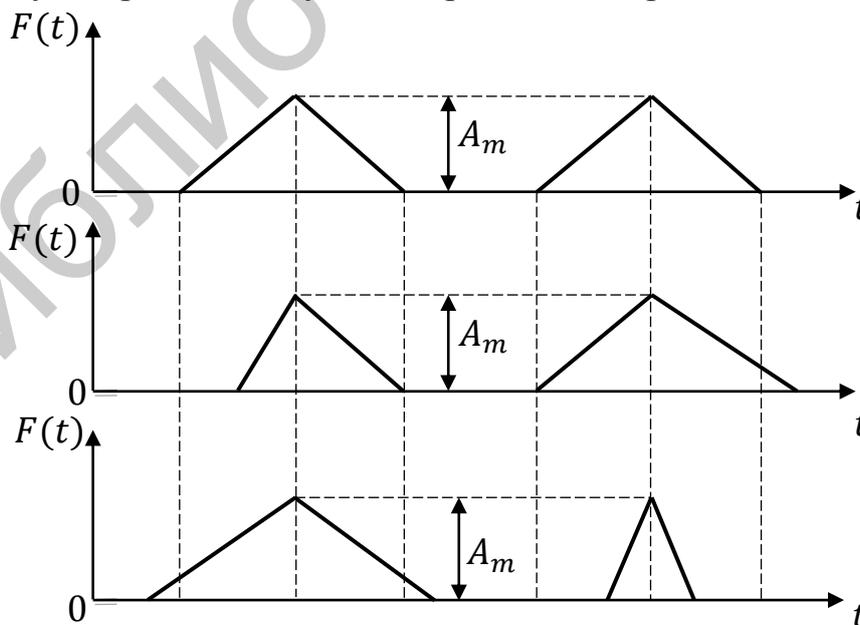


Рис. 1.81

Модуляция импульсов по длительности так же, как АИМ, бывает 1-го и 2-го рода. При импульсной модуляции по длительности 1-го рода (ДИМ-1) момент начала увеличения (или уменьшения) длительности импульса определяется значением модулирующего напряжения в этот же самый момент (рис. 1.82, в). При импульсной модуляции по длительности 2-го рода (ДИМ-2) начало увеличения (или уменьшения) длительности каждого импульса определяется значением модулирующего напряжения в заданный момент (рис. 1.82, г). Немодулированные импульсы изображены на рис. 1.82, б, модулирующее напряжение – на рис. 1.82, а.

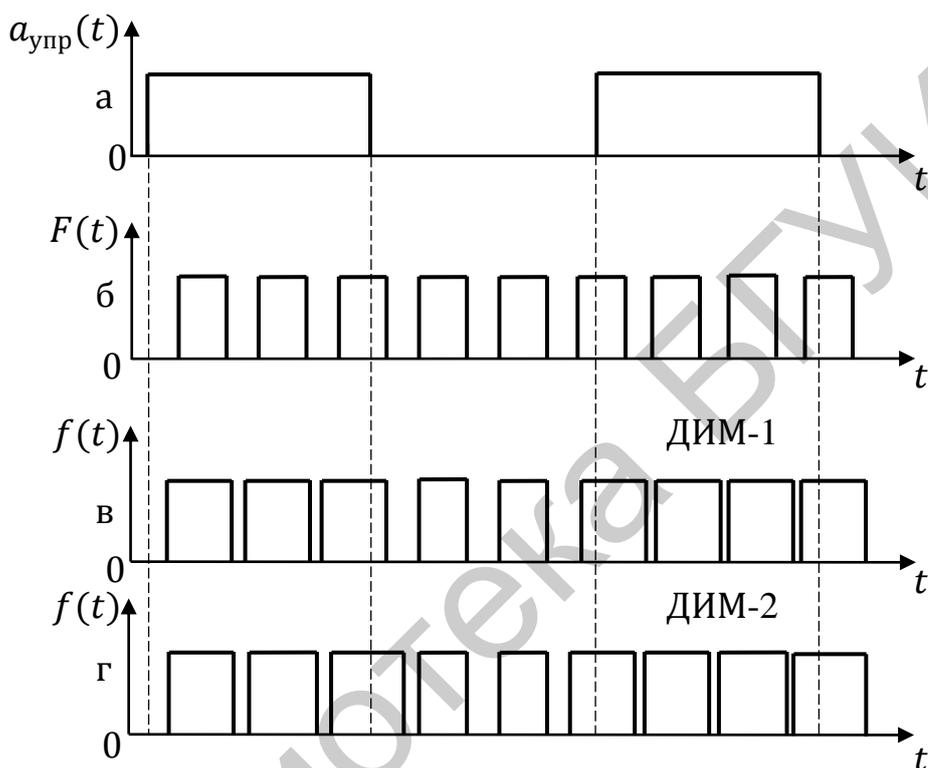


Рис. 1.82

Т р е т ь и й в и д: частотно-импульсная модуляция (ЧИМ), при которой частота следования импульсов изменяется по закону модулирующего сигнала (импульсы следуют друг за другом то чаще, то реже, рис. 1.83, в). При модуляции импульсов по частоте получается одновременно модуляция и по фазе. Амплитуда и длительность при ЧИМ остаются неизменными. Немодулированные по ЧИМ импульсы изображены на рис. 1.83, б, модулирующее напряжение – на рис. 1.83, а.

Ч е т в е р т ы й в и д: фазоимпульсная (ФИМ), или временная импульсная модуляция (ВИМ) – это модуляция периодической последовательности импульсов, осуществляемая путем сдвига этих импульсов во времени пропорционально значениям модулирующего напряжения.

Сдвиг импульсов приводит к неравномерному их распределению на оси времени, что соответствует переменной частоте следования. Таким образом, модуляция периодических импульсов по фазе вызывает модуляцию их по частоте. Амплитуда и длительность импульсов при ФИМ остаются неизменными.

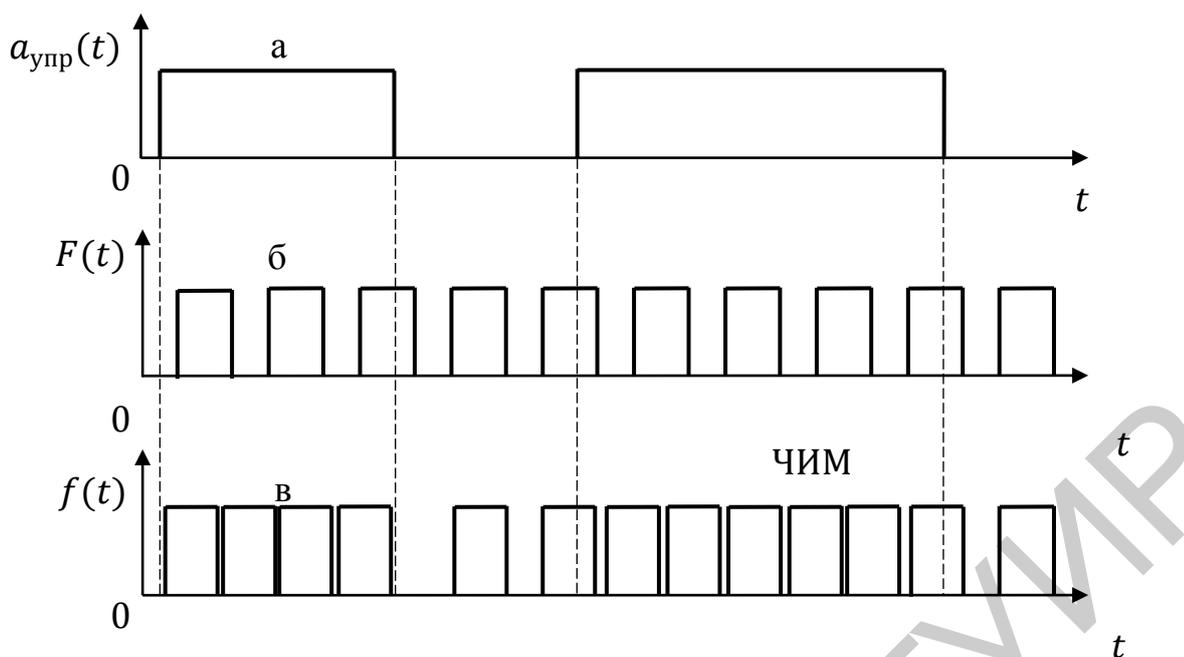


Рис. 1.83

ФИМ (ВИМ) может быть 1-го и 2-го рода. ФИМ-1 или ВИМ-1 – это фазоимпульсная модуляция, при которой временной сдвиг каждого импульса пропорционален значению модулирующей функции в момент, соответствующий началу этого импульса (рис. 1.84, в). ФИМ-2 или ВИМ-2 – это фазоимпульсная модуляция, при которой временное смещение каждого импульса пропорционально модулирующей функции в заданные моменты времени (рис. 1.84, г). Немодулированные по ФИМ (ВИМ) импульсы изображены на рис. 1.84, б, модулирующее напряжение – на рис. 1.84, а.

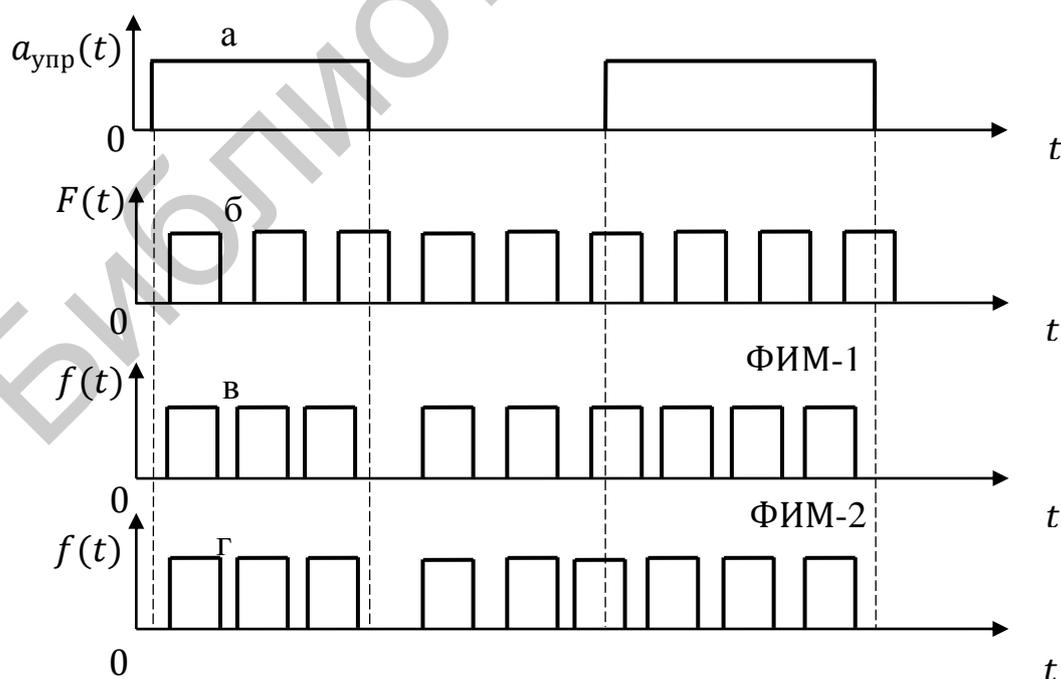


Рис. 1.84

Рассмотренные четыре основных вида импульсной модуляции применимы и к периодической последовательности радиоимпульсов. Графики модулированной несущей функции при этом будут содержать высокочастотное заполнение. При использовании для передачи сигналов периодической последовательности радиоимпульсов возможна модуляция изменением высокой несущей частоты.

Высокочастотная импульсная модуляция (ВЧИМ) – это модуляция периодической последовательности радиоимпульсов, при которой высокая частота заполнения этих импульсов изменяется по закону модулирующего сигнала. При этом все остальные величины, характеризующие последовательность радиоимпульсов (амплитуда, длительность, положение во времени), остаются неизменными.

Кроме рассмотренных, существуют и другие виды импульсной модуляции. Например, комбинированные виды импульсной модуляции, когда модулирующая функция воздействует одновременно на несколько параметров.

Библиотека БГУИР

## 2. Преобразование спектров сигналов в линейных электрических цепях

### 2.1. Связь между спектрами сигналов на входе и выходе линейной электрической цепи

В отличие от задач электротехники, в которых интересуются процессом установления режима в цепи при коммутациях, в радиотехнике, радиолокации, импульсной технике первостепенное значение имеет задача исследования влияния переходных процессов на форму сигнала. Она может быть решена частотным или спектральным методом наложения с использованием частотных характеристик цепи и воздействующих сигналов.

Поскольку в основе спектрального метода лежит принцип наложения, то такой метод называется *линейным* и он справедлив для решения задач анализа прохождения сигналов через линейные электрические цепи (ЛЭЦ).

Анализ прохождения сигналов спектральным методом может быть проведен с использованием как вещественных, так и комплексных величин.

Спектры сигналов на выходе и входе ЛЭЦ связаны между собой комплексной передаточной функцией цепи:

$$K(j\omega) = \dot{X}_m / \dot{F}_m ,$$

где  $\dot{F}_m$  и  $\dot{X}_m$  – комплексные амплитуды входной и выходной величин (воздействие и реакция ЛЭЦ), изменяющихся по гармоническому закону.

Если сигнал на входе ЛЭЦ – периодический, спектр которого дискретный, то  $K(j\omega)$  для каждой гармонической составляющей равна

$$K(j\omega_k) = K(\omega_k) \cdot e^{j\varphi_k} = \frac{\dot{X}_{mk}}{\dot{F}_{mk}} = \frac{X_{mk}}{F_{mk}} \cdot e^{j(\varphi_{k \text{ Вых}} - \varphi_{k \text{ Вх}})} ,$$

где  $\omega_k$  – частота  $k$ -й гармоники спектра.

Из последнего соотношения следует, что

$$X_{mk} e^{j\psi_{k \text{ Вых}}} = F_{mk} e^{j\psi_{k \text{ Вх}}} \cdot K(\omega_k) \cdot e^{j\varphi_k} , \quad (2.1)$$

откуда

$$X_{mk} = F_{mk} \cdot K(\omega_k) , \quad \psi_{k \text{ Вых}} = \psi_{k \text{ Вх}} + \varphi_k ,$$

т. е. для получения спектра амплитуд сигнала на выходе ЛЭЦ необходимо амплитуду каждой  $k$ -й гармоники спектра сигнала на входе ЛЭЦ умножить на модуль комплексной передаточной функции ЛЭЦ на частоте данной гармоники, а для получения спектра фаз сигнала на выходе ЛЭЦ необходимо к значению фазы каждой  $k$ -й гармоники спектра сигнала на входе ЛЭЦ прибавить значение аргумента комплексной передаточной функции ЛЭЦ на частоте данной гармоники.

Таким образом, спектральный метод расчета прохождения периодических сигналов через ЛЭЦ основан на использовании разложения сигнала в ряд Фурье.

При расчете:

– входной сигнал представляют в виде ряда Фурье;

– определяют необходимую входную или комплексную передаточную функцию ЛЭЦ;

– комплексные амплитуды гармонических составляющих выходного сигнала рассчитывают по формуле (2.1) как произведение комплексных амплитуд входного сигнала на комплексную передаточную функцию ЛЭЦ, а начальные фазы входных спектральных составляющих складывают со значениями аргумента коэффициента передачи на соответствующих частотах.

Так как на различных частотах значения  $|K(j\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  в общем случае различны, то происходит изменение амплитуд и начальных фаз составляющих спектра. Спектр отклика имеет те же частоты составляющих, что и спектр воздействия, но амплитуды и фазы оказываются иными.

В результате суперпозиции выходных компонентов сигнала получается отклик, который может отличаться по форме от воздействующего сигнала. Происходит искажение сигнала за счет различной реакции ЛЭЦ на его отдельные спектральные составляющие. Такого рода искажения называют *частотными*, или *линейными*.

Если сигнал на входе ЛЭЦ – непериодический, спектр которого сплошной, то комплексная передаточная функция ЛЭЦ для такого сигнала равна отношению спектральной плотности сигнала на выходе к спектральной плотности сигнала на ее входе:

$$K(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)},$$

откуда

$$X(j\omega) = F(j\omega) K(j\omega) = |F(j\omega)| K(\omega) \cdot e^{j[\psi_{\text{вх}}(\omega) + \varphi(\omega)]},$$

$$\text{и} \quad |X(j\omega)| = |F(j\omega)| K(\omega); \quad \psi_{\text{вых}}(\omega) = \psi_{\text{вх}}(\omega) + \varphi(\omega), \quad (2.2)$$

т. е. для определения модуля спектральной плотности сигнала на выходе ЛЭЦ необходимо модуль спектральной плотности сигнала на входе цепи умножить на модуль комплексной передаточной функции ЛЭЦ на соответствующей частоте, а для фазочастотного спектра выходного сигнала необходимо к аргументу спектральной плотности входного сигнала прибавить аргумент комплексной передаточной функции на соответствующей частоте.

Значение выходного сигнала как функцию времени находят с помощью обратного преобразования Фурье путем наложения бесконечно большого числа его гармонических составляющих:

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.3)$$

Таким образом, по известной комплексной передаточной функции ЛЭЦ и спектральной плотности входного сигнала с помощью спектрального метода можно рассчитать реакцию ЛЭЦ на любое заданное воздействие.

При расчете:

- находят спектральную плотность входного сигнала;
- определяют комплексную передаточную функцию ЛЭЦ;

– рассчитывают спектральную плотность выходного сигнала по формуле (2.2);

– сигнал на выходе находят согласно принципу наложения по формуле (2.3).

Таким образом, анализ прохождения сигнала через ЛЭЦ спектральным методом состоит из решения следующих задач.

1. Находят спектр сигнала на выходе ЛЭЦ. При этом для периодических сигналов определяют комплексные амплитуды гармоник ряда Фурье в соответствии с выражением

$$\dot{F}_{mn} = F_{mn} e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt,$$

для непериодических сигналов находят спектральную плотность с помощью интеграла Фурье по формуле

$$F_{mn} e^{-j\psi_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

2. Определяют комплексную передаточную функцию цепи  $K(j\omega)$ , и, воспользовавшись соотношением (2.1) для периодического сигнала или соотношением (2.2) для непериодического, находят спектр сигнала на выходе ЛЭЦ.

3. Определяют выходной сигнал как сумму ряда согласно выражению

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{F}_{mn} e^{jn\omega_1 t},$$

где

$$\dot{F}_{mn} = F_{mn} e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

для периодического сигнала, или как интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

для непериодического сигнала.

При сигналах, содержащих большое число частотных компонентов, решение последней (третьей) задачи по определению отклика путем суперпозиции отдельных гармонических составляющих на выходе ЛЭЦ, как правило, оказывается очень громоздким и трудоемким с точки зрения математической обработки. Преодолеть трудности вычислительного характера можно двумя путями:

1) не вычисляя отклика на выходе ЛЭЦ, оценивают искажения путем сопоставления спектров сигнала на входе и выходе ЛЭЦ электрической цепи, сравнения ширины спектра входного сигнала и полосы пропускания ЛЭЦ. Если окажется, что основная часть спектра входного сигнала располагается в пределах полосы пропускания ЛЭЦ, то можно считать, что выходной сигнал не

будет существенно отличаться по форме от входного, т. е. искажения сигнала будут несущественными;

2) при расчете отклика на выходе ЛЭЦ свести полученное выражение к табличному, которое можно найти в справочниках по математике. В последнее время, например, разработаны методы сведения различных видов сумм рядов спектральных составляющих к ограниченному количеству табличных выражений.

## 2.2. Прохождение сигналов с дискретными спектрами через линейные электрические цепи

### 2.2.1. Прохождение однотонольно амплитудно-модулированного сигнала через колебательный контур

На вход колебательного контура (рис. 2.1) подается однотонольно АМ-колебание (см. рис. 1.46, г):

$$f(t) = U_{\text{вх}}(t) = U_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = U_m \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} U_m \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m}{2} U_m \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (2.4)$$

В этом равенстве для упрощения расчетов принято  $\psi_0 = 0$  и  $\theta = 0$ , а  $\Omega \ll \omega_0$ . Контур настроен на несущую частоту сигнала  $\omega_0$ .

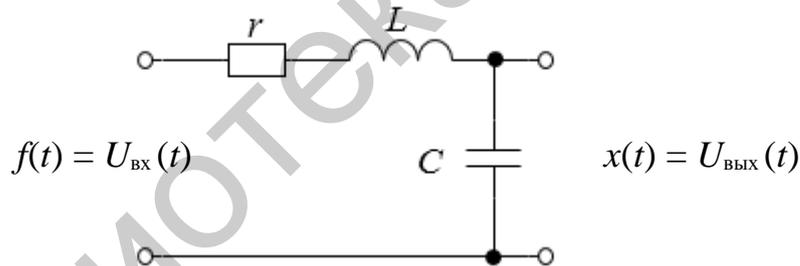


Рис. 2.1

Комплексная передаточная функция по напряжению на емкости

$$K_{U_c}(j\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(t)}{U_{\text{ВХ}}(t)} = \frac{\dot{U}_c}{\dot{U}} = \frac{1}{j\omega C} Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega r C (1 + jQ^2 \xi^2)}.$$

При настройке контура в резонанс ( $\omega = \omega_0$ )

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg } Q\xi, \quad (2.5)$$

а 
$$K_{U_c}(\omega) = \frac{1}{\omega_0 r C \sqrt{(1 + jQ^2 \xi^2)}} = \frac{Q}{\sqrt{(1 + jQ^2 \xi^2)}}, \quad (2.6)$$

где добротность  $Q = \frac{1}{\omega_0 r C}$ , фактор расстройки  $\xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ .

Считая, что полоса пропускания контура  $\Delta F$  равна ширине спектра входного сигнала  $2\Omega$  (рис. 2.2, а, б), найдем спектры амплитуд и фаз выходного сигнала. На несущей частоте  $\xi = 0$ ,  $K_{U_c}(\omega_0) = Q$  (согласно равенству (2.5)),

тогда  $U_{m \text{ вых}}(\omega_0) = U_{m \text{ вх}}(\omega_0) K_{U_c}(\omega_0) = QU_m$ , т. е. амплитуда гармоники на несущей частоте при прохождении через колебательный контур возросла в  $Q$  раз (рис. 2.2, в).

На боковых частотах ( $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ ) при условии  $\Omega \ll \omega_0$  фактор расстройки контура

$$\xi = \frac{\omega_0 \pm \Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 \pm \Omega} = \frac{\pm 2\omega_0 \Omega}{\omega_0^2} = \pm \frac{2\Omega}{\omega_0}.$$

Тогда равенство (2.5) примет вид

$$K_{U_c}(\omega_0 \pm \Omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}}, \quad (2.7)$$

где полоса пропускания  $\Delta F = 2\Omega$  заменена выражением  $\Delta F = \omega_0/Q$ .

Используя спектральное представление входного сигнала с однотоновой амплитудной модуляцией (1.79) и выражение (2.7), получим

$$U_{m \text{ вых}}(\omega_0 \pm \Omega) = U_{m \text{ вх}}(\omega_0 \pm \Omega) K_{U_c}(\omega_0 \pm \Omega) = \frac{m}{2} U_m \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{m'}{2} U_m Q, \quad (2.8)$$

где

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

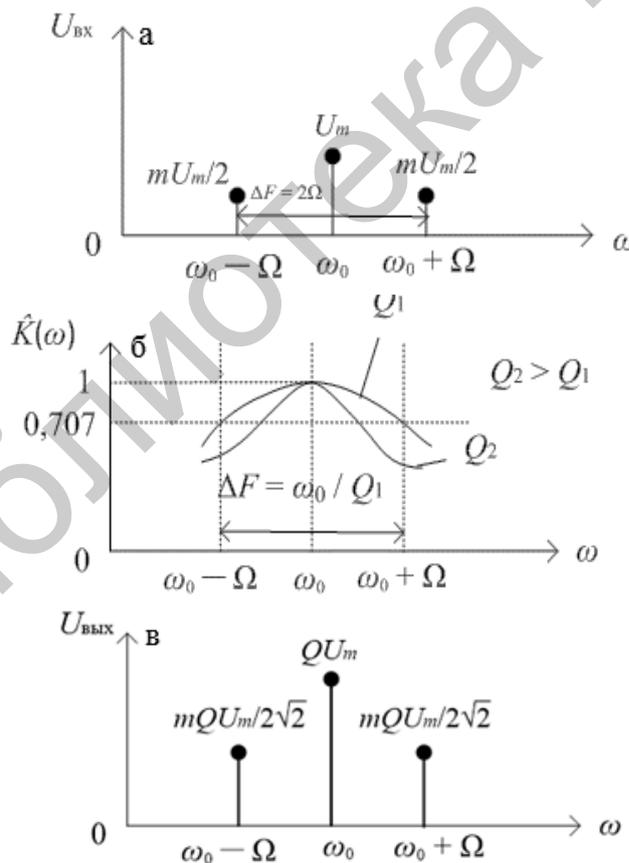


Рис. 2.2

Из выражения (2.8) следует, что произошло изменение соотношения амплитуд. В результате вместо коэффициента модуляции  $m$  получился

меньший коэффициент модуляции  $m'$ . Это приводит к амплитудно-частотным искажениям сигнала, сводящимся к его демодуляции. Эти искажения объясняются:

а) со спектральной точки зрения – неодинаковым изменением амплитуд на различных частотах. Чем больше  $Q$  и  $\Omega$ , тем меньше  $m'$ , т. е. больше демодуляция, так как тем больше несоответствие между полосой пропускания системы, определяемой добротностью  $Q$ , и шириной спектра, определяемой  $\Omega$ ;

б) с временной точки зрения – чем больше  $Q$ , тем инерционнее ЛЭЦ, тем больше ее постоянная времени. Чем больше  $\Omega$ , т. е. чем меньше период модуляции  $T = 2\pi/\Omega$ , тем более не соответствует этот малый период времени установлению процессов в ЛЭЦ.

Помимо изменения амплитуд гармоник, изменяются их начальные фазы. ФЧС сигнала на выходе контура, согласно (2.1)  $\psi_{\text{квых}} = \psi_{\text{квх}} + \varphi_k$ . При  $\psi_{\text{квх}} = 0$  (рис. 2.3, а)  $\psi_{\text{квых}} = \varphi_k = \varphi(\omega_k)$  и, согласно формуле (2.5), на частоте  $\omega_0$   $\psi_{\text{квых}}(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$ , так как при  $\omega_0$   $\xi = 0$ .

На частотах  $(\omega_0 \pm \Omega)$   $\xi = \frac{2\Omega}{\omega_0}$ , поэтому  $\psi_{\text{квых}}(\omega_0 \pm \Omega) = -\frac{\pi}{2} \mp \psi'$ , где  $\psi' = \text{arctg } Q \frac{2\Omega}{\omega_0}$ .

Если полоса пропускания контура  $2\Delta\omega_{\text{п}}$  равна ширине спектра  $2\Omega$ , то  $Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_{\text{п}}} = \frac{\omega_0}{2\Omega}$  и  $Q \frac{2\Omega}{\omega_0} = 1$ , следовательно,  $\psi_{\text{квых}}(\omega_0 \pm \Omega) = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ .

График ФЧС контура приведен на рис. 2.3, б. График ФЧС выходного сигнала приведен на рис. 2.3, в.

Окончательно выходной сигнал записывается в следующем виде:

$$f_{\text{квых}}(t) = U_m Q [1 + m' \cos(\Omega t - \pi/4)] \cos(\omega_0 t - \pi/2).$$

Из сопоставления полученного выражения с формулой (2.4) следует, что при прохождении через колебательный контур огибающая амплитуд выходного АМ-сигнала отстает по фазе от огибающей амплитуд входного сигнала на угол  $\psi' = \text{arctg}(Q 2\Omega / \omega_0)$ , что соответствует запаздыванию во времени на

$$\Delta t = \frac{\psi'}{\Omega} = [\text{arctg}(Q 2\Omega / \omega_0)] / \Omega.$$

Запаздывание тем больше, чем больше  $Q$ . ЛЭЦ при росте  $Q$  становится более инерционной, в ней дольше протекают переходные процессы.

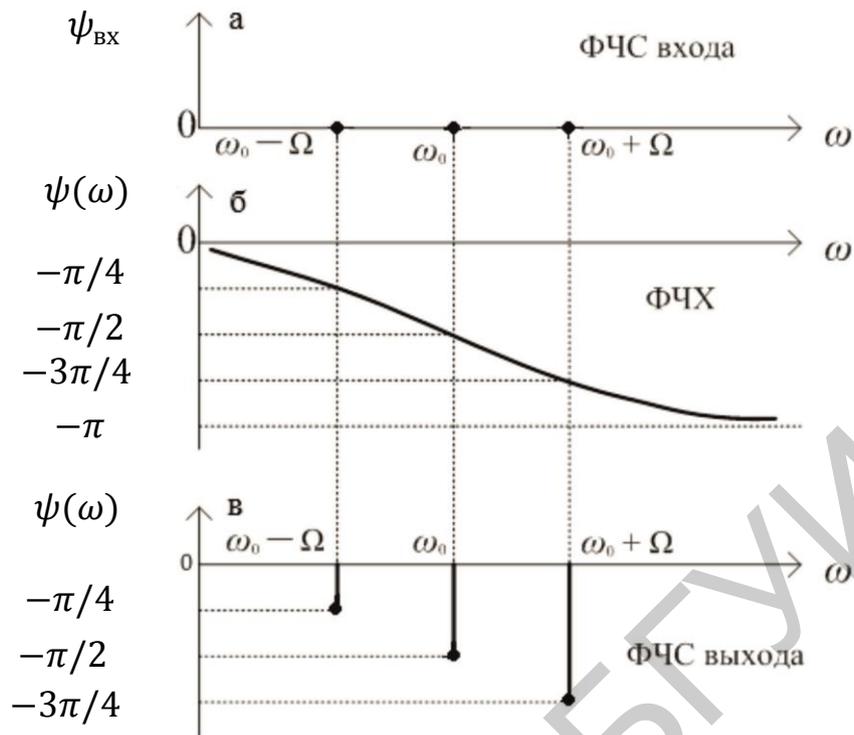


Рис. 2.3

### 2.2.2. Прохождение периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов через дифференцирующие цепи

На рис. 2.4 изображена периодическая последовательность прямоугольных видеоимпульсов, поступающая на вход дифференцирующей цепи (рис. 2.5).

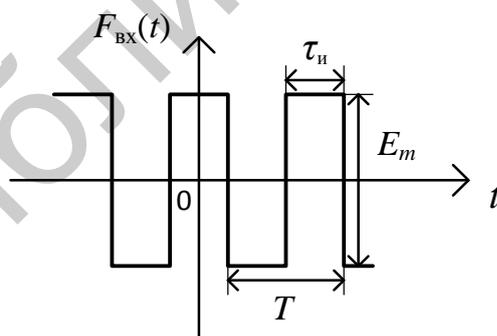


Рис. 2.4

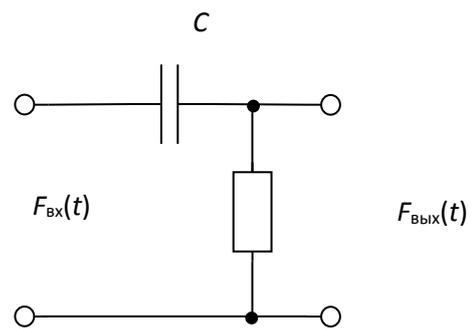


Рис. 2.5

Аналитическая запись входной функции

$$F_{\text{вх}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{E}_{mk} e^{jk\Omega t},$$

где

$$\dot{E}_{mk} = \frac{E_m}{q} \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} = \frac{E_m}{\pi} \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k}$$

при  $q = 2$  и равенстве нулю постоянной составляющей входного (а значит, и выходного) сигнала.

Отклик цепи:

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{E}_{mk} K(j\omega) e^{jk\Omega t},$$

где  $K(j\omega)$  – коэффициент передачи цепи:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega \tau_{\text{ц}}}},$$

где  $\tau_{\text{ц}} = RC$ , а значения  $\omega$  должны соответствовать частотным составляющим спектра сигнала на входе, то есть  $\omega = k\Omega$ , тогда

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega \tau_{\text{ц}}}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{k\Omega \tau_{\text{ц}}}} = \frac{1}{1 - j \frac{l}{k}},$$

где  $l = \frac{1}{\Omega \tau_{\text{ц}}}$ ,

$$\begin{aligned} \text{а} \quad F_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{E_m}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k - jl} e^{jk\Omega t} = \\ &= \frac{E_m}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k + jl}{k^2 + l^2} \sin k \frac{\pi}{2} (\cos k\Omega t + j \sin k\Omega t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В выражении (2.9) под знаком суммы содержится ряд слагаемых. Суммирование производится от  $k = -\infty$  до  $k = +\infty$ . Сумма всех нечетных функций от  $k$  обращается в нуль. Сумма всех четных функций от  $k$  может быть представлена в виде удвоенной суммы с пределами от  $k = 1$  до  $k = \infty$ . Составляющая спектра при  $k = 0$  отсутствует. В результате

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{2E_m}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{k}{k^2 + \alpha^2} \sin k \frac{\pi}{2} \cos k\Omega t - \frac{l}{k^2 + \alpha^2} \sin k \frac{\pi}{2} \sin k\Omega t \right]. \quad (2.10)$$

Используя тригонометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [-\sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta + \alpha)], \\ -\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [-\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha)] \end{aligned}$$

и вводя обозначения  $\Omega t + \frac{\pi}{2} = x_1$ ,  $\Omega t - \frac{\pi}{2} = x_2$ , выражение (2.10) преобразуем к виду

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{E_m}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + l^2} \sin kx_1 - \frac{E_m}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2 + l^2} \sin kx_2 + \\ + \frac{lE_m}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + l^2} \cos kx_1 - \frac{lE_m}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + l^2} \cos kx_2. \quad (2.11)$$

Полученные суммы являются табличными:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 + l^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\text{sh} l(\pi - x)}{\text{sh} lx} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi;$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + l^2} = \frac{\pi}{2l} \frac{\text{ch} l(\pi - x)}{\text{sh} lx} - \frac{1}{2l^2} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi.$$

С учетом того, что  $\text{sh } y + \text{ch } y = e^y$ , выражение (2.11) запишется в следующем виде:

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{E_m}{2 \text{sh } l\pi} [e^{l(\pi - x_1)} - e^{l(\pi - x_2)}]. \quad (2.12)$$

Но поскольку  $0 < x_1 < 2\pi$  или  $0 < \Omega t + \frac{\pi}{2} < 2\pi$ , откуда  $\frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}T$ , и  $0 < x_2 < 2\pi$ , откуда  $\frac{T}{4} < t < \frac{5}{4}T$ , то полученное решение (2.12) справедливо лишь для времени, удовлетворяющего обоим ограничениям как для  $x_1$ , так и для  $x_2$ , т. е. для интервала  $\frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}T$ . Для распространения полученного решения по всей оси времени, подставляя значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $l$  в (2.12), после преобразования получим

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{E_m}{2} \left(1 + \text{th} \frac{T}{2\tau_{\text{ц}}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{\tau_{\text{ц}}}(t - \frac{T}{4})}. \quad (2.13)$$

Но так как  $\pi - x_1 = \pi - (\Omega t + \frac{\pi}{2}) = -(\Omega t - \frac{\pi}{2})$  и  $\pi - x_2 = \pi - (\Omega t - \frac{\pi}{2})$ , то

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{E_m}{2 \text{sh } l\pi} e^{-l(2t - \frac{\pi}{2})} (1 - e^{l\pi}) = -\frac{E_m}{2} e^{-l(\Omega t - \frac{\pi}{2})} \frac{e^{l\pi} - 1}{\text{sh } l\pi}. \quad (2.14)$$

В данном выражении последний множитель можно преобразовать:

$$\frac{e^{l\pi} - 1}{\text{sh } l\pi} = 1 + \frac{\text{sh } l\pi + \text{ch } l\pi - 1}{\text{sh } l\pi} - 1 = 1 + \frac{\text{ch } l\pi - 1}{\text{sh } l\pi} = 1 + \text{th} \frac{l\pi}{2},$$

тогда

$$F_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{E_m}{2} \left(1 + \text{th} \frac{l\pi}{2}\right) \cdot e^{-l(\Omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (2.15)$$

где  $\frac{l\pi}{2} = \frac{1}{\Omega \tau_{\text{ц}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{T}{4\tau_{\text{ц}}}$ ;  $l\Omega t = \frac{1}{\Omega \tau_{\text{ц}}} \Omega t = \frac{t}{\tau_{\text{ц}}}$ .

Условие дифференцирования ( $\omega \tau_{\text{ц}} \ll 1$ ) должно быть выполнено для всех гармоник спектра входного сигнала.

Так как ширина спектра для периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов с длительностью  $\tau_{и}$  равна  $\Delta F = \frac{1}{\tau_{и}} = \frac{1}{T/2} = \frac{2}{T}$ , то при выполнении условия дифференцирования  $T \gg \tau_{и}$ .

В этом случае  $\text{th} \frac{T}{4\tau_{и}} \approx 1$ , поэтому

$$F_{\text{вых}}(t) \approx -E_m e^{-\frac{1}{\tau_{и}}(t - \frac{T}{4})} \quad \text{при} \quad \frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}T.$$

Соответствующий график при входном сигнале  $F_{\text{вх}}(t)$  (рис. 2.6, а) приведен на рис. 2.6, б. Из графика следует, что при  $T \gg \tau_{и}$  переходный процесс практически заканчивается на рассматриваемом интервале времени.

Чтобы получить решения для любого момента времени, например для интервала  $\frac{3}{4}T < t < \frac{5}{4}T$ , перенесем начало отсчета времени в точку  $T/2$ , для этого заменим  $t$  на  $t' = t - T/2$ . Для периодической функции такой перенос возможен. Тогда

$$F_{\text{вых}}(t') = F_{\text{вых}}(t - T/2) = E_m e^{-\frac{1}{\tau_{и}}(t' - \frac{T}{4})} = E_m e^{-\frac{1}{\tau_{и}}(t - \frac{3}{4}T)},$$

где  $\frac{T}{4} < t' < \frac{3}{4}T$  или  $\frac{T}{4} < t - \frac{T}{2} < \frac{3}{4}T$ , откуда  $\frac{3}{4}T < t < \frac{5}{4}T$ .

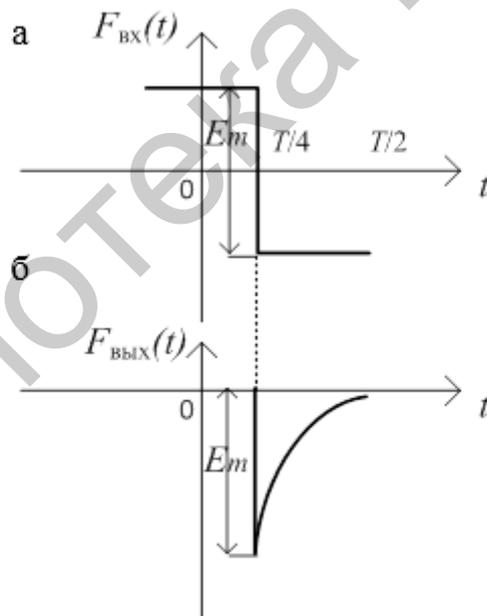


Рис. 2.6

В полученном результате знак изменен на положительный, так как в новом интервале функция на входе, имея ту же форму, отрицательна. Если аналогично производить перенос начала отсчета времени по оси  $t$ , то окончательный результат в виде графика будет иметь вид, изображенный на рис. 2.7.

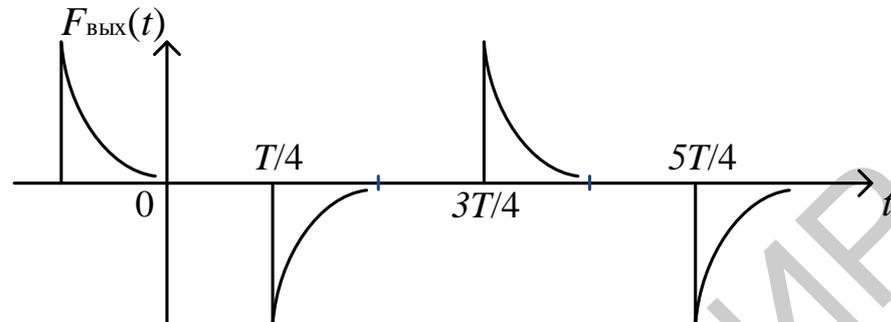


Рис. 2.7

Пример 2.1. Получить условия дифференцирования цепью, изображенной на рис. 2.5 или рис. 2.8, спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов.

Решение. Коэффициент передачи для дифференцирующей цепи

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau_{ц}}} = \frac{j\omega\tau_{ц}}{j\omega\tau_{ц} + 1},$$

где  $\tau_{ц} = RC$  (в схеме на рис. 2.5) или  $\tau_{ц} = \frac{L}{C}$  (в схеме на рис. 2.8).

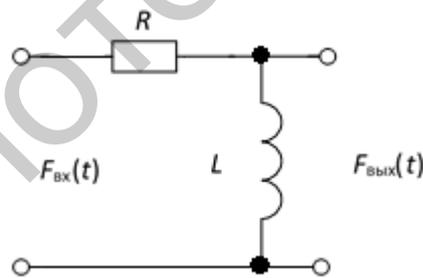


Рис. 2.8

В общем виде условие дифференцирования записывается следующим образом:

$$\frac{dF_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} \ll \frac{1}{\tau_{ц}} F_{\text{ВЫХ}}(t).$$

При обратном соотношении, когда

$$\frac{dF_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} \gg \frac{1}{\tau_{ц}} F_{\text{ВЫХ}}(t),$$

цепь не дифференцирует.

Если на входе цепи действует гармоническая функция, то

$$\frac{dF_{\text{ВХ}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{F}_{\text{ВХ}} e^{j\omega t}) = j\omega F_{\text{ВХ}}(t),$$

т. е. операция дифференцирования есть операция умножения на  $j\omega$ .

При идеальном дифференцировании  $\dot{F}_{\text{ВЫХ}} = a j\omega \dot{F}_{\text{ВХ}}$ , где  $a$  – постоянный множитель. Тогда коэффициент передачи идеальной дифференцирующей цепи

$$K_{\text{и}}(j\omega) = \frac{\dot{F}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{F}_{\text{ВХ}}} = ja\omega,$$

а при  $\omega\tau_{\text{ц}} \ll 1$  
$$K(j\omega) = \frac{j\omega\tau_{\text{ц}}}{j\omega\tau_{\text{ц}} + 1} \approx j\omega\tau_{\text{ц}} = K_{\text{и}}(j\omega).$$

Таким образом, при условии  $\omega\tau_{\text{ц}} \ll 1$  происходит дифференцирование гармонического напряжения. При заданной  $\tau_{\text{ц}}$  дифференцирование тем точнее, чем ниже частота  $\omega$ .

При воздействии на вход цепи негармонического колебания для выполнения дифференцирования необходимо, чтобы все гармоники спектра удовлетворяли условию  $\omega\tau_{\text{ц}} \ll 1$ , если нет – дифференцирования не будет, так как  $K(j\omega) \approx 1$ .

На рис. 2.9 изображена амплитудно-частотная характеристика дифференцирующей цепи (рис. 2.5 и рис. 2.8). Пунктиром отмечена идеальная дифференцирующая цепь с  $|K_{\text{и}}(j\omega)|$ .

Полоса пропускания дифференцирующей цепи соответствует частотам выше, чем  $1/\tau_{\text{ц}}$ . Условие  $\omega\tau_{\text{ц}} \ll 1$  или  $\omega\tau_{\text{ц}} \ll 1/\tau_{\text{ц}}$  означает, что гармоники спектра находятся вне полосы пропускания.

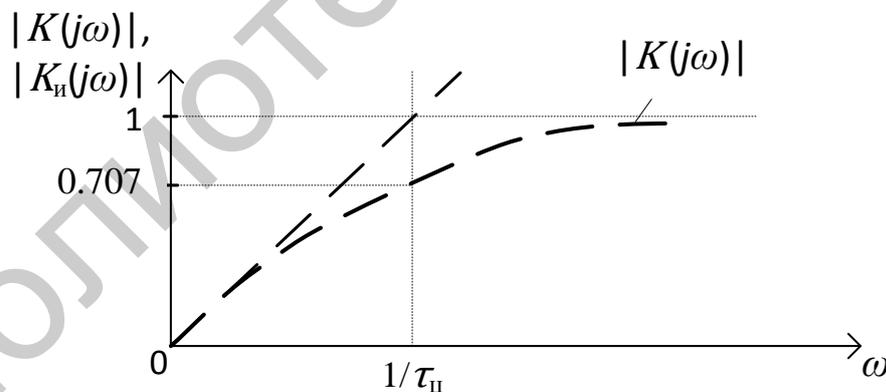


Рис. 2.9

Этим со спектральной точки зрения и объясняется дифференцирование. Дифференцирование равносильно изменению амплитуд низкочастотных гармоник спектра по линейному закону. При  $\omega \gg 1/\tau_{\text{ц}}$ , когда гармоники спектра попадают в полосу пропускания (прозрачности), сигнал не дифференцируется.

На рис. 2.10 изображены две периодические последовательности прямоугольных видеоимпульсов с различными длительностями импульсов ( $\tau_{\text{и1}} > \tau_{\text{и2}}$ ) и различными периодами повторения ( $T_1 > T_2$ ).

На рис. 2.11, а изображен спектр импульсов  $f_1(t)$ , приведенных на рис. 2.10, а. На рис. 2.11, б изображен спектр импульсов  $f_2(t)$ , приведенных на рис. 2.10, б. На рис. 2.11, в изображена частотная характеристика дифференцирующей цепи.

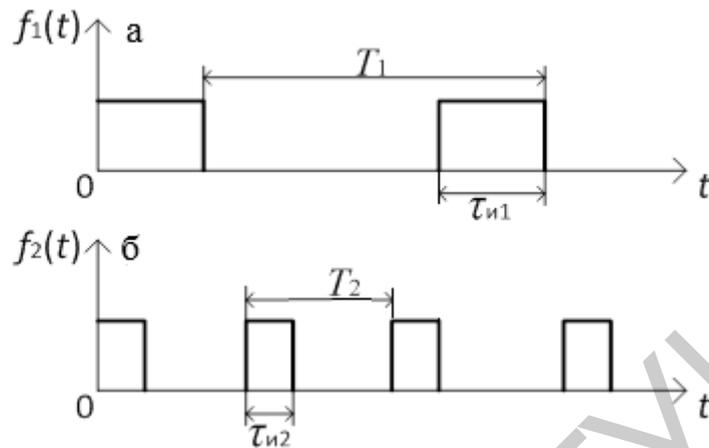


Рис. 2.10

Из условия дифференцирования ( $\omega \ll 1/\tau_{ц}$ ) следует, что импульсы (рис. 2.10, а), спектр которых изображен на рис. 2.11, а, будут продифференцированы, а импульсы (рис. 2.10, б), спектр которых изображен на рис. 2.11, б, пройдут через цепь без дифференцирования (будет задержана лишь постоянная составляющая  $A_{02}$ ).

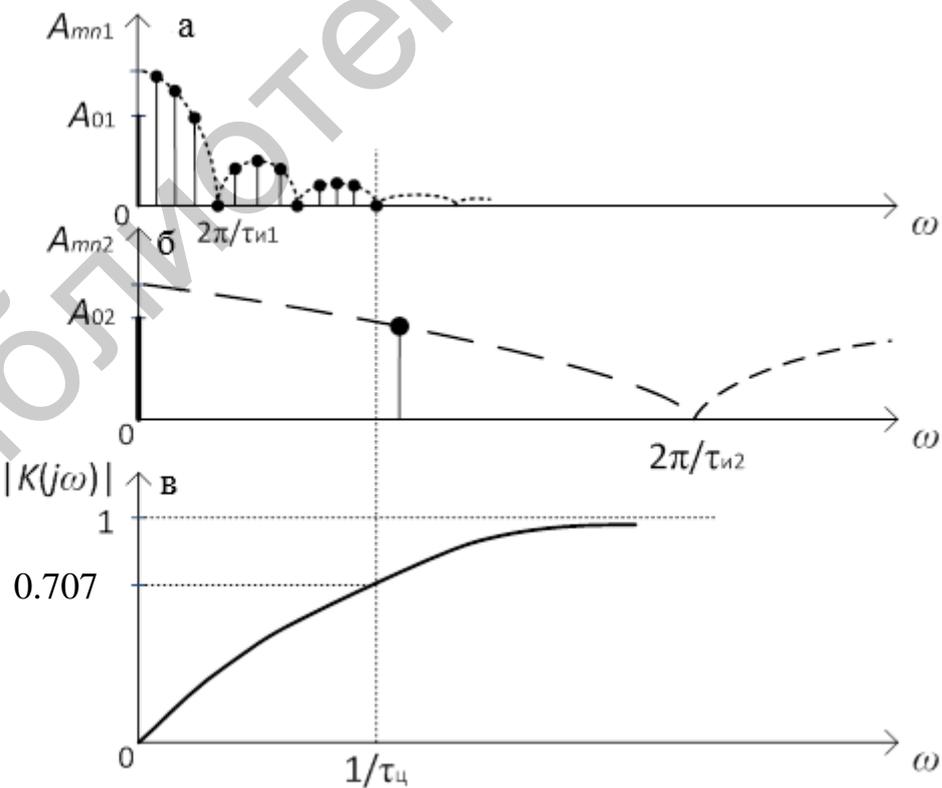


Рис. 2.11

### 2.2.3. Прохождение сигналов с дискретными спектрами через интегрирующие цепи

Для интегрирующих цепей (рис. 2.12, а и б) коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau_{ц}}. \quad (2.16)$$



Рис. 2.12

Интегрирование равносильно умножению на  $1/j\omega$ . Следовательно, коэффициент передачи идеальной интегрирующей цепи

$$K_{и}(j\omega) = \frac{b}{j\omega}, \quad (2.17)$$

где  $b$  – постоянный множитель.

Для схем, изображенных на рис. 2.12, а, б, при

$$\omega\tau_{ц} \gg 1 \quad \text{или} \quad \omega\tau_{ц} \ll 1/\tau_{ц}, \quad (2.18)$$

$$K(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau_{ц}} = K_{и}(j\omega). \quad (2.19)$$

АЧХ интегрирующей цепи изображена на рис. 2.13.

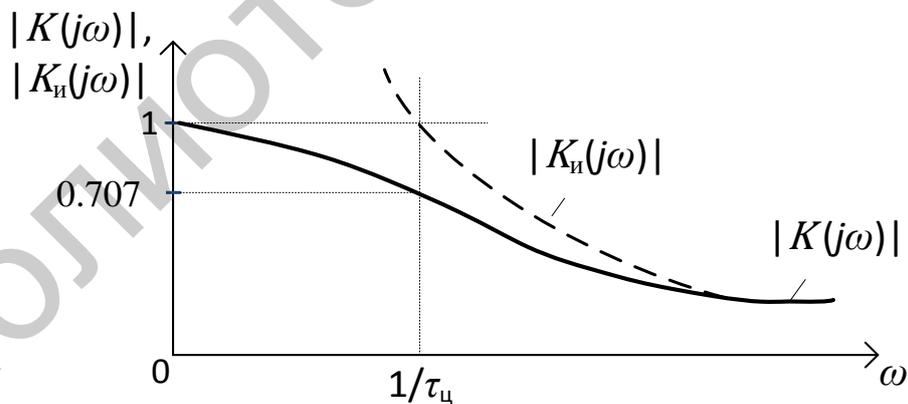


Рис. 2.13

На низких частотах – в полосе пропускания ( $\omega < 1/\tau_{ц}$ ) – сигнал, содержащий в своем спектре гармоники на этих частотах, не интегрируется. Интегрирование, равносильное уменьшению гармоник на высоких частотах  $\omega > 1/\tau_{ц}$ , осуществляется по гиперболе.

## 2.3. Прохождение сигналов со сплошными спектрами через линейные электрические цепи

### 2.3.1. Частотные характеристики неискажающей линейной электрической цепи

Если принять, что информация, заключенная в сигнале, отображается его формой, то под неискаженной передачей сигнала понимается сохранение неизменной его формы. При этом допускается изменение амплитуды сигнала и запаздывание его во времени (рис. 2.14). Для радиосигнала допускается изменение начальной фазы несущей.

Определим, какими частотными характеристиками должна обладать ЛЭЦ, чтобы обеспечивалась неискаженная передача сигнала.

Условием неискаженной передачи сигнала является соотношение

$$x(t) = K_0 f(t - t_0), \quad (2.20)$$

где  $K_0$  – множитель, учитывающий изменение масштаба сигнала в  $K_0$  раз;  $t_0$  – время запаздывания, определяющее сдвиг сигнала во времени.

Если  $f(t) \doteq F(j\omega)$ , т. е. если входной сигнал  $f(t)$  имеет спектральную плотность  $F(j\omega)$ , то при изменении амплитуды сигнала в  $K_0$  раз и запаздывании его на время  $t_0$  использование свойства линейности и теоремы о запаздывании оригинала позволяет перейти к следующему соотношению:

$$x(t) \doteq X(j\omega) = K_0 F(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.21)$$

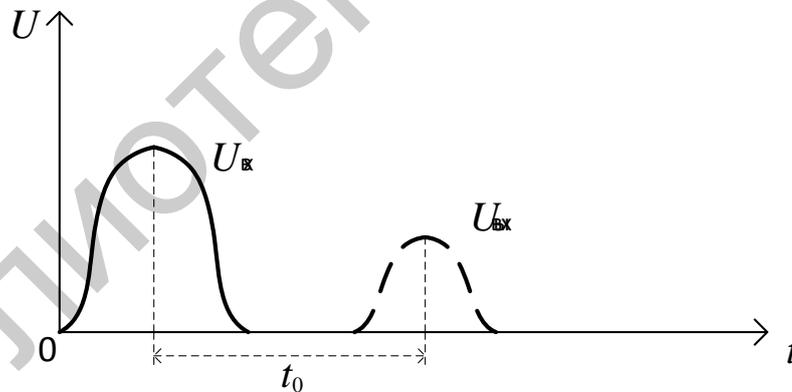


Рис. 2.14

Так как спектральные плотности сигналов на входе и выходе ЛЭЦ связаны соотношением (2.2), то

$$K(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{K_0 F(j\omega) e^{-j\omega t_0}}{F(j\omega)} = K_0 e^{-j\omega t_0}. \quad (2.22)$$

Из уравнения (2.21) следует, что неискажающая ЛЭЦ должна иметь равномерную АЧХ  $|K(j\omega)| = K_0 = \text{const}$  (рис. 2.15, а) и линейную ФЧХ  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$  (рис. 2.15, б).

Таким образом, если ЛЭЦ имеет АЧХ и ФЧХ, изображенные на рис. 2.15, а и б, то амплитуда всех гармоник спектра входного сигнала при

прохождении неискажающей ЛЭЦ изменяются одинаково в  $K_0$  раз, и все гармоники запаздывают на одно и то же время

$$t_{\text{зап}} = \varphi(\omega)/\omega = -\omega t_0/\omega = -t_0,$$

т. е. ФЧХ неискажающей ЛЭЦ должна быть линейна и иметь постоянную крутизну.

Создать реальную ЛЭЦ с линейными АЧХ и ФЧХ во всем диапазоне частот от 0 до  $\infty$  невозможно.

На практике это и не требуется, так как реальные сигналы обладают ограниченной эффективной шириной спектра. Поэтому для передачи сигналов с малыми искажениями вполне достаточно, чтобы частотные характеристики ЛЭЦ были линейны только в ограниченной полосе частот (полосе прозрачности), соответствующей эффективной ширине спектра сигнала.

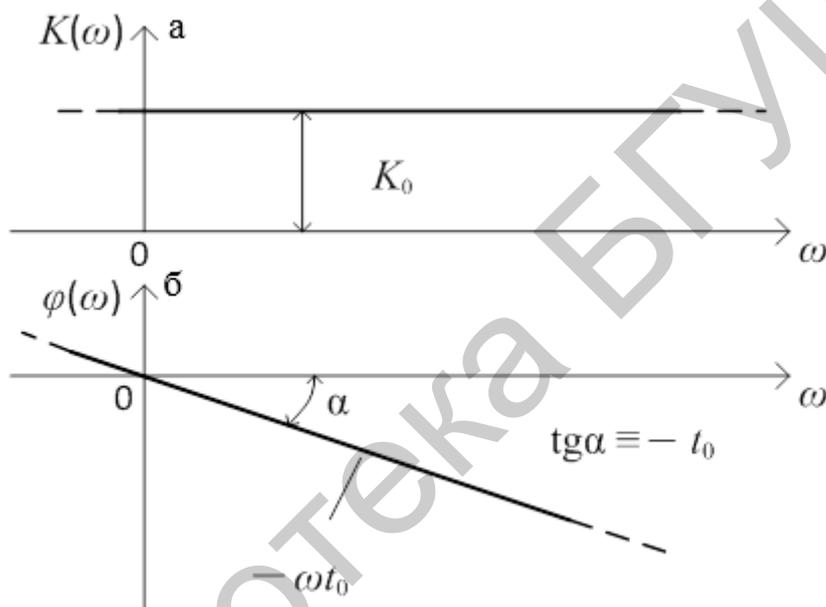


Рис. 2.15

Например, частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) полосового фильтра (рис. 2.16, б, в) не исказят сигнала, так как его полоса пропускания соответствует ширине спектра (рис. 2.16, а).

Это означает, что через фильтр обеспечивается прохождение основной доли энергии (90–95 %), заключенной в импульсе. Чем короче импульс и шире его спектр, тем большая полоса пропускания ЛЭЦ необходима для его неискаженного воспроизведения. Чем шире импульс, тем меньшая полоса пропускания нужна для него.

В ЛЭЦ АЧХ  $K(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$  связаны между собой и не могут быть произвольно заданы независимо друг от друга, поскольку неискажающие участки АЧХ соответствуют неискажающим участкам ФЧХ.

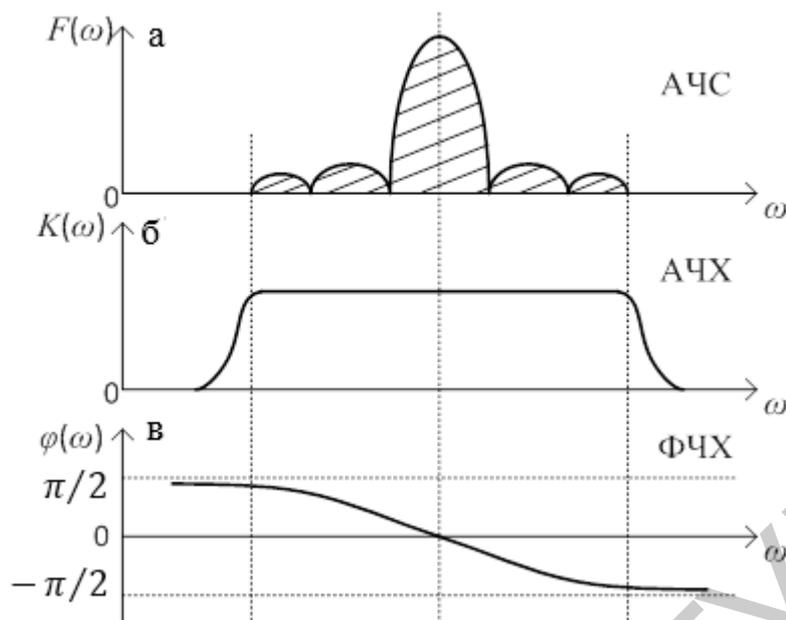


Рис. 2.16

### 2.3.2. Влияние частотных характеристик линейной электрической цепи с ограниченным диапазоном частот на форму выходного сигнала

При заданной полосе прозрачности ЛЭЦ искажения формы сигнала будут тем больше, чем шире его спектр. Одна и та же полоса прозрачности для одних сигналов (с узким спектром) пригодна, а для других (имеющих широкий спектр) – нет. Чем короче сигнальный импульс, тем круче его фронты, т. е. чем шире его спектр, тем больше он искажается. Искажение формы коротких по длительности импульсов при их прохождении через ЛЭЦ объясняется не только со спектральной, но и с временной точки зрения: малая длительность импульсов не соответствует большой постоянной времени ЛЭЦ. Переходные процессы, возникающие в результате воздействия импульса, имеют соизмеримую с самим импульсом продолжительность. Поэтому сигнал на выходе ЛЭЦ отличается по форме от входного.

В последующих подразделах рассмотрим влияние ограниченности полосы прозрачности ЛЭЦ на форму выходных сигналов на примерах прохождения сигналов различной формы и длительности через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ).

Пусть ФНЧ обладает идеальными частотными характеристиками (АЧХ и ФЧХ) в ограниченном диапазоне частот (рис. 2.17):

$$K_{\text{ФНЧ}}(j\omega) = \begin{cases} K_0 e^{-i\omega t_0} & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_c; \\ 0 & \text{при } \omega < 0 \text{ и } \omega > \omega_c. \end{cases} \quad (2.23)$$

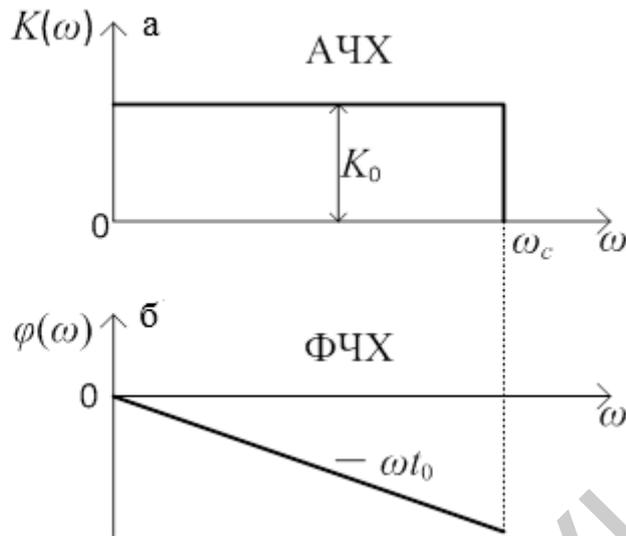


Рис. 2.17

Через такую ЛЭЦ все гармоники спектра с частотами меньше частоты среза  $\omega_c$  будут проходить без изменения амплитуд и со сдвигом фаз, пропорциональным частоте. Гармоники с частотами выше  $\omega_c$  не будут пропускаться фильтром, что должно приводить к изменению спектра и формы сигнала на выходе. Степень искажения сигнала будет определяться долей отсеченной части спектра, зависящей от ширины полосы пропускания.

### 2.3.3. Прохождение дельта-функции через линейную электрическую цепь с ограниченной полосой пропускания

Изображенная на рис. 2.18, а дельта-функция (или функция Дирака)  $\delta(t)$  характеризуется бесконечно широким спектром, а ее спектральная плотность

$$F_{\text{вх}}(j\omega) = 1. \quad (2.24)$$

При прохождении через ФНЧ с ограниченной полосой пропускания (рис. 2.16, б) спектр дельта-функции будет ограничен частотой среза  $\omega_c$ .

Для определения выходного сигнала воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$X_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{вых}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.25)$$

В этом выражении  $F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega)$ .

Согласно формулам (2.23) и (2.24)  $F_{\text{вых}}(j\omega) = K_0 e^{-j\omega t_0}$ . Подставив это значение  $F_{\text{вых}}(j\omega)$  в выражение (2.25), получим

$$X_{\text{вых}}(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0 \omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t - t_0)]}{\omega_c(t - t_0)}. \quad (2.26)$$

Эта функция (рис. 2.18, б) имеет максимальное значение при  $t = t_0$ , равно  $K_0 \omega_c / \pi$ .

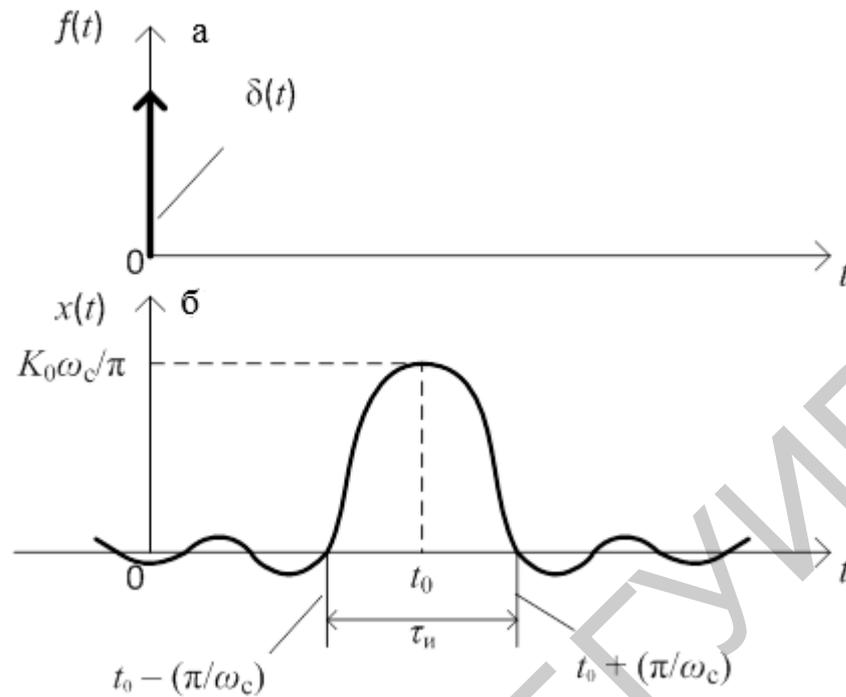


Рис. 2.18

Вправо и влево от максимума в точках  $\omega_c(t - t_0) = \pm k\pi$ , т. е. при  $t = t_0 \pm k\pi/\omega_c$  функция (2.26) имеет нулевые значения. Значения этой функции при разных аргументах можно определить с помощью графика  $\frac{\sin x}{x}$  (см. рис. 1.24) или таблиц. Длительность выходного импульса  $\tau_n = 2\pi/\omega_c$ , причем произведение

$$\omega_c \tau_n = 2\pi = \text{const}. \quad (2.27)$$

Из рис. 2.18, б следует, что выходной сигнал запаздывает на время  $t_0$ , равное угловому коэффициенту ФЧХ ЛЭЦ (рис. 2.17, б), а отсечение высокочастотной части спектра входного сигнала привело к тому, что выходной сигнал, в отличие от входного имеет длительность  $\tau_n$  и конечную амплитуду  $K_0\omega_c/\pi$ . Из равенства (2.26) следует, что с увеличением частоты среза  $\omega_c$ , т. е. по мере расширения полосы пропускания ФНЧ искажения уменьшаются, и при  $\omega_c \rightarrow \infty$  длительность  $\tau_n \rightarrow 0$ , а амплитуда  $K_0\omega_c/\pi \rightarrow \infty$ , что в пределе дает дельта-функцию, действующую на входе.

Таким образом, несоответствие между шириной спектра и полосой пропускания ведет к уменьшению амплитуды импульса на выходе (что может быть скомпенсировано усилением) и увеличению длительности фронта импульса (в радиолокации это снижает точность определения дальности до объекта).

Из рис. 2.18, б видно, что отклик на выходе ЛЭЦ имеет место еще до появления воздействия на входе. Причиной такого несоответствия является то, что выбранные частотные характеристики ФНЧ не могут быть реально осуществлены. Действительно, известно, что для получения ФНЧ с бесконечно

большой крутизной АЧХ на частоте среза  $\omega_c$  (как на рис. 2.17, а) пришлось бы включить в ФНЧ бесконечно большое число звеньев, что практически невыполнимо. В реальных системах крутизна АЧХ вблизи  $\omega_c$  конечна, и в этом случае при  $t \leq 0$  на рис. 2.18, б  $x(t)$  будет равно нулю.

#### 2.3.4. Прохождение единичной функции через линейную электрическую цепь с ограниченной полосой пропускания

Известно, что единичная функция  $1(t)$  (или функция включения) и дельта-функция  $\delta(t)$  связаны между собой интегральным соотношением:

$$1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt. \quad (2.28)$$

Реакцией ЛЭЦ на единичную функцию  $1(t)$  является переходная характеристика  $h(t)$ . Поэтому отклик ФНЧ (с частотными характеристиками, изображенными на рис. 2.17) на единичную функцию  $1(t)$  – следующий:

$$X_{\text{ВЫХ}} |_{1(t)}^{(t)} = \int_{-\infty}^t X_{\text{ВЫХ}} |_{\delta(t)}^{(t)} dt = \frac{K_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin \omega(t-t_0)}{\omega(t-t_0)} d[\omega(t-t_0)]. \quad (2.29)$$

Произведя в выражении (2.29) замену переменных ( $\omega_c(t-t_0) = y$ ;  $\omega(t-t_0) = U$ ),

$$X_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{K_0}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin u}{u} d\omega + \frac{K_0}{\pi} \int_0^y \frac{\sin u}{u} d\omega. \quad (2.30)$$

Меняя местами пределы интегрирования в первом интеграле выражения (2.30), получим

$$X_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{K_0}{\pi} \text{Si}(-\infty) + \frac{K_0}{\pi} \text{Si}(y),$$

где  $\text{Si } z = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx$  – табулированный интегральный синус (рис. 2.19), для которого справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Учтем данные соотношения в выражении (2.29) и вернемся к переменной  $t$ :

$$X_{\text{ВЫХ}}(t) = h(t) = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \text{Si}[\omega(t-t_0)]. \quad (2.31)$$

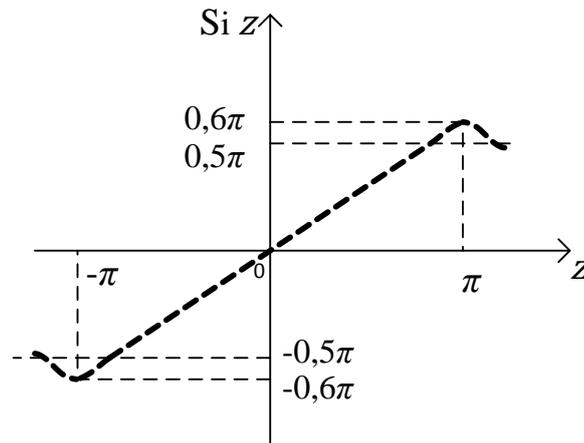


Рис. 2.19

Из полученного выражения (2.31) следует, что отклик ФНЧ на единичную функцию (рис. 2.20, а) имеет вид смещенного интегрального синуса (рис. 2.20, б).

Из рис. 2.20, б следует, что сигнал на выходе ФНЧ запаздывает относительно входного на время  $t_0$ , определяемое наклоном ФЧХ цепи (рис. 2.17, б), а отсечение высокочастотной части спектра входного сигнала, вызванное ограниченной полосой пропускания, приводит к тому, что выходной сигнал в отличие от входного имеет растянутый во времени передний фронт с длительностью  $\tau_\phi$ . Длительность переднего фронта выходного сигнала равна интервалу времени между первым минимумом и первым максимумом функции  $x(t)$ , т. е.  $\tau_\phi = t_2 - t_1$  (см. рис. 2.20, б). Этот интервал времени соответствует изменению переменной  $Z$  (см. рис. 2.19) в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Поэтому в выражении (2.31)  $\omega_c(t_1 - t_0) = -\pi$ , а  $\omega_c(t_2 - t_0) = \pi$ . Тогда  $t_1 = -\pi/\omega_c + t_0$ , а  $t_2 = \pi/\omega_c + t_0$ . Следовательно,  $\tau_\phi = 2\pi/\omega_c = 1/f_c$ , т. е. длительность переднего фронта выходного сигнала (или время его установления) обратно пропорциональна ширине полосы пропускания электрической цепи.

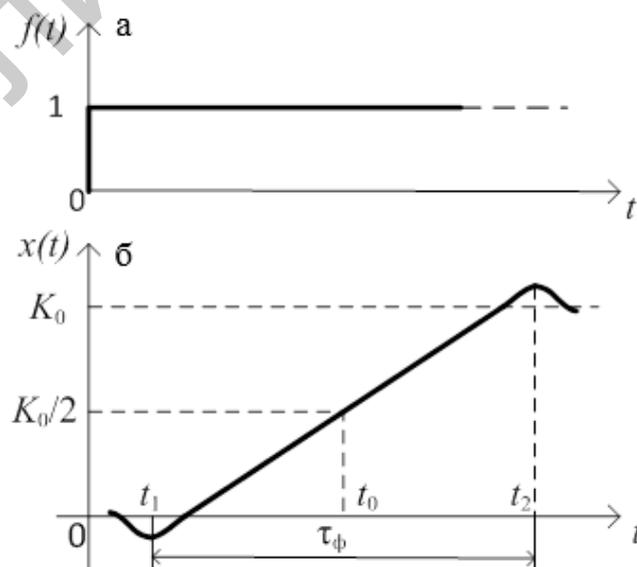


Рис. 2.20

При  $f_c \rightarrow \infty$  для идеальной неискажающей цепи  $\tau_\phi \rightarrow 0$ , т. е. выходной сигнал не искажается. Отсюда следует важный для радиолокации и техники связи вывод: передача и прием информации импульсами малой длительности требует увеличения полосы пропускания радиоканала. Но с расширением полосы пропускания растет влияние помех. При выборе оптимальных параметров ЛЭЦ это обстоятельство требует учета обоих факторов.

Реальные ЛЭЦ, кроме ограниченной полосы пропускания, имеют неравномерные АЧХ и ФЧХ. Это приводит к дополнительным линейным искажениям формы сигнала.

### 2.3.5. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через линейную электрическую цепь с ограниченной полосой пропускания

Рассмотрим сигнал на выходе ФНЧ с частотными характеристиками, соответствующими рис. 2.17, если на входе прямоугольный видеоимпульс конечной длительности единичной амплитуды (рис. 2.21, а).

Отклик ЛЭЦ, вызванный таким входным импульсом, по принципу суперпозиции можно представить как сумму откликов, получающихся от двух единичных скачков (рис. 2.21, б, в):

$$f_{\text{вх1}}(t) = f_{\text{вх1}}(t) - f_{\text{вх2}}(t) = 1(t) - 1(t - \tau_{\text{и}}).$$

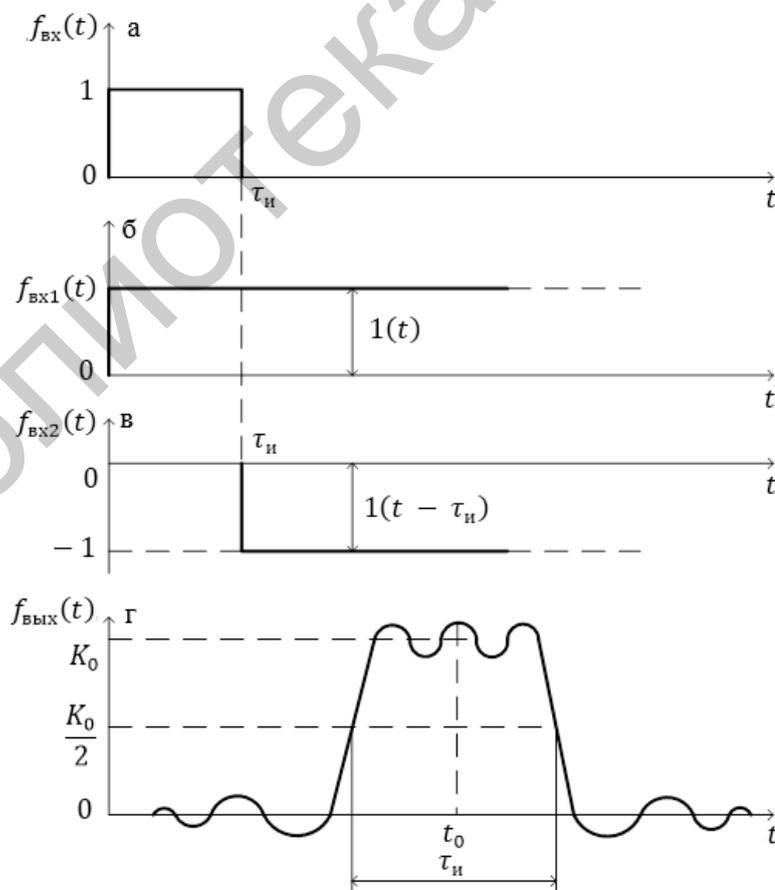


Рис. 2.21

Так как

$$1(t) \doteq F(j\omega) = 1/j\omega,$$

то, используя обратное преобразование Фурье, можно представить функцию  $1(t)$  в виде

$$\begin{aligned} 1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t + j \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = j\pi$ , и во втором интеграле подынтегральное выражение – четная функция относительно  $\omega$ , получаем

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.32)$$

В математике доказано, что в (2.32)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } t > 0 \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \quad \text{при } t < 0.$$

Эта запись означает, что единичный скачок имеет спектр, содержащий постоянную составляющую величиной  $1/2$  и синусоиды всех частот с амплитудами  $d\omega/\pi\omega$ .

Для получения спектра на выходе ФНЧ при  $f_{\text{вх1}}(t) = 1(t)$  необходимо все составляющие входного спектра умножить на  $K(\omega)$  и сдвинуть по фазе на  $\varphi(\omega)$ :

$$f_{\text{вых1}}(t) = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega} d\omega. \quad (2.33)$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения (2.33) на  $t - t_0$ , получим

$$f_{\text{вых1}}(t) = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega(t - t_0)} d[\omega(t - t_0)]. \quad (2.34)$$

При обозначениях  $\omega(t - t_0) = u$  и  $\omega_c(t - t_0) = x$  выражение (2.34) приводится к следующему виду:

$$f_{\text{вых1}}(t) = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{\pi} \text{Si } x, \quad (2.35)$$

где  $\text{Si } x$  – интегральный синус (см. рис. 2.19).

Чтобы получить отклик на воздействие  $1(t - \tau_{\text{и}})$ , т. е.  $f_{\text{вых2}}(t)$ , необходимо график функции (2.34)  $f_{\text{вых1}}(t)$  сместить вправо по оси времени на длительность импульса  $\tau_{\text{и}}$ .

Результат прохождения импульса (см. рис. 2.20, а) через ФНЧ с частотными характеристиками, приведенными на рис. 2.17, определяется как разность двух кривых  $f_{\text{вых}}(t) = f_{\text{вых1}}(t) - f_{\text{вых2}}(t)$ . Этот результат изображен на рис. 2.21, г.

Изменение частоты среза  $\omega_c$  (полосы пропускания ФНЧ) будет приводить к изменению наклона переднего и заднего фронтов выходного

импульса, т. е. будет изменяться его форма. Чем шире полоса пропускания ФНЧ, тем круче будут фронты выходного сигнала и ближе его форма к сигналу на входе.

#### 2.4. Влияние неравномерности частотных характеристик линейной электрической цепи на форму сигналов

Если спектр входного сигнала ограничен некоторой частотой  $\omega_{\text{ГР}}$ , то сигнал на входе и выходе ЛЭЦ, согласно обратному преобразованию Фурье, записывается так:

$$f_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{ГР}}}^{\omega_{\text{ГР}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.36)$$

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{ГР}}}^{\omega_{\text{ГР}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.37)$$

Чтобы по двум этим функциям количественно оценить искажение формы сигналов из-за неравномерностей амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик ЛЭЦ, необходимо аппроксимировать комплексный коэффициент передачи  $K(j\omega)$  в виде функции, позволяющей в дальнейшем сравнительно легко проводить соответствующие математические преобразования. Такой функцией может быть, например, экспонента либо сумма экспонент. В этом случае изменения в формуле (2.37) множителя  $K(j\omega)$  можно было бы учесть с помощью показателя степени функции  $e^{j\omega t}$ . Частным случаем суммы двух экспонент является функция, изменяющаяся по синусоидальному (косинусоидальному) закону. Поэтому АЧХ и ФЧХ ЛЭЦ целесообразно аппроксимировать на исследуемом интервале частот, соответствующем ширине спектра входного сигнала, участками синусоиды (косинусоиды).

##### 2.4.1. Влияние неравномерности амплитудно-частотной характеристики линейной электрической цепи на форму сигналов

Пусть АЧХ ЛЭЦ имеет некоторую неравномерность в полосе частот, занимаемых спектром входного сигнала (рис. 2.22). ФЧХ цепи будем полагать идеальной:  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ .

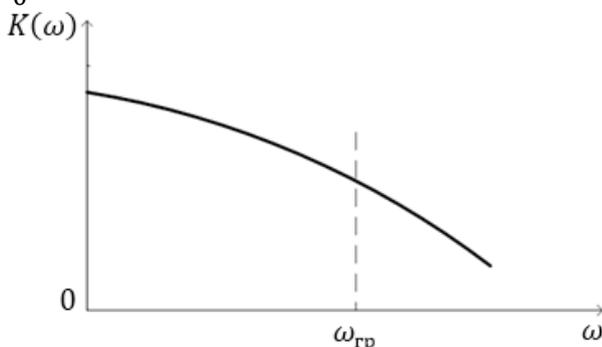


Рис. 2.22

Так как в обратном преобразовании Фурье интегрирование ведется по положительным и отрицательным значениям частоты (2.37), то продолжим формально характеристику АЧХ рис. 2.22 в область отрицательных частот (см. рис. 2.23).

Согласно рис. 2.23 АЧХ ЛЭЦ можно аппроксимировать следующим образом:

$$K(\omega) = K_0 + \Delta K \cos \frac{2\pi}{2\omega_{\text{гр}}} \omega = K_0 + \Delta K \cos \omega \Delta t,$$

где  $\Delta t = \frac{2\pi}{2\omega_{\text{гр}}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}}$  (с), тогда

$$K(\omega) = K_0 + (\Delta K/2)(e^{-j\omega \Delta t} + e^{j\omega \Delta t}), \quad (2.38)$$

а выходной сигнал (2.37) примет вид

$$\begin{aligned} f_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) \left[ K_0 + \frac{\Delta K}{2} (e^{-j\omega \Delta t} + e^{j\omega \Delta t}) \right] e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{\Delta K}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega[t-(t_0+\Delta t)]} d\omega + \\ &\quad + \frac{\Delta K}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega[t-(t_0-\Delta t)]} d\omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

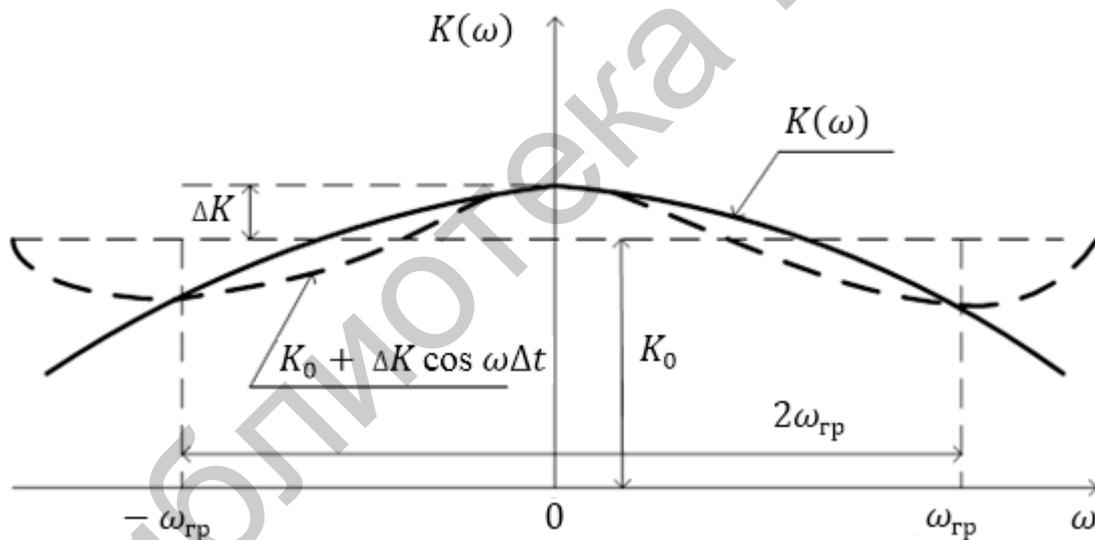


Рис. 2.23

Первое слагаемое в выражении (2.38) – входной сигнал (рис. 2.24, а), масштаб которого изменен в  $K_0$  раз (рис. 2.24, б), и он запаздывает на время  $t_0$ .

Второе (рис. 2.24, в) и третье (рис. 2.24, г) слагаемые – это входной сигнал, масштаб которого изменен в  $\Delta K/2$  раз. Эти сигналы запаздывают на время  $t_0 - \Delta t$  и  $t_0 + \Delta t$  соответственно.

Перепишем выражение (2.39) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{\text{ВЫХ}}(t) &= K_0 f_{\text{ВХ}}(t - t_0) + \frac{\Delta K}{2} f_{\text{ВХ}}[t - (t_0 + \Delta t)] + \frac{\Delta K}{2} f_{\text{ВХ}}[t - (t_0 - \Delta t)] = \\ &= f_{\text{ВЫХ1}}(t) + f_{\text{ВЫХ2}}(t) + f_{\text{ВЫХ3}}(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

График выходного сигнала в соответствии с выражением (2.40) изображен на рис. 2.24, д.

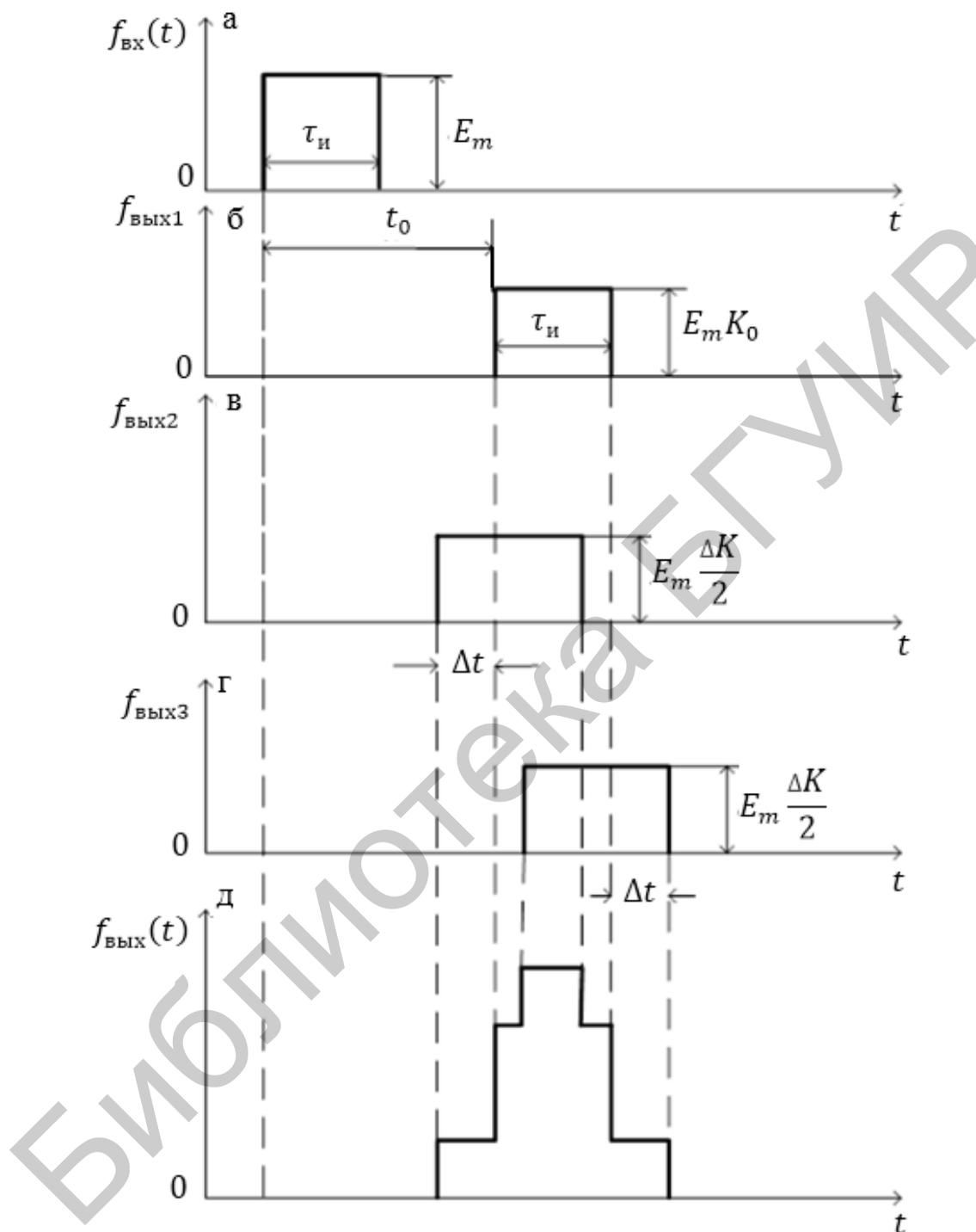


Рис. 2.24

#### 2.4.2. Влияние неравномерности фазочастотной характеристики линейной электрической цепи на форму сигналов

Пусть ФЧХ ЛЭЦ имеет некоторую неравномерность крутизны в полосе частот  $\omega_{гр}$ , занимаемых спектром входного сигнала (рис. 2.25).

АЧХ ЛЭЦ в интервале частот от  $-\omega_{гр}$  до  $\omega_{гр}$  будем считать идеальной, т. е.  $K(\omega) = K_0$ .

ФЧХ ЛЭЦ аппроксимируем следующим образом:

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 + \Delta\varphi \sin \omega \Delta t, \quad (2.41)$$

где  $\Delta t = \frac{4\pi}{2\omega_{гр}} = \frac{2\pi}{\omega_{гр}}$ .

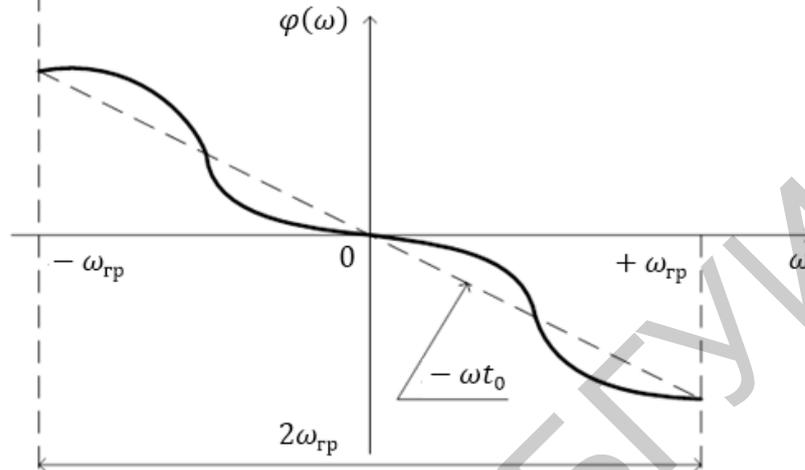


Рис. 2.25

Выходной сигнал с учетом рис. 2.24

$$\begin{aligned} f_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} F_{\text{вх}}(j\omega) K_0 e^{-j[\omega t_0 - \Delta\varphi \sin \omega \Delta t]} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} e^{j\Delta\varphi \sin \omega \Delta t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Искажения выходного сигнала обусловлены появлением в подынтегральной функции множителя  $e^{j\Delta\varphi \sin \omega \Delta t}$ .

В пределах полосы пропускания у ЛЭЦ девиация крутизны ФЧХ невелика. Тогда при малом значении  $\Delta\varphi$  ( $\Delta\varphi \ll 1$  радиана), учитывая, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

и при малых  $x$   $e^x \approx 1 + x$ , выражение (2.43) запишется так:

$$e^{j\Delta\varphi \sin \omega \Delta t} \approx 1 + j\Delta\varphi \sin \omega \Delta t$$

и выходной сигнал

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} (1 + j\Delta\varphi \sin \omega \Delta t) d\omega. \quad (2.44)$$

Так как  $\sin \omega \Delta t = (e^{j\omega \Delta t} - e^{-j\omega \Delta t})/2j$ , то выражение (2.43) примет вид

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{-j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{\Delta\varphi K_0}{2} \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega[t-(t_0 - \Delta t)]} d\omega - \frac{\Delta\varphi K_0}{2} \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega[t-(t_0 + \Delta t)]} d\omega = \\ & = f_{\text{вых1}}(t) + f_{\text{вых2}}(t) + f_{\text{вых3}}(t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Таким образом, согласно полученному результату (2.45), при малых  $\Delta\varphi$  выходной сигнал (рис. 2.26, д) состоит из неискаженной части  $f_{\text{вых1}}(t)$ , величина которой (рис. 2.26, б) изменилась в  $K_0$  раз по сравнению со входным сигналом (рис. 2.26, а) и которая запаздывает на время  $t_0$ , и двух частей:  $f_{\text{вых2}}(t)$  и  $f_{\text{вых3}}(t)$ , которые отличаются от входного сигнала в  $\frac{\Delta\varphi}{2}$  раз. Причем  $f_{\text{вых2}}(t)$  и  $f_{\text{вых3}}(t)$  имеют различные знаки:  $f_{\text{вых2}}(t)$  опережает неискаженную часть сигнала  $f_{\text{вых1}}(t)$  на время  $\Delta t$ , а  $f_{\text{вых3}}(t)$  отстает на это же время.

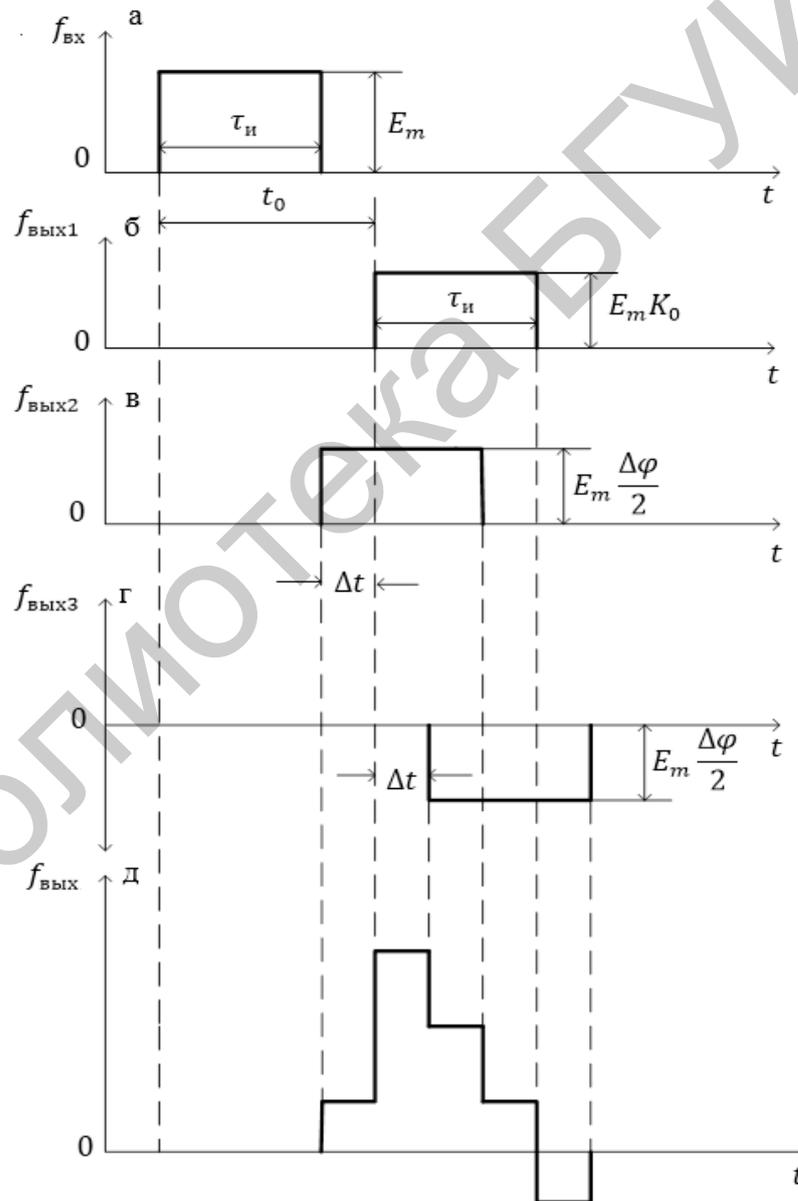


Рис. 2.26

Если девиация крутизны ФЧХ ЛЭЦ значительна, то величину (2.43) можно представить в виде суммы функций Бесселя:

$$e^{j\Delta\varphi \sin \omega\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\varphi) e^{jn\omega\Delta t}. \quad (2.46)$$

При  $n = 0$  получим неискаженную часть выходного сигнала

$$f_{\text{вых1}}(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} F_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} J_0(\Delta\varphi) d\omega. \quad (2.47)$$

Кроме этой неискаженной части, получим теоретически бесконечное количество парных частей, величины которых будут определяться соответствующими функциями Бесселя  $J_n(\Delta\varphi)$ , причем эти части будут опережать неискаженную часть сигнала либо отставать от нее на время  $n\Delta t$ .

Практически идеальный вес частей выходного сигнала с большими значениями  $n$  невелик, поэтому при расчетах можно ограничиться конечным числом слагаемых.

## 2.5. Связь между частотными и временными характеристиками линейной электрической цепи

Реакцию ЛЭЦ на произвольное входное воздействие можно рассчитать как с помощью частотных (используя интеграл Фурье), так и временных (используя интегралы свертки) характеристик: переходной  $h(t)$  и импульсной  $\kappa(t)$ .

### 2.5.1. Связь между передаточной функцией линейной электрической цепи и ее импульсной характеристикой

Известно, что импульсная характеристика ЛЭЦ  $\kappa(t)$  при нулевых начальных условиях численно равна реакции ЛЭЦ на дельта-функцию (рис. 2.27).

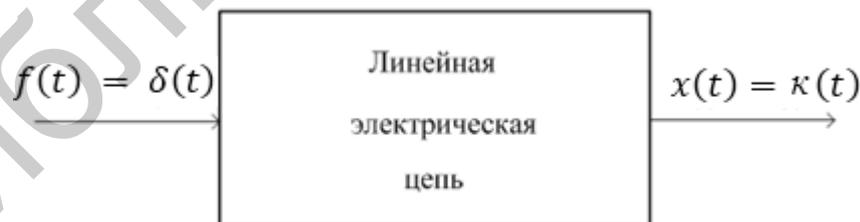


Рис. 2.27

Спектр дельта-функции равномерен, т. е.  $F_{\text{вх}}(j\omega) = 1$ . Тогда, если  $K(j\omega)$  – комплексная функция ЛЭЦ, то спектральная плотность сигнала на выходе ЛЭЦ  $F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = K(j\omega)$ .

Подставив полученное равенство в обратное преобразование Фурье, получим

$$\kappa(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Используя прямое преобразование Фурье, найдем

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Таким образом, комплексная функция ЛЭЦ  $K(j\omega)$  равна спектральной плотности ее импульсной характеристики, в то время как импульсная характеристика является обратным преобразованием Фурье (оригиналом) ее комплексной функции:  $\kappa(t) \doteq K(j\omega)$ .

Этот факт используется при экспериментальном определении импульсных характеристик ЛЭЦ. Если на вход ЛЭЦ подать сигнал, амплитудно-частотный спектр которого равномерен в пределах полосы пропускания, то отклик ЛЭЦ будет иметь форму импульсной характеристики, а спектр – пропорционален передаточной функции цепи  $K(j\omega)$ .

### 2.5.2. Связь между передаточной функцией линейной электрической цепи и ее переходной характеристикой

Известно, что переходная характеристика ЛЭЦ  $h(t)$  при нулевых начальных условиях численно равна реакции ЛЭЦ (рис. 2.28) на единичную функцию  $1(t)$ .

Так как спектральная плотность единичной функции  $F_{\text{вх}}(j\omega) = 1/j\omega$ , то спектральная плотность выходного сигнала

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = K(j\omega)/j\omega.$$

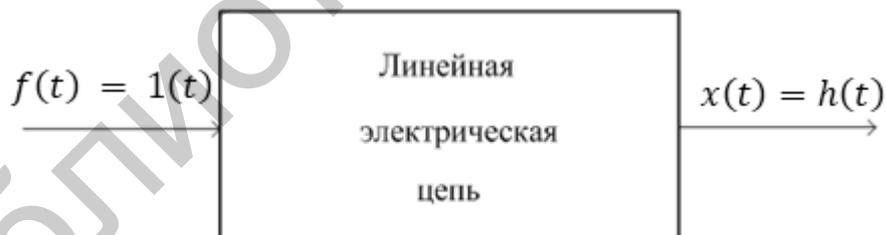


Рис. 2.28

Тогда, используя преобразование Фурье, можно записать:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.48)$$

$$K(j\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Представляя передаточную функцию в цепи в выражении (2.48) через ее вещественную и мнимую части, а функцию  $e^{j\omega t}$  – по формуле Эйлера, получим

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Re(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (2.49)$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} Re(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (2.50)$$

Полученные соотношения (2.49) и (2.50) позволяют по вещественной частотной характеристике (ВЧХ) ЛЭЦ определять ее временные характеристики.

Вещественную частотную характеристику ЛЭЦ можно рассчитать или найти экспериментально, определяя АЧХ цепи  $K(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$ .

Если ВЧХ задана графически, то импульсную характеристику ЛЭЦ можно определить с помощью уравнения (2.50). Существуют методы определения импульсной характеристики ЛЭЦ с помощью выражения (2.50), основанные на разных способах аппроксимации ее ВЧХ, например, метод трапецеидальных характеристик В.В. Солодовникова, в основе которого лежит замена ВЧХ суммой трапецеидальных характеристик.

Изменение частотных характеристик всегда влечет за собой изменение временных характеристик. Так, сжатие частотных характеристик по оси частот соответствует растяжению во столько же раз временной характеристики вдоль оси времени и наоборот. Это согласуется с выводом о связи между реакцией ЛЭЦ и шириной ее полосы пропускания: чем уже полоса пропускания, тем медленнее протекают процессы в ЛЭЦ.

**Пример 2.2.** Найти передаточную функцию дифференцирующей  $RC$ -цепи, если известна ее переходная характеристика  $h(t) = 1(t)e^{-t/RC}$ .

**Решение.** 1) Импульсная характеристика цепи:

$$\kappa(t) = h(0)\delta(t) + h'(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/RC}.$$

2) Передаточная функция цепи:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \left[ \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/RC} \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= 1 + \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} e^{-\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \end{aligned}$$

Полученный результат является передаточной функцией для дифференцирующей  $RC$ -цепи.

## 2.6. Анализ искажения сигнала сложной формы при прохождении через линейную электрическую цепь

Анализ искажения амплитудно-частотного и фазочастотного спектров периодического сигнала, а также его формы при прохождении через линейную электрическую цепь рассмотрим в примере 2.3.

**Пример 2.3.** Проанализировать искажения периодического сигнала сложной формы (рис. 2.29) при прохождении его через линейную электрическую цепь (рис. 2.30), если  $E_m = 1\text{В}$ ,  $q = 4$ ,  $\tau_{и} = \tau_{ц}$ ,  $R_1 = 1\text{кОм}$ ,  $R_2 = 2\text{кОм}$ ,  $R_3 = 3\text{кОм}$ ,  $C = 10\text{нФ}$ .

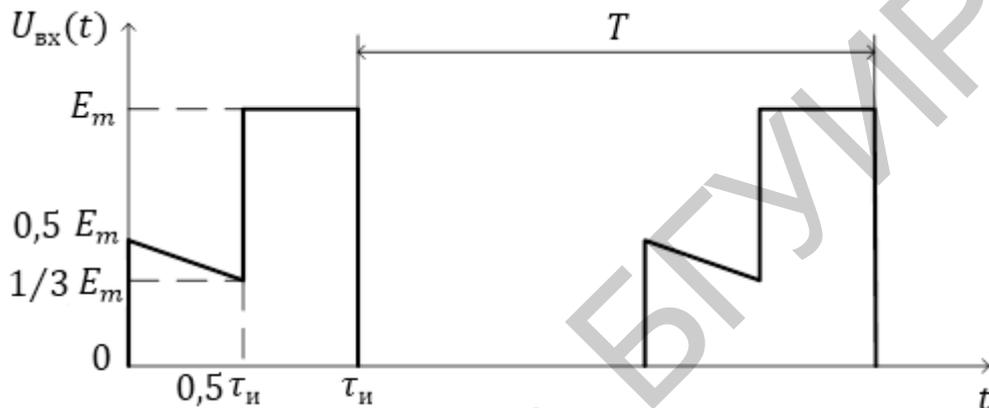


Рис. 2.29

Алгоритм решения данного примера:

1. Определение постоянной времени ЛЭЦ.
2. Расчет частотных характеристик ЛЭЦ.
3. Составление дифференциального уравнения ЛЭЦ.
4. Определение параметров входного сигнала.
5. Расчет временных характеристик ЛЭЦ.
6. Определение формы выходного сигнала методом интегралов наложения.
7. Расчет АЧС и ФЧС сигналов на входе и выходе ЛЭЦ.
8. Определение формы сигнала на входе ЛЭЦ спектральным методом.

**Решение**

1. Постоянная времени цепи  $\tau_{ц}$  для схемы ЛЭЦ, приведенной на рис. 2.30, равна

$$\tau_{ц} = CR_{\text{экв}} = C \left( R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = 36,67 \text{ мкс.} \quad (2.51)$$

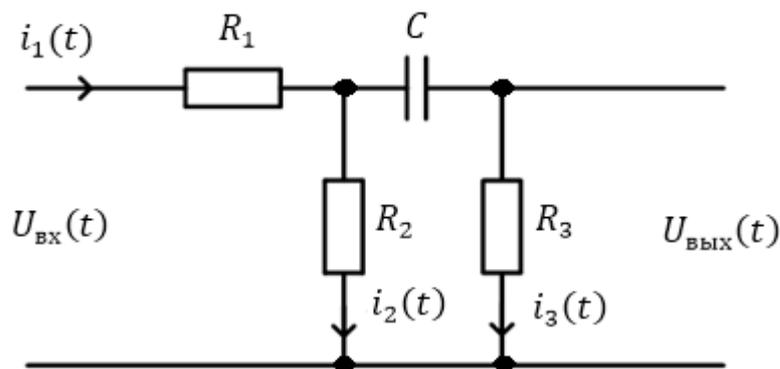


Рис. 2.30

2. Комплексная передаточная функция исследуемой цепи равна

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{I}_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + 1/j\omega C} R_3}{\dot{I}_1 \left[ R_1 + \frac{R_2(R_3 + 1/j\omega C)}{R_2 + R_3 + 1/j\omega C} \right]} = \frac{j\omega C R_2 R_3}{R_1 + R_2 + j\omega C (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

Показательная форма данного выражения

$$K(j\omega) = \frac{\omega C R_2 R_3 e^{j\pi/2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + [\omega C (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)]^2}} \times \frac{1}{e^{j \arctg \frac{\omega C (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 + R_2}}} = \frac{\omega C R_2 R_3}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + [\omega C (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)]^2}} \times e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega \tau_{\text{ц}}))}$$

От  $\omega$  в последнем выражении перейдем к  $f$ . Так как  $\omega = 2\pi f$ , то

$$K(jf) = \frac{2\pi f C \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_{\text{ц}})^2}} e^{j(\pi/2 - \arctg(2\pi f \tau_{\text{ц}}))},$$

откуда АЧХ цепи равна

$$K(f) = \frac{2\pi f \tau'}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_{\text{ц}})^2}}, \quad (2.52)$$

а ФЧХ имеет следующий вид:

$$\varphi(f) = \frac{\pi}{2} - \arctg(2\pi f \tau_{\text{ц}}). \quad (2.53)$$

В выражении (2.51)  $\tau' = C \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2} = 20$  мкс.

Результаты расчетов АЧХ и ФЧХ данной ЛЭЦ сведены в табл. П.6.1 прил. 6.

Графики АЧХ и ФЧХ цепи приведены в прил. 6 на рис. П.6.1 и рис. П.6.2 соответственно.

Из графиков следует, что исследуемая ЛЭЦ обладает свойствами фильтра верхних частот.

Граничную частоту  $f_{гр}$  на рис. П.6.1 находим из уравнения

$$\frac{K_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f_{гр} C \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}}{\sqrt{1 + (2\pi f_{гр} \tau_{ц})^2}}, \quad (2.54)$$

где  $K_{\max} = K(\infty) = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0,545$ .

Решив уравнение (2.54) относительно  $f_{гр}$ , получим

$$f_{гр} = \frac{K_{\max}}{2\pi \sqrt{2(\tau')^2 - K_{\max}^2 \tau_{ц}^2}} = 4337 \text{ Гц.}$$

3. Составим дифференциальное уравнение для электрического параметра, не претерпевающего в момент коммутации скачка – напряжения  $U_c(t)$  на конденсаторе. Для этого запишем для схемы, приведенной на (рис. 2.30), систему уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t); \\ i_1(t)R_1 + i_2(t)R_2 = U_{вх}(t); \\ U_c(t) + i_3(t)R_3 - i_2(t)R_2 = 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

где  $i_3(t) = C \frac{dU_c(t)}{dt}$ . (2.56)

Из первого и второго уравнений системы (2.55) выразим ток  $i_2(t)$ :

$$i_2(t) = \frac{U_{вх}(t)}{R_1 + R_2} - C \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{dU_c(t)}{dt}. \quad (2.57)$$

Подставив токи  $i_3(t)$  из выражения (2.56) и  $i_2(t)$  из выражения (2.57) в третье уравнение системы (2.55), получим искомое дифференциальное уравнение цепи по напряжению на конденсаторе:

$$C \left\{ R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right\} \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = \frac{U_{вх}(t) R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.58)$$

Используя выражение (2.58), составим характеристическое уравнение цепи:

$$C \left\{ R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right\} p + 1 = 0.$$

Корень данного характеристического уравнения

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = -\frac{1}{\tau_{ц}},$$

откуда

$$\tau_{ц} = C \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_1 + R_2} = 36,7 \text{ мкс.} \quad (2.59)$$

Из выражений (2.51) и (2.59) видно, что постоянная времени цепи  $\tau_{ц}$ , полученная по схеме (рис. 2.30) и с помощью дифференциального уравнения (2.58), одинакова.

4. Входной сигнал  $U_{вх}(t)$  – периодическая последовательность видеоимпульсов сложной формы (рис. 2.29) со скважностью  $q = 4$ .

Параметры импульсной последовательности: амплитуда  $E_m = 1$  В, длительность импульсов  $\tau_{и} = \tau_{ц} = 36,7$  мкс, период повторения импульсов  $T = q\tau_{и} = 4 \cdot 36,7 \cdot 10^{-6} = 146,68$  мкс, частота следования импульсов  $F_1 = \frac{1}{q\tau_{и}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{146,68 \cdot 10^{-6}} = 6817,56$  Гц.

5. Получим временные характеристики ЛЭЦ (переходную  $h(t)$  и импульсную  $\kappa(t)$ ) классическим методом.

Выходное напряжение  $U_{вых}(t)$  с учетом выражения (2.56) и подачи на вход ЛЭЦ единичной функции включения  $E \cdot 1(t)$  равно

$$U_{вых}(t) = i_3(t)R_3 = C \frac{dU_c(t)}{dt} R_3, \quad (2.60)$$

где  $U_c(t)$  есть решение дифференциального уравнения (2.58), содержащее свободную  $U_{c_{св}}(t)$  и принужденную  $U_{c_{пр}}$  составляющие:

$$U_c(t) = U_{c_{св}}(t) + U_{c_{пр}}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} + U_{c_{пр}}, \quad (2.61)$$

где  $U_{c_{пр}} = U_c(\infty) = ER_2/(R_1 + R_2)$ .

Постоянная интегрирования  $A$  определяется из закона коммутации для емкости (в данном примере при нулевых начальных условиях):

$$U_c(0-) = U_c(0+) = 0.$$

Тогда выражение (2.61) при  $t = 0$  принимает вид

$$0 = Ae^0 + U_{c_{пр}},$$

откуда  $A = -U_{c_{пр}}$ , а

$$U_c(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} \right\}. \quad (2.62)$$

Взяв производную от выражения (2.62) и подставив ее в уравнение (2.60), получим выходное напряжение исследуемой цепи:

$$U_{вых}(t) = C \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\tau_{ц}} R_3 e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} = 0,545e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}}. \quad (2.63)$$

С учетом (2.63) переходная характеристика цепи

$$h(t) = \frac{U_{вых}(t)}{E} = 0,545e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}}. \quad (2.64)$$

Импульсную характеристику определим по формуле

$$\kappa(t) = h(0)\delta(t) + h'(t), \quad (2.65)$$

где  $h(0)$  – значение переходной характеристики при  $t = 0$ ;  $\delta(t)$  – дельта-функция (или функция Дирака).

Подставив (2.64) в (2.65), получим  $\kappa(t)$ :

$$\kappa(t) = 0,545\delta(t) - \frac{0,545}{\tau_{ц}} e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} = 0,545\delta(t) - 14,8 \cdot 10^3 e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} \text{ с}^{-1}. \quad (2.66)$$

Результаты расчета  $h(t)$  и  $\kappa(t)$  по формулам (2.64) и (2.65) соответственно сведены в табл. П.6.2 прил. 6.

Графики  $h(t)$  и  $\kappa(t)$  изображены в прил. 6 на рис. П.6.3 и рис. П.6.4 соответственно. При  $t \rightarrow \infty$  переходная  $h(t)$  и импульсная  $\kappa(t)$  характеристики стремятся к нулю.

б. Определение формы выходного сигнала методом интегралов наложения проведем в 2 этапа.

На 1 этапе произведем поинтервальное аналитическое описание входного сигнала (рис. 2.29).

На интервале времени  $0 \leq t \leq \tau_{и}/2$  выражение для входного сигнала имеет вид

$$U_{\text{вх1}}(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{2t}{\tau_{и}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{t}{\tau_{и}}.$$

На интервале времени  $\tau_{и}/2 \leq t < \tau_{и}$   $U_{\text{вх2}}(t) = E_m = 1$ .

На интервале времени  $\tau_{и} < t$   $U_{\text{вх3}}(t) = 0$ .

Окончательное выражение для входного сигнала будет следующее:

$$U_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{t}{3\tau_{и}} & \text{при } 0 \leq t < \frac{\tau_{и}}{2}; \\ 1 & \text{при } \tau_{и}/2 \leq t < \tau_{и}; \\ 0 & \text{при } \tau_{и} < t. \end{cases} \quad (2.67)$$

На 2 этапе получим аналитическое выражение сигнала на выходе цепи  $U_{\text{вых}}(t)$ , используя первую формулу интеграла наложения.

На интервале времени  $0 \leq t \leq \tau_{и}/2$

$$U_{\text{вых1}}(t) = U_{\text{вх1}}(0)h(t) + \int_0^t U'_{\text{вх1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{0,545E_m}{2} e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} + \int_0^t \left(-\frac{E_m}{3\tau_{и}}\right) \cdot 0,545 e^{-(t-\tau)/\tau_{ц}} d\tau = -0,182 + 0,454 e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}}, \text{ В.}$$

Значения выходного напряжения в начале и в конце первого временного интервала равны

$$U_{\text{вых1}}(0) = 0,272 \text{ В} \text{ и } U_{\text{вых1}}(\tau_{и}/2) = 0,093 \text{ В.}$$

На интервале времени  $\tau_{и}/2 \leq t < \tau_{и}$

$$U_{\text{вых2}}(t) = U_{\text{вх1}}(0)h(t) + \int_0^{\tau_{и}/2} U'_{\text{вх1}}(\tau)h(t-\tau)d\tau + \Delta U_{\text{вх1}}h\left(t - \frac{\tau_{и}}{2}\right) + \int_{\tau_{и}/2}^t U'_{\text{вх2}}(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (2.68)$$

где  $\Delta U_{\text{вх1}} = 2/3 \text{ В}$  — величина скачка входного сигнала в момент времени  $t = \tau_{и}/2$ .

Так как  $U'_{\text{вх2}}(\tau) = E'_m = 1' = 0$ , то после вычислений выражение (2.68) примет вид

$$U_{\text{ВЫХ2}}(t) = 0,754e^{-t/\tau_{\text{ц}}} \text{ В.}$$

Значения выходного напряжения в начале и в конце второго временного интервала равны

$$U_{\text{ВЫХ2}}(\tau_{\text{и}}/2) = 0,457 \text{ В и } U_{\text{ВЫХ2}}(\tau_{\text{и}}) = 0,277 \text{ В.}$$

На интервале времени  $\tau_{\text{и}} < t$

$$U_{\text{ВЫХ3}}(t) = U_{\text{ВХ1}}(0)h(t) + \int_0^{\tau_{\text{и}}/2} U'_{\text{ВХ1}}(\tau)h(t - \tau)d\tau + \Delta U_{\text{ВХ1}}h\left(t - \frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right) + \\ + \int_{\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}} U'_{\text{ВХ2}}(\tau)h(t - \tau)d\tau - \Delta U_{\text{ВХ2}}h(t - \tau_{\text{и}}) + \\ + \int_{\tau_{\text{и}}/2}^t U'_{\text{ВХ3}}(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (2.69)$$

где  $\Delta U_{\text{ВХ2}} = -1 \text{ В}$  – величина скачка входного сигнала при  $t = \tau_{\text{и}}$ .

Так как  $U'_{\text{ВХ3}}(\tau) = 0$ , то после вычислений выражение (2.69) примет вид

$$U_{\text{ВЫХ3}}(t) = -0,726 \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} \text{ В.}$$

Значение выходного напряжения в начале третьего временного интервала  $U_{\text{ВЫХ3}}(\tau_{\text{и}}) = -0,267 \text{ В.}$

Окончательное выражение для выходного сигнала, полученное методом интегралов наложения, имеет вид

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} -0,182 + 0,454 \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}/2; \\ 0,754 \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} & \text{при } \tau_{\text{и}}/2 \leq t < \tau_{\text{и}}; \\ -0,726 \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} & \text{при } \tau_{\text{и}} < t. \end{cases} \quad (2.70)$$

Результаты расчета  $U_{\text{ВЫХ}}(t)$  по формуле (2.70) сведены в табл. П.6.3 прил. 6.

График  $U_{\text{ВЫХ}}(t)$  изображен сплошной линией на рис. П.6.5 прил. 6.

7. Расчет АЧС и ФЧС сигнала на входе ЛЭЦ сводится к определению параметров последовательности импульсов: постоянной составляющей  $U_{0\text{ВХ}}$  ряда Фурье, комплексных амплитуд гармоник спектра  $\dot{U}_{mn\text{ВХ}}$  и начальных фаз гармоник  $\psi_{n\text{ВХ}}$ .

Постоянная составляющая последовательности импульсов  $U_{0\text{ВХ}}$  с учетом выражения (2.67) равна

$$U_{0\text{ВХ}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{ВХ}}(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau_{\text{и}}} U_{\text{ВХ}}(t)dt = \frac{17\tau_{\text{и}}}{24T} = \frac{17}{24q} = 0,177 \text{ В.} \quad (2.71)$$

Комплексные амплитуды гармоник спектра входной последовательности видеоимпульса рассчитываются по формуле

$$\dot{U}_{mn\text{ВХ}} = \frac{2}{T} \int_0^T U_{\text{ВХ}}(t)e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\tau_{\text{и}}} U_{\text{ВХ}}(t)e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.72)$$

С учетом выражения (2.67) для  $U_{\text{ВХ}}(t)$  интеграл (2.72) состоит из трех интегралов:

$$\dot{U}_{mn\text{ВХ}} = \frac{1}{T} \int_0^{\tau_{\text{и}}/2} e^{-jn\omega_1 t} dt - \frac{2}{3T} \int_0^{\tau_{\text{и}}/2} \frac{t}{\tau_{\text{и}}} e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{2}{T} \int_{\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}} e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.73)$$

Первый интеграл из выражения (2.73)

$$\frac{1}{T} \int_0^{\tau_n/2} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{Tn\omega_1} (je^{-jn\omega_1 \tau_n/2} - j). \quad (2.74)$$

Для нахождения второго интеграла из выражения (2.73) воспользуемся табличным интегралом

$$\begin{aligned} \int te^{\alpha t} dt &= \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t}; \\ -\frac{2}{3T\tau_n} \int_0^{\tau_n/2} t e^{-jn\omega_1 t} dt &= \\ &= \frac{1}{Tn\omega_1} \cdot \left\{ -j\frac{1}{3} e^{-jn\omega_1 \tau_n/2} - \frac{2}{3n\omega_1 \tau_n} e^{-jn\omega_1 \tau_n/2} + \frac{2}{3n\omega_1 \tau_n} \right\}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Третий интеграл из выражения (2.73)

$$\frac{2}{T} \int_{\tau_n/2}^{\tau_n} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{Tn\omega_1} (j2e^{-jn\omega_1 \tau_n} - j2e^{-jn\omega_1 \tau_n/2}). \quad (2.76)$$

Сумма интегралов (2.74), (2.75) и (2.76) с учетом того, что

$$n\omega_1 \frac{\tau_n}{2} = n \frac{2\pi \tau_n}{T} \frac{1}{2} = \frac{n\pi}{q}; \quad n\omega_1 \tau_n = \frac{2n\pi}{q}; \quad Tn\omega_1 = 2\pi n,$$

образует выражение для комплексных амплитуд гармоник спектра входной последовательности видеоимпульсов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn_{\text{ВХ}}} &= \frac{1}{2n\pi} \left( -\frac{q}{3n\pi} e^{-jn\pi/q} + \frac{q}{3n\pi} \right) + \\ &+ j \frac{E_m}{2n\pi} \left( -\frac{4}{3} e^{-jn\pi/q} + 2e^{-jn\pi/q} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Используя формулу Эйлера  $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$ , представим выражение (2.77) в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn_{\text{ВХ}}} &= \frac{1}{2n\pi} \left( -\frac{q}{3n\pi} \cos \frac{n\pi}{q} + \frac{q}{3n\pi} - \frac{4}{3} \sin \frac{n\pi}{q} + 2 \sin \frac{2n\pi}{q} \right) + \\ &+ j \frac{1}{2n\pi} \left( \frac{q}{3n\pi} \sin \frac{n\pi}{q} - \frac{4}{3} \cos \frac{n\pi}{q} + 2 \cos \frac{2n\pi}{q} - 1 \right) = a_n + jb_n. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Тогда амплитуды  $U_{mn_{\text{ВХ}}}$  и начальные фазы  $\psi_{n_{\text{ВХ}}}$  гармоник спектров (АЧС и ФЧС последовательности в виде импульсов на входе цепи) соответственно равны:

$$U_{mn_{\text{ВХ}}} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad (2.79)$$

$$\psi_{n_{\text{ВХ}}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} & \text{при } a_n > 0; \\ 90^\circ & \text{при } a_n = 0, b_n > 0; \\ -90^\circ & \text{при } a_n = 0, b_n < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} + \pi & \text{при } a_n < 0, b_n > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} - \pi & \text{при } a_n < 0, b_n < 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Результаты расчета амплитуд и начальных фаз гармоник спектров входного сигнала (согласно выражениям (2.79) и (2.80)) сведены в табл. П.6.4 прил. 6.

Графики АЧС и ФЧС входного сигнала изображены на рис. П.6.6 – АЧС и на рис. П.6.7 – ФЧС сплошными линиями.

Амплитуды и начальные фазы гармоник спектр сигнала на выходе цепи рассчитаны по формулам:

$$U_{mn_{\text{ВЫХ}}} = U_{mn_{\text{ВХ}}} K(nF_1); \quad (2.81)$$

$$\psi_{n_{\text{ВЫХ}}} = \psi_{n_{\text{ВХ}}} + \varphi(nF_1), \quad (2.82)$$

где  $K(nF_1)$  и  $\varphi(nF_1)$  – значения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик (АЧХ и ФЧХ соответственно) цепи, рассчитанных на частотах  $f_n = nF_1 = n/T$ .

Результаты расчета амплитуд  $U_{mn_{\text{ВЫХ}}}$  и начальных фаз  $\psi_{n_{\text{ВЫХ}}}$  гармоник выходного спектра по формулам (2.81) и (2.82) сведены в табл. П.6.4 прил. 6.

Графики АЧС и ФЧС выходного сигнала изображены на рис. П.6.6 – АЧС и на рис. П.6.7 – ФЧС пунктирными линиями.

8. Для определения формы сигнала на выходе цепи спектральным методом воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{0_{\text{ВХ}}} K(0) + \sum_{n=1}^{10} U_{mn_{\text{ВЫХ}}} \cos(2\pi nF_1 t + \psi_{n_{\text{ВЫХ}}}), \quad (2.83)$$

где  $K(0)$  – значение АЧХ цепи на нулевой частоте.

Результаты расчета выходного сигнала по формуле (2.83) приведены в табл. П.6.5 прил. 6.

На рис. П.6.8 прил. 6 представлены входной (изображен сплошной линией) и два выходных импульса. Один синтезирован приближенным спектральным методом, другой получен точным методом наложения (изображен пунктирной линией).

Причина несовпадения форм выходных сигналов – в ограниченности числа суммированных гармоник (только 10) в спектральном методе.

### 3. Преобразование спектров сигналов в нелинейных электрических цепях

#### 3.1. Особенности нелинейных электрических цепей

Линейные электрические цепи позволяют производить передачу сигналов, их фильтрацию и селекцию фильтрами, ослабление при помощи делителей, временную задержку и другие преобразования.

Однако в радиотехнике возникает необходимость производить такие преобразования сигналов, которые не могут быть осуществлены при помощи линейных цепей. К таким преобразованиям относятся:

- преобразование переменного тока в постоянный (выпрямление);
- преобразование постоянного тока в переменный (генерирование синусоидальных и релаксационных колебаний);
- усиление мощности;
- умножение и деление частоты;
- стабилизация напряжения и тока;
- преобразование формы напряжения и тока;
- изменение несущей частоты с сохранением закона модуляции и др.

Процессы в нелинейных электрических цепях (НЭЦ) описываются нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, которые содержат нелинейные функции напряжения, тока и их производные.

НЭЦ содержит нелинейные элементы (НЭ), параметры которых зависят от токов и напряжений, действующих в цепи.

Анализ НЭЦ сложнее анализа ЛЭЦ. Трудности анализа обусловлены особенностями НЭЦ.

Основная особенность НЭЦ заключается в том, что к ним не применим принцип суперпозиции (наложения). Например, ток в НЭ пропорционален квадрату напряжения:  $i = a_2 u^2$ .

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) НЭЦ – нелинейна, т. е. графическое изображение представляет не прямую линию (как в ЛЭЦ), а кривую или ломаную линию.

Если в НЭЦ действуют два последовательно соединенных источника, то токи, вызываемые каждым из них в отдельности, соответственно определяются выражением  $i_1 = a_2 u_1^2, i_2 = a_2 u_2^2$ . Ток при одновременном действии обоих источников определяется формулой

$$i = a_2 (u_1 + u_2)^2 = a_2 u_1^2 + 2a_2 u_1 u_2 + a_2 u_2^2,$$

согласно которой результирующий ток  $i$  не равен сумме токов  $i_1$  и  $i_2$ .

Другой особенностью НЭЦ является то, что в отличие от ЛЭЦ отклик в НЭЦ на синусоидальное воздействие будет несинусоидальным, т. е. в выходном сигнале появляются гармоники на других частотах, которые не содержат входной сигнал.

Особенностью НЭ является то, что сопротивление НЭ имеет различную величину для постоянного и переменного тока.

Сопротивление НЭ постоянному току есть отношение напряжения к току в данной точке ВАХ, т. е. в разных точках ВАХ сопротивление НЭ постоянному току будет различным.

Сопротивление НЭ переменному току есть отношение приращения напряжения к приращению тока или, другими словами, есть производная от напряжения по току в данной точке ВАХ. Сопротивление НЭ переменному току в разных точках ВАХ будет различным, а на падающих участках ВАХ – отрицательным.

### 3.2. Преобразование спектра сигнала в умножителе частоты

Включение в цепь переменного тока нелинейного сопротивления может вызвать преобразование сигнала, которое сопровождается появлением новых гармоник в спектре сигнала на выходе.

Одним из таких преобразований является умножение частоты, т. е. выделение в цепи с НЭ гармоник, кратных частоте входного сигнала. Структурная схема умножителя частоты изображена на рис. 3.1. На вход НЭ (в данном случае  $R_{НЭ}$ ) подаются два напряжения: косинусоидальное  $u_1$  с частотой  $\omega$  и постоянное  $u_0$  (рис. 3.2). Из множества гармоник спектра на выходе НЭ выделение нужной гармоники осуществляется с помощью высокодобротной колебательной системы (контура, резонатора). На схеме рис. 3.1 – это фильтр ( $\Phi$ ). Фильтр (колебательный контур) настроен на  $n$ -ю гармонику.

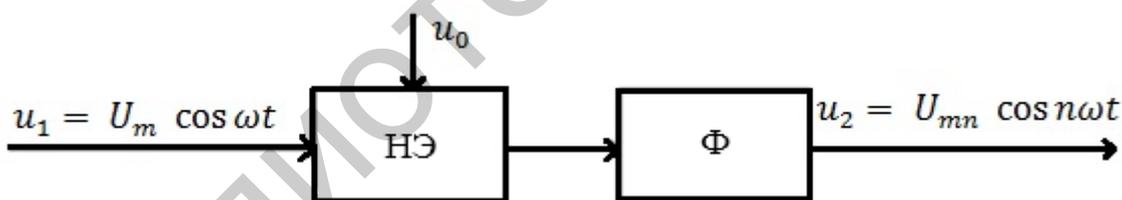


Рис. 3.1

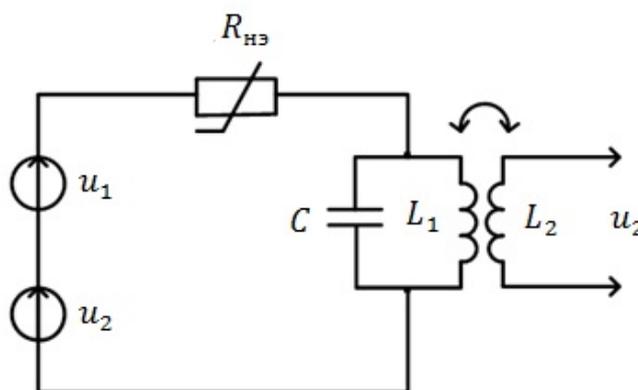


Рис. 3.2

Резонансная частота контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = n\omega$ .

Проанализируем преобразование спектра входного сигнала при прохождении НЭ. На рис. 3.3 изображены ВАХ НЭ, входное косинусоидальное напряжение  $u_1$ , напряжение смещения  $u_0$  (определяющее положение рабочей точки на ВАХ) и импульсы тока на выходе НЭ.

Аналитическая запись ВАХ НЭ в данном случае имеет вид

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ a_1 U & \text{при } u > 0, \end{cases}$$

где  $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ .

Ток после НЭ представляет собой последовательность импульсов косинусоидальной формы с амплитудой  $I_m$ , длительностью  $\tau_{\text{и}} = 2\theta/\omega$  и периодом  $T = 2\pi/\omega$ . Половина длительности этих импульсов тока, выраженная в градусах или радианах, есть *угол отсечки*  $\theta$ . Угол отсечки зависит как от амплитуды входного переменного напряжения, так и от величины напряжения смещения  $u_0$ .

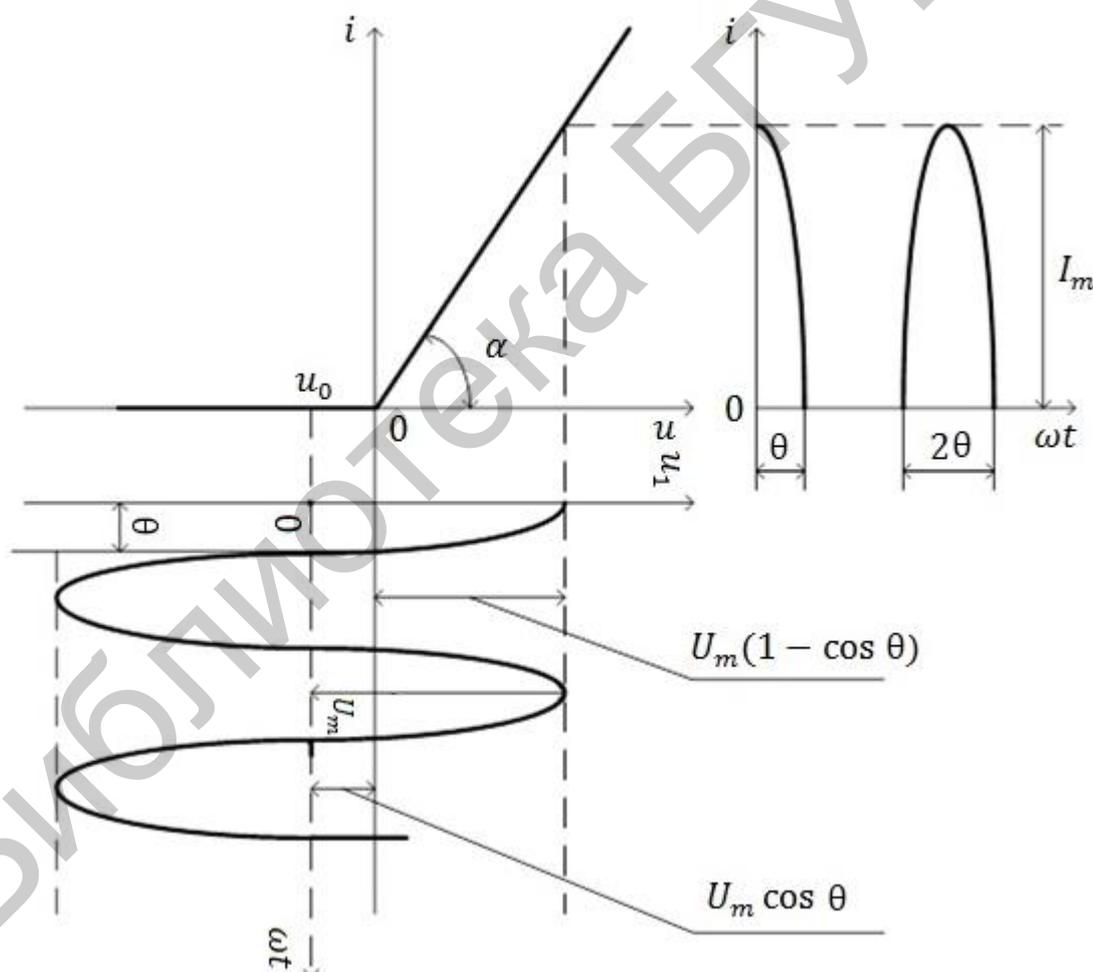


Рис. 3.3

Для получения спектра на выходе НЭ найдем гармоники последовательности импульсов тока, представив их в виде ряда Фурье.

Так как  $u = u_1 + u_0 = U_m \cos \omega t - u_0 = U_m \cos \omega t - U_m \cos \theta$ , то

$$i(t) = a_1 u = a_1 U_m (\cos \omega t - \cos \theta). \quad (3.1)$$

При  $\omega t = 0$  этот ток

$$i(t) = I_m = a_1 U_m (1 - \cos \theta), \text{ откуда } a_1 = \frac{I_m}{U_m (1 - \cos \theta)}.$$

Подставив значение  $a_1$  в выражение (3.1), получим

$$i(t) = I_m \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (3.2)$$

Определим амплитуду  $n$ -й гармоники, воспользовавшись формулой для вычисления ряда Фурье в тригонометрической форме:

$$I_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(t) \cos n\omega t \, d\omega t. \quad (3.3)$$

Подставив в выражение (3.3) значение тока из соотношения (3.2), получим

$$I_{mn} = \frac{2I_m}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \cos n\omega t \, d\omega t.$$

Операция интегрирования в данном выражении даст следующий результат:

$$I_{mn} = \frac{I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} \left[ \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - 2 \cos \theta \frac{\sin n\theta}{n} \right].$$

Отношение амплитуды  $n$ -й гармоники  $I_{mn}$  к амплитуде импульсов тока есть коэффициент  $n$ -й гармоники  $\alpha_n$ :

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi(1 - \cos \theta)} \left[ \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - 2 \cos \theta \frac{\sin n\theta}{n} \right]. \quad (3.4)$$

Графики зависимости коэффициентов гармоники от величины угла отсечки (или кривые Берга) приведены на рис 3.4. Согласно этому рисунку для каждой гармоники имеется определенный угол отсечки, при котором ее амплитуда максимальна. Например, для первой гармоники  $\theta_{\text{опт}} = 120^\circ$ , для второй  $\theta_{\text{опт}} = 60^\circ$  и т. д.

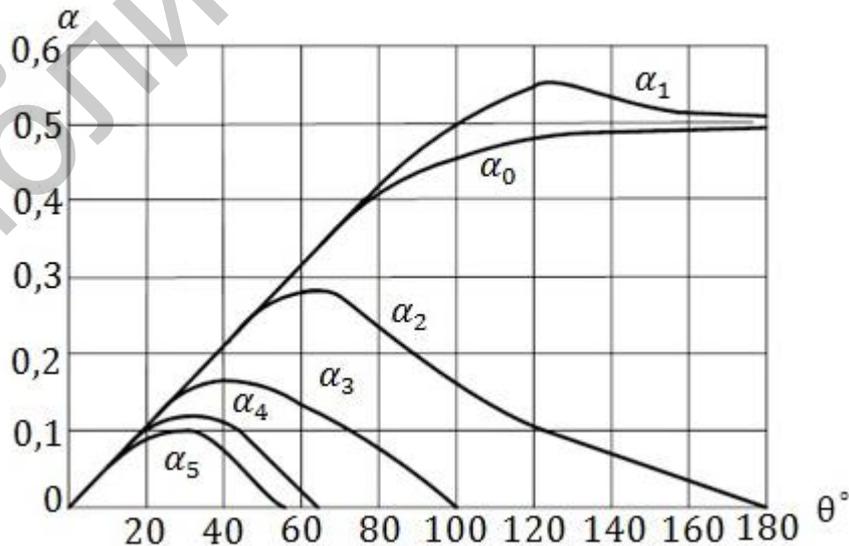


Рис. 3.4

На рис. 3.5, а приведен спектр входного воздействия в умножителе частоты, а на рис. 3.5, б – спектр на выходе НЭ. Как видно из рис. 3.5, б, спектр отклика НЭ обогатился новыми гармониками, которых нет в спектре воздействия. Частоты этих гармоник кратны частоте воздействующего напряжения и равны соответственно  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  ... . Наивысшая гармоника зависит от характера рабочей области ВАХ НЭ. Так, например, если рабочая область ВАХ подчиняется квадратичному полиному вида

$$i = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2,$$

то наивысшей будет вторая гармоника  $2\omega$ . Если рабочая область ВАХ подчиняется полиному степени  $k$ , то частота  $k\omega$  относится к высшей гармонике.

Таким образом, при воздействии на входе НЭ гармонического напряжения, независимо от способа аппроксимации ВАХ НЭ, ток на выходе НЭ будет состоять из большого числа гармоник, т. е. будет негармоническим.

Для выделения в умножителе частоты из бесконечного числа гармоник (рис. 3.5, б) гармоники с частотой требуемой кратности служит фильтр (рис. 3.1 и рис. 3.2). Это колебательный контур высокой добротности, настроенный на частоту гармоники  $n\omega$ , где  $n = 2$  в удвоителе частоты,  $n = 3$  в утроителе частоты и т. д. Добротность контура подбирается так, чтобы его полоса пропускания (см. рис. 3.5, в) была меньше интервала между соседними гармониками.

При этом условии соседние гармоники (и тем более удаленные) не будут создавать падения напряжения на контуре и на нем выделится падение напряжения лишь от той гармоники, на которую он настроен (рис. 3.5, г).

Явление умножения частоты используют в тех случаях, когда непосредственное генерирование колебаний высокой частоты по каким-либо причинам не является целесообразным или затруднено. Особенно часто умножители частоты находят применение в радиопередающих устройствах с частотной модуляцией. Умножение несущей частоты ЧМ-колебания всегда сопровождается умножением в то же число раз индекса модуляции. А при большом индексе модуляции (после умножения в  $n$  раз) ширина спектра ЧМ-сигнала практически не зависит от частоты модуляции. Это способствует улучшению качества передачи информации по радио при частотной модуляции.

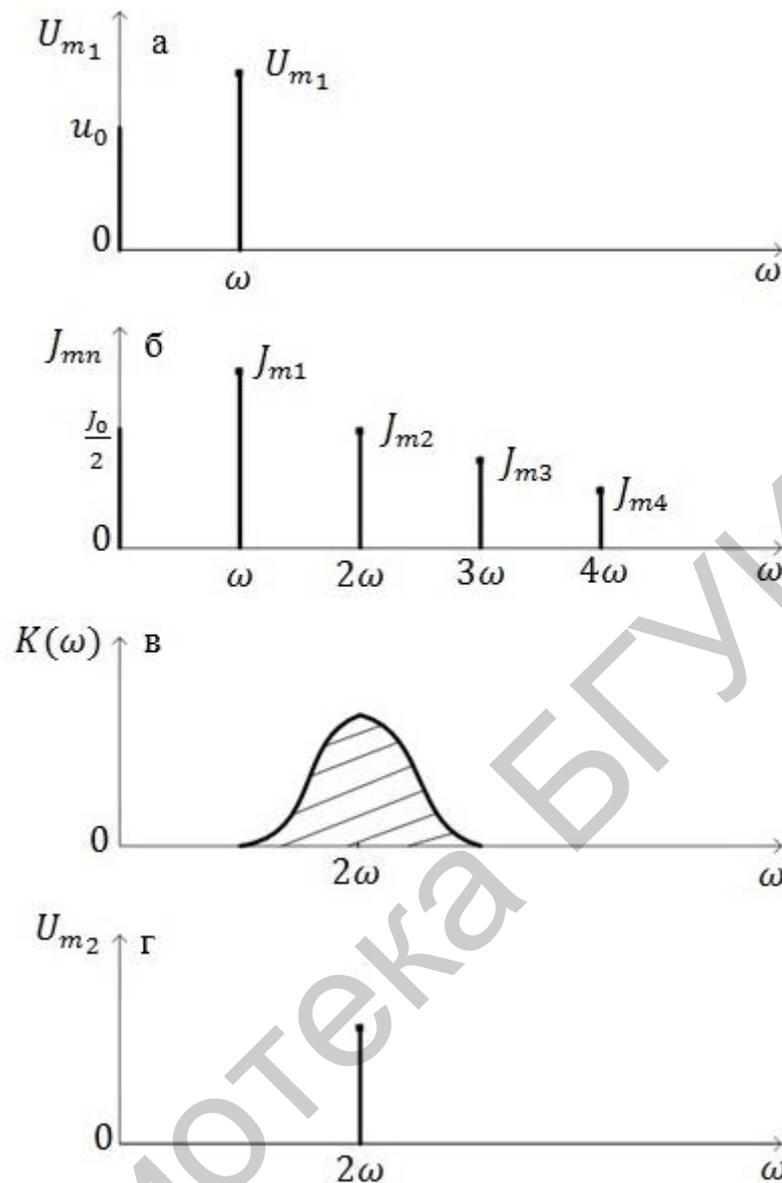


Рис. 3.5

### 3.3. Преобразование спектра сигнала при гетеродинировании

Гетеродинирование, или преобразование частоты, – это перенос спектра сигнала в другую область частот с сохранением его формы. При гетеродинировании из сигналов различных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  выделяется сигнал разностной (промежуточной  $\omega_{\text{пр}}$ ) частоты  $\omega_{\text{пр}} = |\omega_1 - \omega_2|$ .

Гетеродинирование в радиоприемных устройствах используется для понижения частоты сигналов, подлежащих дальнейшему усилению. Гетеродинирование чаще всего осуществляется при помощи управляемого НЭ (на рис 3.6, а – смесителя), к которому подводятся два напряжения: первое – синусоидальное напряжение от местного генератора (гетеродина) с частотой  $\omega_r$ , которое должно быть достаточно большим, и второе – напряжение принимаемого высокочастотного модулированного сигнала с несущей частотой  $\omega_0$ . Величину  $\omega_r$  в супергетеродинном приемнике выбирают так, чтобы

разность  $\omega_r - \omega_0$  была для всех несущих частот одинаковой. В целях уменьшения количества нежелательных гармоник, частоты которых могут оказаться в окрестности промежуточной частоты, модулированный сигнал должен быть настолько слабым, чтобы по отношению к нему НЭ был линейным.

Рассмотрим преобразование частоты на примере НЭ, ВАХ которого аппроксимируется полиномом второй степени:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2. \quad (3.5)$$

На НЭ (рис 3.6, б) одновременно действуют два напряжения:

$$u_1 = U_{m_1} \sin \omega_0 t \text{ и } u_2 = U_{m_2} \sin \omega_r t, \text{ т. е.}$$

$$u = u_1 + u_2 = U_{m_1} \sin \omega_0 t + U_{m_2} \sin \omega_r t.$$

Контур фильтра настроен на разностную частоту  $\omega_{\text{пр}} = |\omega_0 - \omega_r| = 1/\sqrt{LC}$ .

Ток в такой цепи с НЭ определяется выражением

$$i = a_0 + a_1(u_1 + u_2) + a_2(u_1 + u_2)^2 = \\ = a_0 + a_1(U_{m_1} \sin \omega_0 t + U_{m_2} \sin \omega_r t) + a_2(U_{m_1} \sin \omega_0 t + U_{m_2} \sin \omega_r t)^2.$$

После преобразования получим

$$i = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{m_1}^2 + \frac{1}{2} a_2 U_{m_2}^2 + a_1 U_{m_1} \sin \omega_0 t + a_1 U_{m_2} \sin \omega_r t - \\ - \frac{1}{2} a_2 U_{m_2} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} a_2 U_{m_2}^2 \cos 2\omega_r t + a_2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\omega_0 - \omega_r)t - \\ - a_2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\omega_0 + \omega_r)t. \quad (3.6)$$

Частоты  $\omega_0 \pm \omega_r$  носят название простых комбинационных частот. Составляющая тока разностной частоты  $i_{\text{разн}} = a_2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\omega_0 - \omega_r)t$  будет создавать на контуре (см. рис. 3.6, б), настроенном на эту частоту, падение напряжения. Остальные компоненты выражения (3.6) будут шунтироваться контуром.

Спектры входного и выходного сигналов гетеродина изображены на рис. 3.7.

Сигналы, частота которых отличается от несущей  $\omega_0$  на  $2\omega_{\text{пр}}$  ( $\omega_3$  – «зеркальная» частота), тоже могут пройти через фильтр (рис. 3.7), так как  $|\omega_0 - \omega_r| = |\omega_3 - \omega_r|$ .

Для защиты от «зеркальной» частоты (помехи) в усилителе высокой частоты (преселекторе) радиоприемного устройства ставят дополнительный фильтр, который не пропускает «зеркальную» помеху.

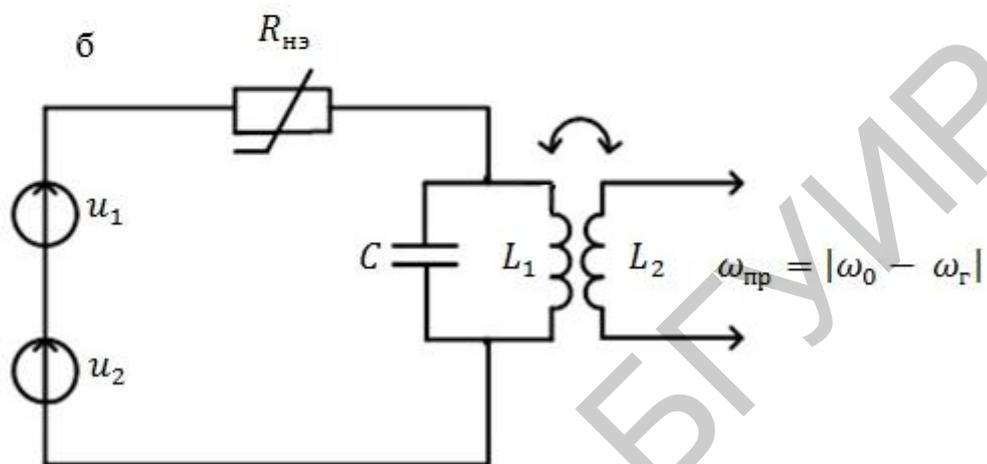
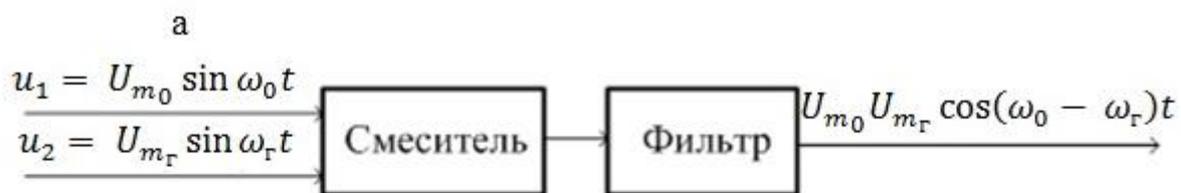


Рис. 3.6

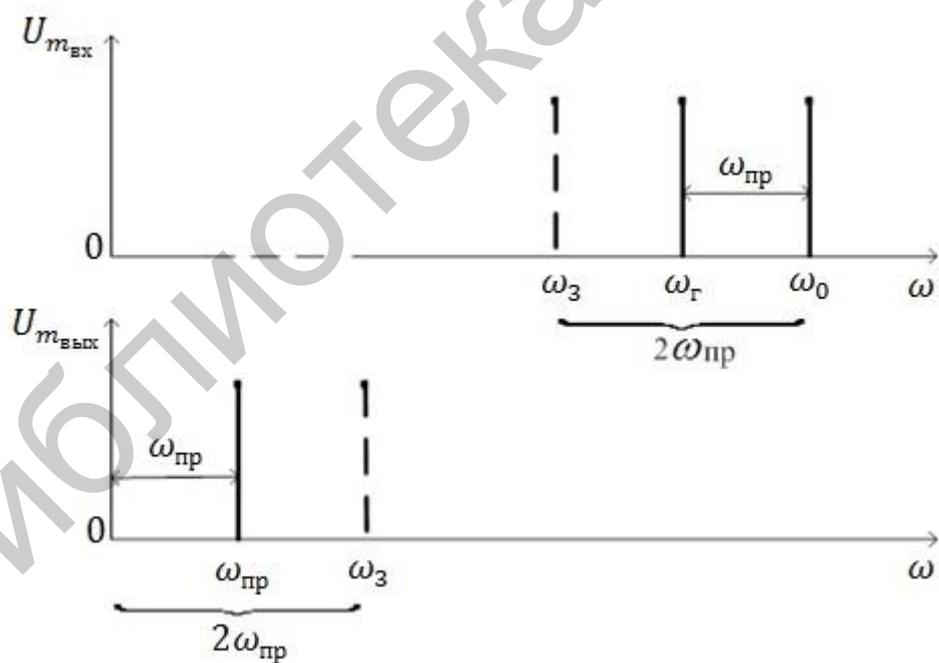


Рис. 3.7

### 3.4. Преобразование спектра сигнала при амплитудной модуляции

Структурная схема амплитудного модулятора приведена на рис. 3.8.

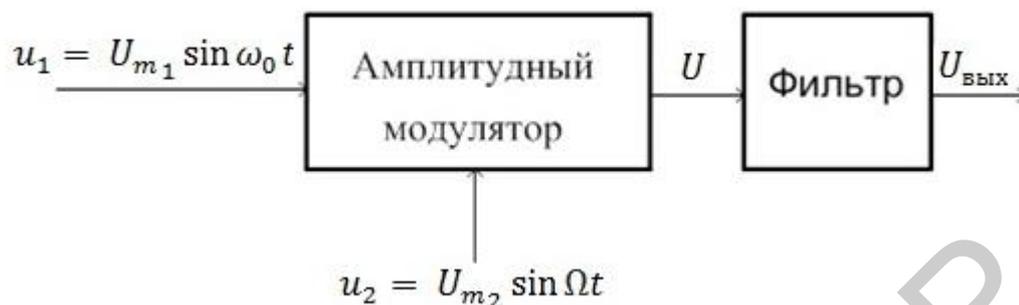


Рис. 3.8

В амплитудном модуляторе (рис. 3.9) на нелинейный элемент ( $R_{НЭ}$ ), преобразующий спектр суммы двух сигналов, подаются:

- 1) напряжение  $u_1 = U_{m_1} \sin \omega_0 t$ , которое представляет собой сигнал несущей высокой частоты  $\omega_0$ ;
- 2) низкочастотное модулирующее напряжение  $u_2 = U_{m_2} \sin \Omega t$ , которое является полезной передаваемой информацией, причем  $\omega_0 \gg \Omega$ .

Сумма сигналов на входе НЭ равна

$$u = u_1 + u_2 = U_{m_1} \sin \omega_0 t + U_{m_2} \sin \Omega t. \quad (3.7)$$

Если ВАХ НЭ аппроксимируется полиномом второй степени, то, подставив сумму (3.7) в выражение (3.5), получим

$$\begin{aligned} i = & a_0 + a_1 U_{m_1} \sin \omega_0 t + a_1 U_{m_2} \sin 2\Omega t + a_2 U_{m_1}^2 \sin^2 \omega_0 t + \\ & + 2a_2 U_{m_1} U_{m_2} \sin \omega_0 t \sin \Omega t + a_2 U_{m_2}^2 \sin^2 \Omega t = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{m_1}^2 + \frac{1}{2} a_2 U_{m_2}^2 + \\ & + a_1 U_{m_1} \sin \omega_0 t + a_1 U_{m_2} \sin \Omega t - \frac{1}{2} a_2 U_{m_2} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} a_2 U_{m_2}^2 \cos 2\Omega t + \\ & + a_2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\omega_0 - \Omega)t - a_2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения видно, что НЭ преобразует спектр входного сигнала таким образом, что на выходе НЭ появляются новые боковые гармоники на комбинационных частотах. Фильтр, представляющий собой колебательный контур (рис. 3.9), настраивается на нужную частоту  $\omega_0$ , и его полоса пропускания выбирается таким образом, чтобы пропускались только простые комбинационные частоты  $\omega_0 \pm \Omega$ . Тогда на выходе фильтра будут только следующие составляющие спектра амплитудного модулятора:

$$\begin{aligned} i_{\text{мод}} = & a_1 U_{m_1} \sin \omega_0 t + 2a_2 U_{m_1} U_{m_2} \sin \omega_0 t \sin \Omega t = \\ = & a_1 U_{m_1} \left[ 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m_2} \sin \Omega t \right] \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

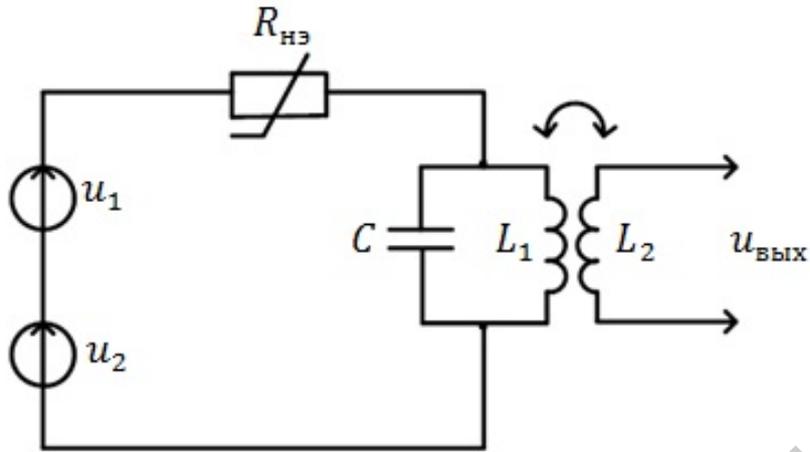


Рис. 3.9

Это выражение можно представить в виде

$$i_{\text{мод}} = I_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad (3.8)$$

где  $I_m = a_1 U_{m_1}$ ,  $m = 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m_2}$  – глубина модуляции.

Спектры входного и выходного сигналов представлены на рис. 3.10.

Закон изменения амплитудно-модулированного тока  $i_{\text{мод}}$  (3.8) такой же, как закон изменения модулирующего колебания ( $u_2 = u_{m_2} \sin \Omega t$ ), что важно с точки зрения неискаженной передачи сигнала в процессе модуляции.

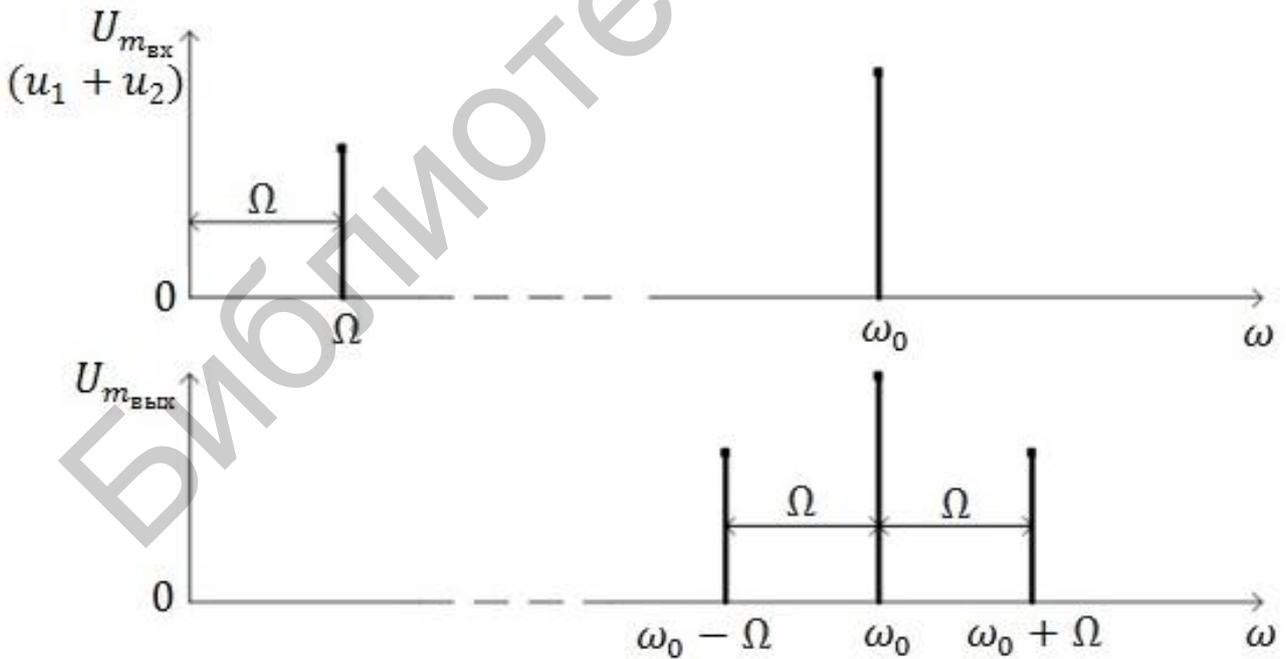


Рис. 3.10

### 3.5. Преобразование спектра сигнала при амплитудном детектировании

В задачу процесса детектирования входит воссоздание на выходе детектора (рис. 3.11) проходящего через него низкочастотного сигнала, форма которого отображена в законе изменения амплитуды модулированного колебания высокой частоты  $\omega_0$ .

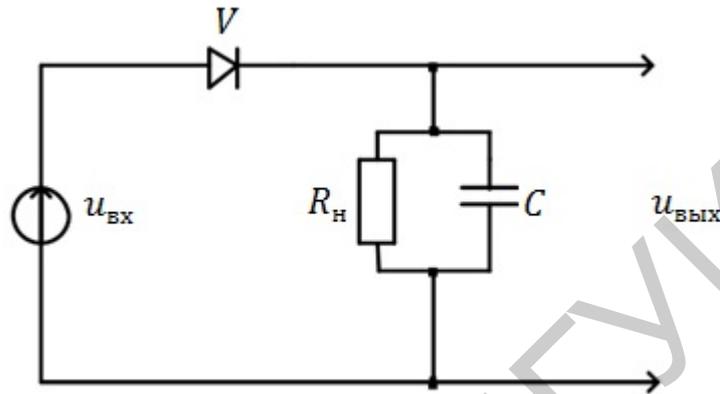


Рис. 3.11

Процесс детектирования со спектральной точки зрения является выделением гармоники на низкой частоте  $\Omega$  модулирующего колебания.

Детектирование может быть осуществлено с помощью НЭ (диод) и фильтрующей цепи ( $RC$ ), как показано на (рис. 3.11).

Физические процессы, протекающие при детектировании, отображены на рис. 3.12.

На вход детектора  $V$  подается амплитудно-модулированное напряжение (рис. 3.12, б):

$$u_{\text{вх}} = U_m (1 + m \sin \Omega t \sin \omega_0 t). \quad (3.9)$$

Ток в цепи вследствие нелинейности ВАХ НЭ (рис. 3.12, а) представляет собой импульсы положительной полярности (рис. 3.12, в).

Во время действия каждого из импульсов конденсатор  $C$  (рис. 3.11) быстро заряжается через внутреннее сопротивление детектора  $V$ . По окончании действия импульса конденсатор  $C$  медленно разряжается через сопротивление нагрузки  $R_н$ , так как сопротивление детектора  $V$  в обратном направлении велико.

Постоянная времени цепи  $\tau_{\text{ц}} = RC$  выбирается из условия

$$T_{\text{в}} \ll \tau_{\text{ц}} \ll T_{\text{н}},$$

где  $T_{\text{в}} = 2\pi/\omega_0$  – период колебаний несущей высокой частоты  $\omega_0$ ;  $T_{\text{н}} = 2\pi/\Omega$  – период колебаний модулирующего напряжения низкой частоты  $\Omega$ .

При этом условии усредненное значение выходного напряжения (рис. 3.12, г) примерно соответствует огибающей импульсов, т. е. модулирующему напряжению.

В зависимости от амплитуды входного сигнала детектор может работать либо в режиме квадратичного детектирования (при малых амплитудах  $U_{\text{вх}}$ ), либо в режиме линейного детектирования (при больших амплитудах  $U_{\text{вх}}$ ).

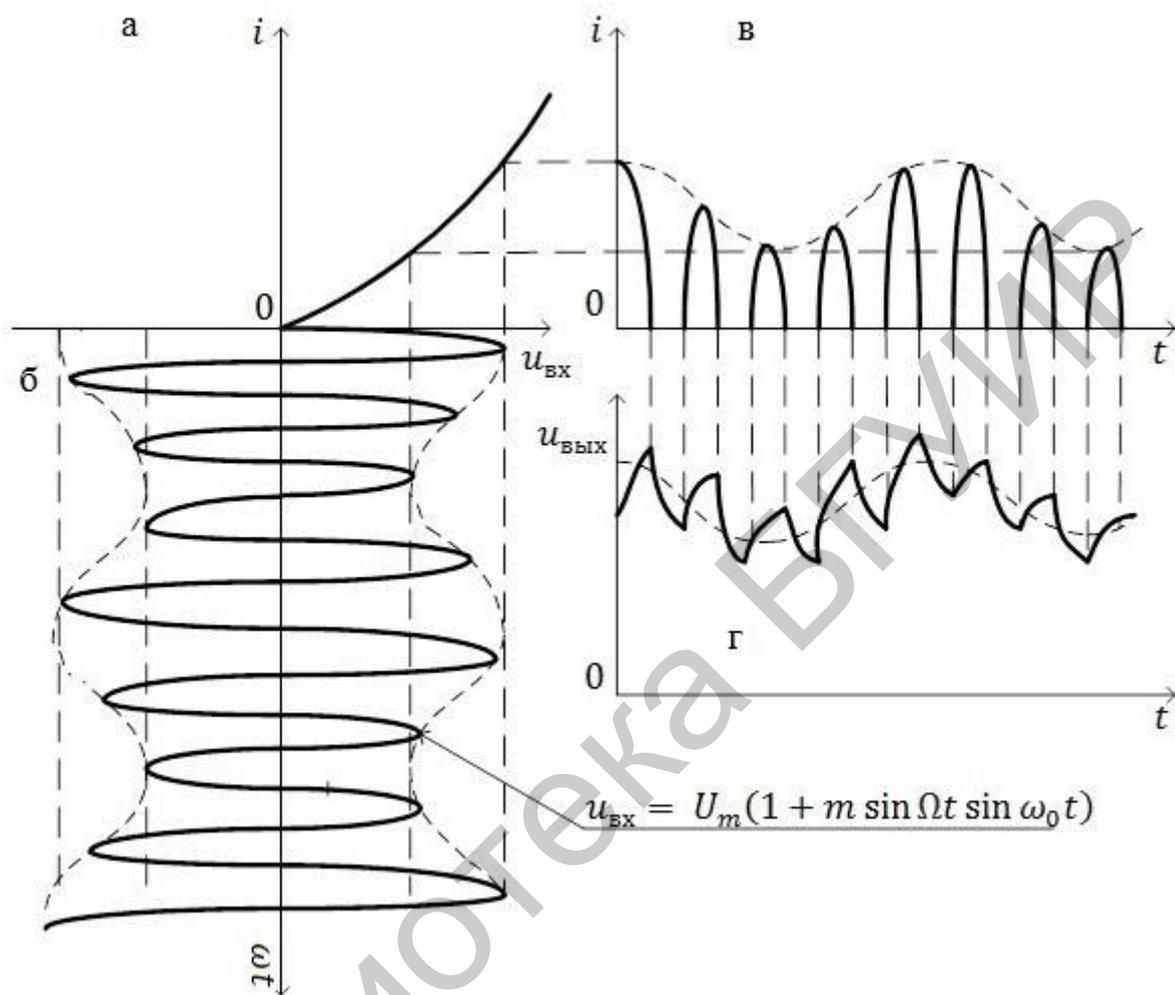


Рис. 3.12

При квадратичном детектировании ВАХ НЭ в схеме детектора аппроксимируется выражение  $i = a_2 u^2$ . Поставив в эту формулу выражение для амплитудно-модулированного напряжения (3.9), получим

$$i = a_2 U_m^2 (1 + m \sin \Omega t)^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Но  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ , тогда

$$i = aU_m^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{m^2}{4} + m \sin \Omega t - \frac{m^2}{4} \cos 2\Omega t - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \cos 2\omega_0 t - m \sin \Omega t \cos 2\omega_0 t + \frac{m^2}{4} \cos 2\Omega t \cos 2\omega_0 t \right]. \quad (3.10)$$

В нагрузке детектора (колебательном контуре  $R_{\text{н}}C$ ) выделяются: постоянное напряжение, напряжение с частотой модулирующего сигнала  $\Omega$ , напряжение удвоенной частоты  $2\Omega$ .

Так как амплитуда напряжения удвоенной частоты в выражении (3.10) пропорциональна  $m^2$ , то квадратичное детектирование целесообразно применять при малой глубине модуляции  $m$ .

При линейном детектировании ВАХ детектора аппроксимируется ломаной линией (рис. 3.13).

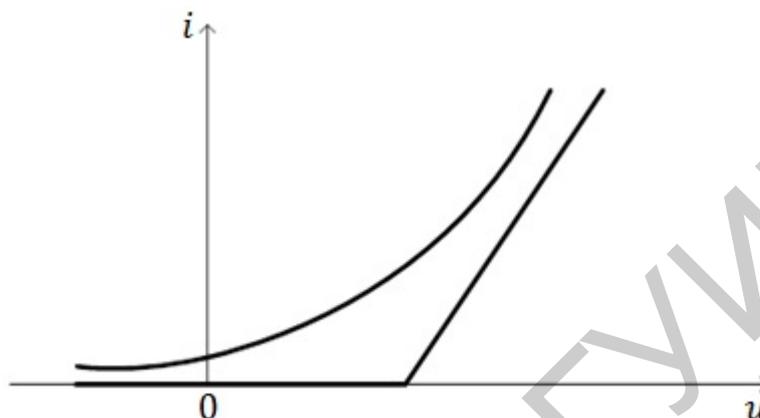


Рис. 3.13

Если рабочая точка выбрана на линейном участке ВАХ, то ток после детектора  $V$  (рис. 3.12, в) имеет характер периодической последовательности импульсов с амплитудой  $I_m = I_0(1 + m \sin \Omega t)$ . Аналитическое выражение для одного импульса согласно формуле (3.2) имеет вид

$$i(t) = I_m \frac{\cos \omega_0 t - \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

При небольших значениях глубины модуляции  $m$  можно положить, что угол отсечки  $\theta$  не зависит от амплитуды импульса  $I_m$ , тогда постоянная составляющая этих импульсов с учетом формулы (3.2) равна

$$\begin{aligned} I_{\text{дет}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\theta i d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta I_m \frac{\cos \omega_0 t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} d(\omega t) = \\ &= \frac{I_m}{\pi(1 - \cos \theta)} (\sin \theta - \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Подставив в это выражение значение  $I_m = I_0(1 + m \sin \Omega t)$ , получим

$$I_{\text{дет}} = I_0(1 + m \sin \Omega t) \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)} = I(\theta)(1 + m \sin \Omega t), \quad (3.11)$$

где  $I(\theta) = I_0 \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}$ .

По результатам вышеприведенных преобразований построены (рис. 3.14) спектры сигналов на входе и выходе амплитудного детектора при выборе рабочей точки на линейном участке ВАХ НЭ.

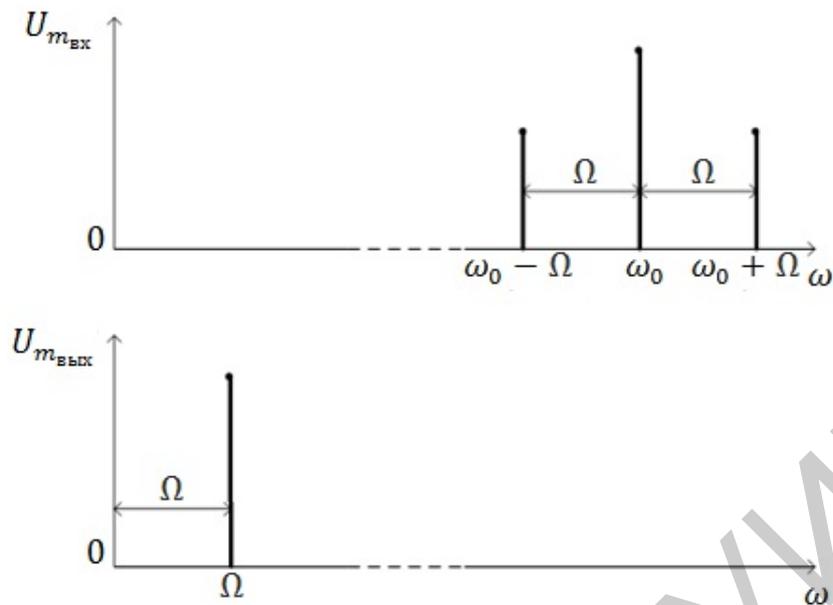


Рис. 3.14

### 3.6. Преобразование спектра сигнала при выпрямлении

Упрощенная схема выпрямителя приведена на рис. 3.15. На НЭ схемы поступает синусоидальное напряжение, спектр которого, как показано в подразд. 3.2, содержит постоянную составляющую  $U_0$  и одну гармонику  $U_{m1}$  на частоте  $\omega$  (рис. 3.16, а). На выходе НЭ в спектре сигнала, кроме постоянной составляющей, появляется множество гармоник на частотах, кратных  $\omega$  (рис. 3.16, б). Все гармоники на выходе выпрямителя нежелательны, так как вызывают ненужную пульсацию напряжения на выходе. Поэтому в любом выпрямителе с НЭ сопрягается линейная цепь (фильтр нижних частот) с частотой среза  $\omega_c$ . Значение частоты среза (рис. 3.16, в) выбирается меньшим минимальной частоты  $\omega$  первой гармоники спектра сигнала на выходе НЭ, т. е.  $\omega_c < \omega_0$ . При этом условии гармоники спектра на выходе НЭ (вторая и далее) не будут создавать заметного падения напряжения на нагрузке фильтра  $R_H$ , и спектр сигнала на выходе выпрямителя будет содержать одну гармонику – постоянную составляющую (рис. 3.16, г).

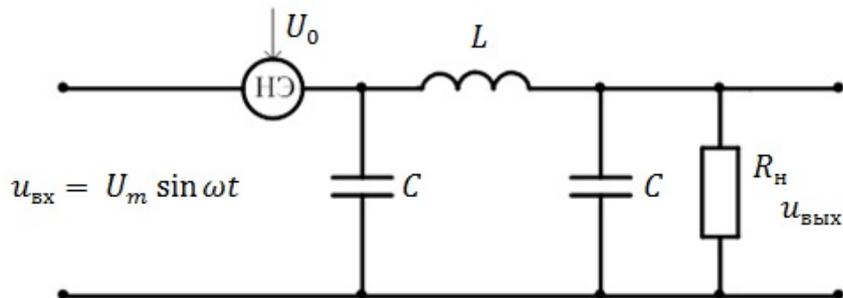


Рис. 3.15

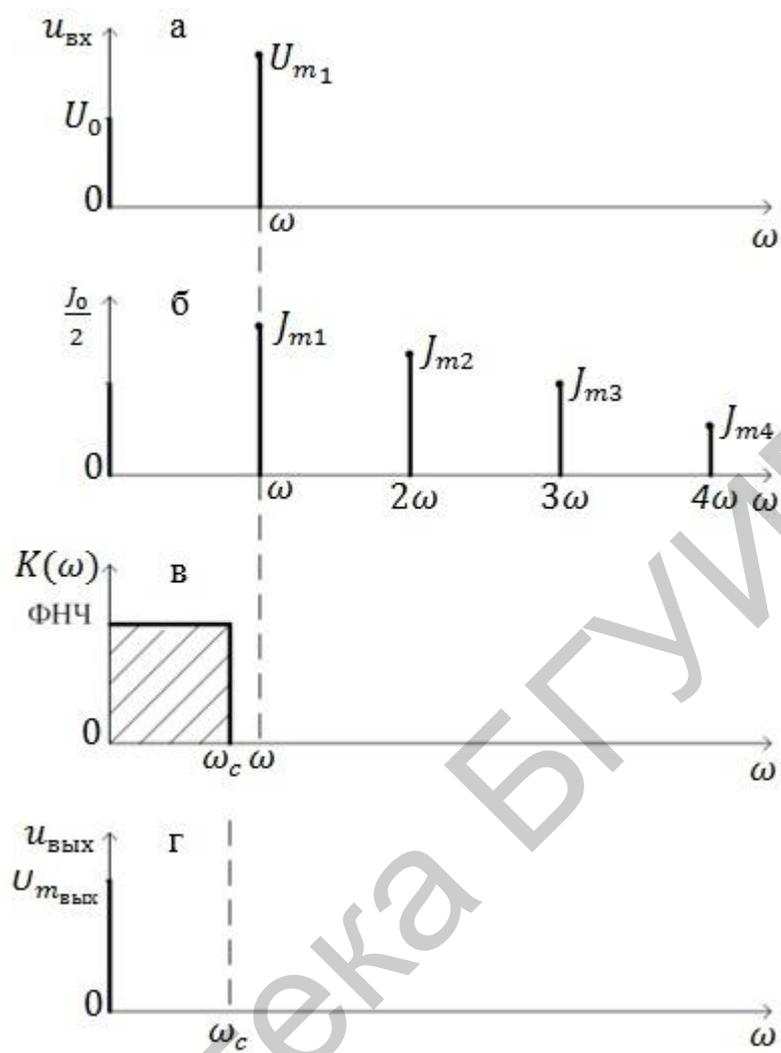


Рис. 3.16

## Основные свойства преобразований Фурье

Таблица П.1.1

Наименование	Формула
Линейность	$F[af_1(t) + bf_2(t)] = aS_1(j\omega) + bS_2(j\omega)$
Дуальность	$S(j\omega) = F[f(t)]; S(t) = -F^{-1}[2\pi j f^*(j\omega)]$ $f(t) = F^{-1}[S(j\omega)]; 2\pi j f^*(j\omega) = F[S(t)]$
Теорема дифференцирования	$F\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega S(j\omega)$
Теорема интегрирования	$F\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega} S(j\omega)$
Теорема подобия (масштаба)	$F[f(at)] = \frac{1}{a} S\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
Теорема о сдвиге (запаздывании)	$F[f(t \pm t_0)] = S(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
Теорема о модуляции	$F[f(t)e^{\pm j\omega_0 t}] = S[j(\omega \mp \omega_0)]$ $F[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\{S[j(\omega - \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_0)]\}$ $F[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}\{S[j(\omega - \omega_0)] - S[j(\omega + \omega_0)]\}$
Теорема о свертке	$F[f_1(t)f_2(t)] = S_1(j\omega)S_2(j\omega)$
Теорема Рэлея	$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(j\omega)]^2 d\omega$

Спектры пачек видеоимпульсов произвольной формы

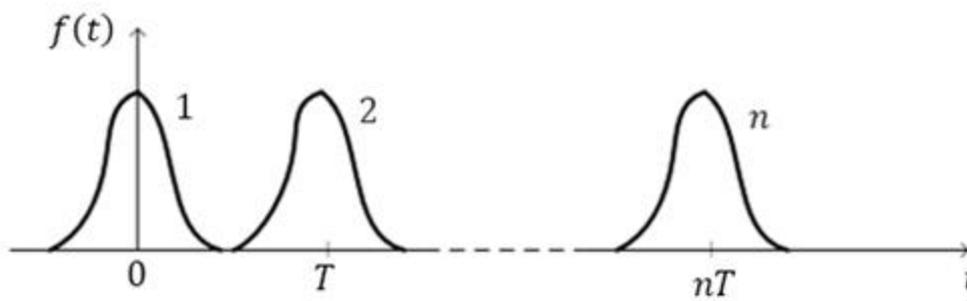


Рис. П.2.1

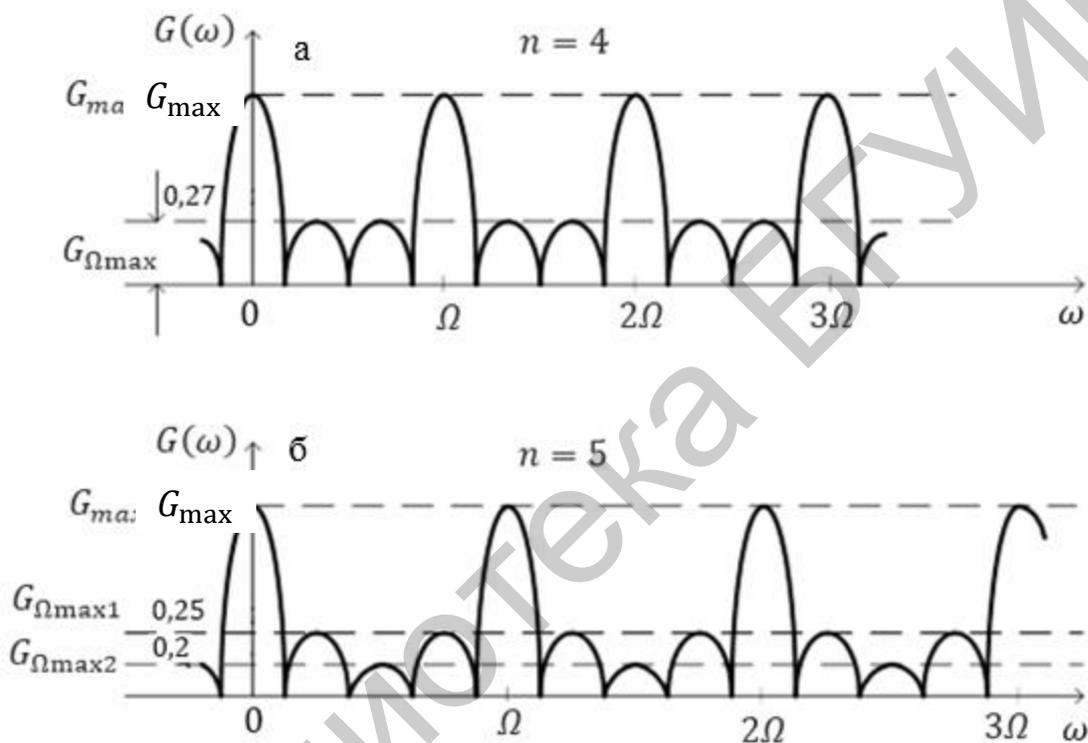


Рис. П.2.2

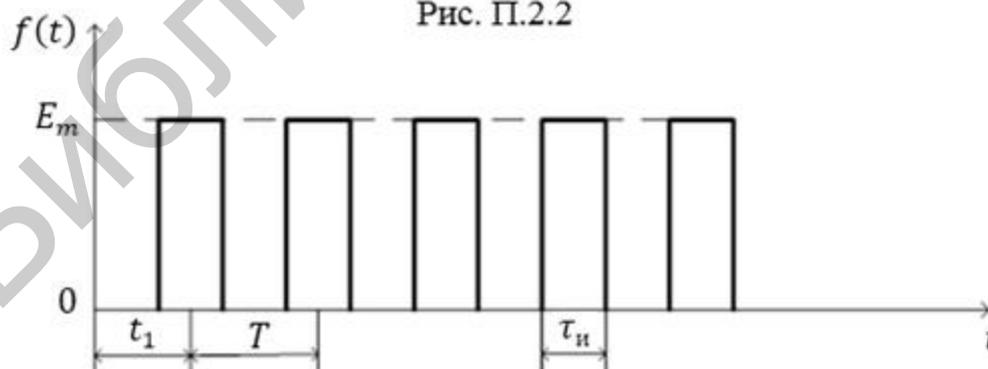


Рис. П.2.3

Число локальных максимумов спектра пачки импульсов и их значения приведены в табл. П.2.1.

Таблица П.2.1

№	Высота лепестков вдоль интервала повторения $\Omega$								
2	1	1							
3	1	0,33	1						
4	1	0,27	0,27	1					
5	1	0,25	0,2	0,25	1				
6	1	0,235	0,173	0,173	0,235	1			
7	1	0,23	1,16	0,143	0,16	0,23	1		
8	1	0,227	0,15	0,128	0,128	0,15	0,227	1	
9	1	0,222	0,144	0,118	0,111	0,118	0,144	0,222	1

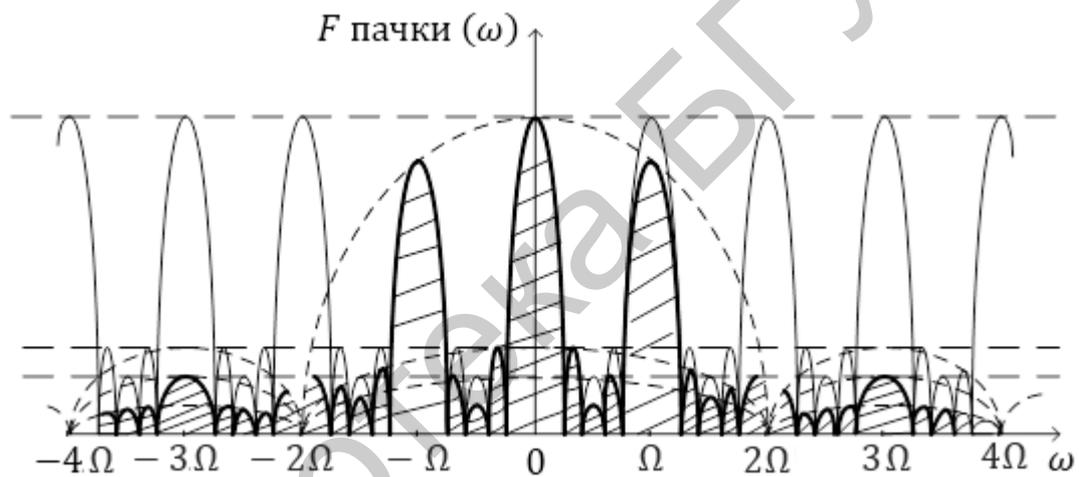
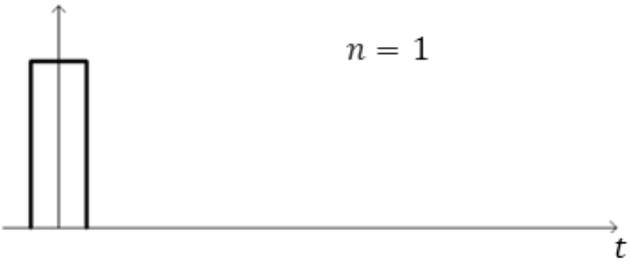
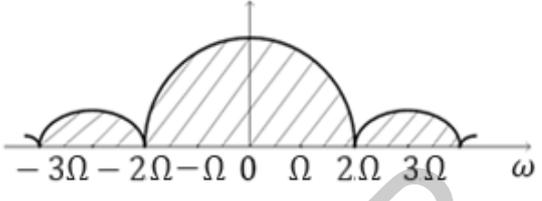
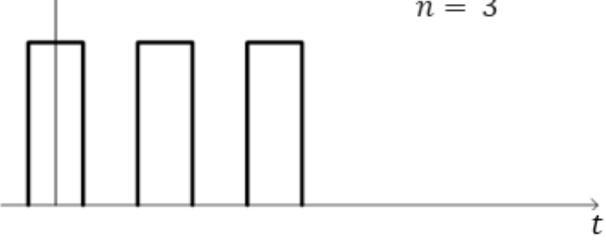
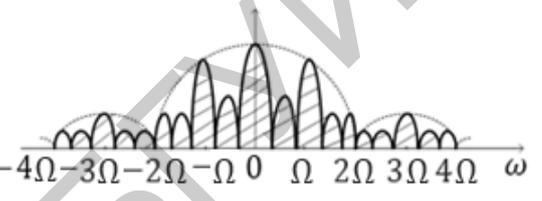
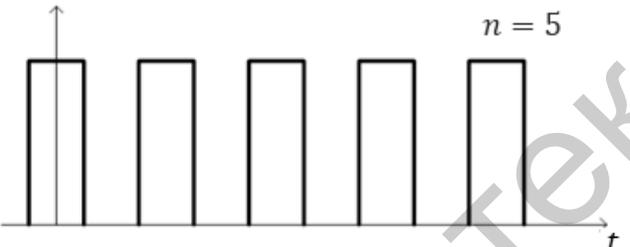
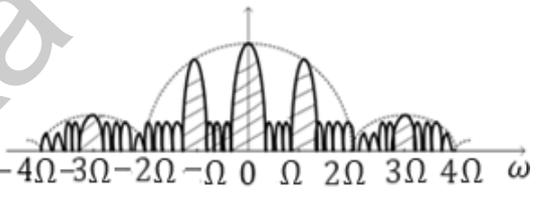
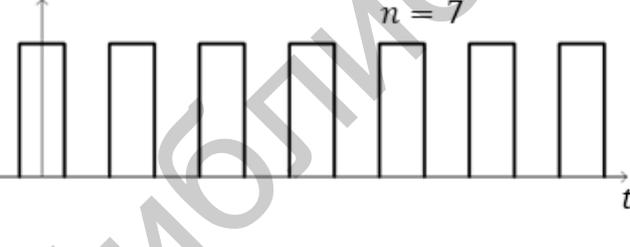
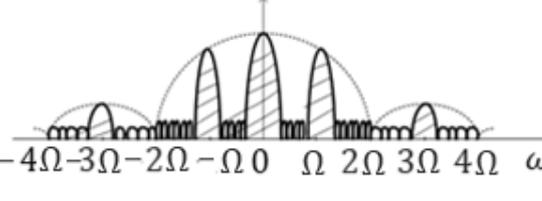
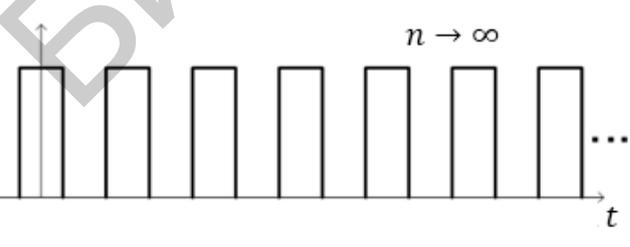
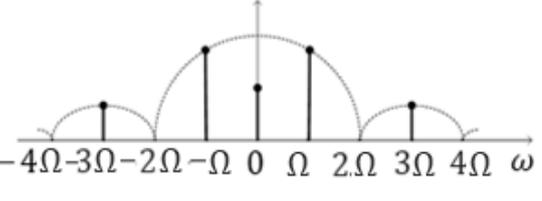


Рис. П.2.4

Спектры пачки прямоугольных видеоимпульсов с различным числом  $n$  при  $q = 2$  представлены в табл. П.2.2.

Таблица П.2.2

$f(t)$	$F(\omega)$
<p style="text-align: right;"><math>n = 1</math></p> 	
<p style="text-align: right;"><math>n = 3</math></p> 	
<p style="text-align: right;"><math>n = 5</math></p> 	
<p style="text-align: right;"><math>n = 7</math></p> 	
<p style="text-align: right;"><math>n \rightarrow \infty</math></p> 	

**Пример расчета АЧС**

Пример П.3.1. Найти аналитическое выражение, рассчитать и построить АЧС периодической последовательности видеоимпульсов косинусоидальной формы (рис. П.3.1), если  $E_m = 6,28$  В,  $T = 6$  мкс,  $\tau_{и} = 1,5$  мкс.

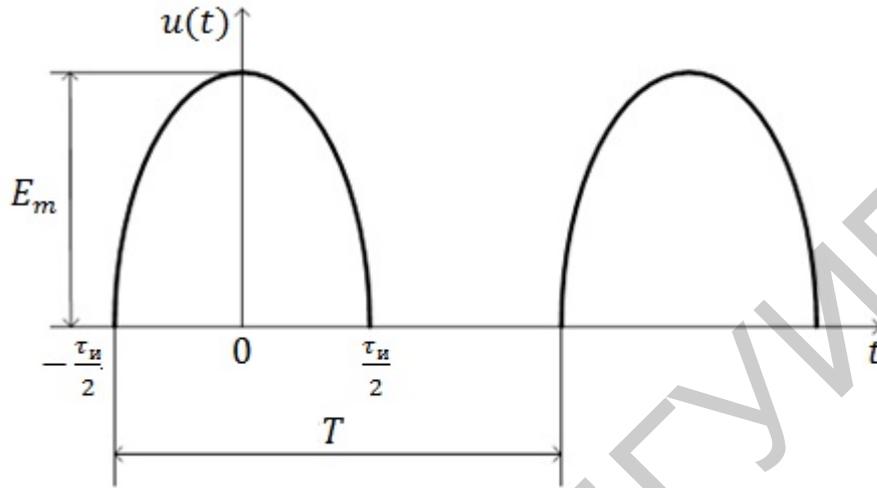


Рис. П.3.1

Решение. Аналитическое выражение сигнала на интервале  $(-\frac{\tau_{и}}{2}, \frac{\tau_{и}}{2})$  согласно (1.67)  $u(t) = E_m \cos \pi \frac{t}{\tau_{и}}$ .

Постоянная составляющая (1.5) и удвоенное значение комплексных коэффициентов (1.9) ряда Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau_{и}}{2}}^{\frac{\tau_{и}}{2}} E_m \cos \frac{\pi t}{\tau_{и}} dt = \frac{2E_m}{\pi q} = 1 \text{ В};$$

$$\dot{A}_{mn} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_{и}}{2}}^{\frac{\tau_{и}}{2}} E_m \cos \frac{\pi t}{\tau_{и}} e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Используя формулу Эйлера  $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mn} &= \frac{2E_m}{T} \int_{-\frac{\tau_{и}}{2}}^{\frac{\tau_{и}}{2}} \frac{e^{j\pi \frac{t}{\tau_{и}}} + e^{-j\pi \frac{t}{\tau_{и}}}}{2} e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2E_m}{T} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau_{и}}{2}}^{\frac{\tau_{и}}{2}} e^{j(\frac{\pi}{\tau_{и}} - n\omega_1)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau_{и}}{2}}^{\frac{\tau_{и}}{2}} e^{-j(\frac{\pi}{\tau_{и}} + n\omega_1)t} dt \right] = \\ &= \frac{2E_m}{T} \left[ \frac{e^{j(\frac{\pi}{\tau_{и}} - n\omega_1)\frac{\tau_{и}}{2}} - e^{-j(\frac{\pi}{\tau_{и}} - n\omega_1)\frac{\tau_{и}}{2}}}{2j(\frac{\pi}{\tau_{и}} - n\omega_1)} + \frac{e^{j(\frac{\pi}{\tau_{и}} + n\omega_1)\frac{\tau_{и}}{2}} - e^{-j(\frac{\pi}{\tau_{и}} + n\omega_1)\frac{\tau_{и}}{2}}}{2j(\frac{\pi}{\tau_{и}} + n\omega_1)} \right] = \\ &= \frac{2E_m}{T} \left[ \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2})}{\frac{\pi}{\tau_{и}} - n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2})}{\frac{\pi}{\tau_{и}} + n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2}} \right] = \frac{4\pi E_m \cos n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2}}{T\tau_{и} \frac{\pi^2}{\tau_{и}^2} - n^2\omega_1^2}, \end{aligned}$$

откуда амплитудно-частотный спектр

$$A_{mn} = \frac{4\pi E_m}{T\tau_{и}} \left| \frac{\cos n\omega_1 \frac{\tau_{и}}{2}}{\frac{\pi^2}{\tau_{и}^2} - n^2\omega_1^2} \right|.$$

Преобразуем это выражение к более удобному для анализа и расчета виду:

$$A_{mn} = \frac{4E_m}{\pi q} \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{q}}{1 - \frac{4}{\pi^2} \left(n \frac{\pi}{q}\right)^2} \right|.$$

Для нахождения номеров гармоник, отсутствующих в спектре, приравняем к нулю выражение

$$\frac{\cos \frac{n\pi}{q}}{1 - \frac{4}{\pi^2} \left(n \frac{\pi}{q}\right)^2} = 0,$$

откуда  $\cos \frac{n\pi}{q} = 0$ ,  $\frac{n\pi}{q} = \left(\frac{2k+1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$ ,  $n = \frac{2k+1}{2} q$ ,

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Значит, если  $k = 1$ , то в спектре будет отсутствовать шестая ( $n_1 = 6$ ) гармоника, при  $k = 2$  в спектре будет отсутствовать десятая ( $n_2 = 10$ ) гармоника, при  $k = 3$  – четырнадцатая ( $n_3 = 14$ ) и т. д.

Ширина спектра до первого нуля огибающей

$$\Delta F_1 = \frac{n_1}{T} = \frac{3q}{2T} = \frac{1,5}{\tau_{и}} = \frac{1,5}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ МГц},$$

до второго нуля огибающей

$$\Delta F_2 = \frac{n_2}{T} = \frac{2,5}{\tau_{и}} = \frac{2,5}{1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 1,67 \text{ МГц}.$$

На рис. П.3.2 изображен АЧС периодической последовательности видеоимпульсов косинусоидальной формы.

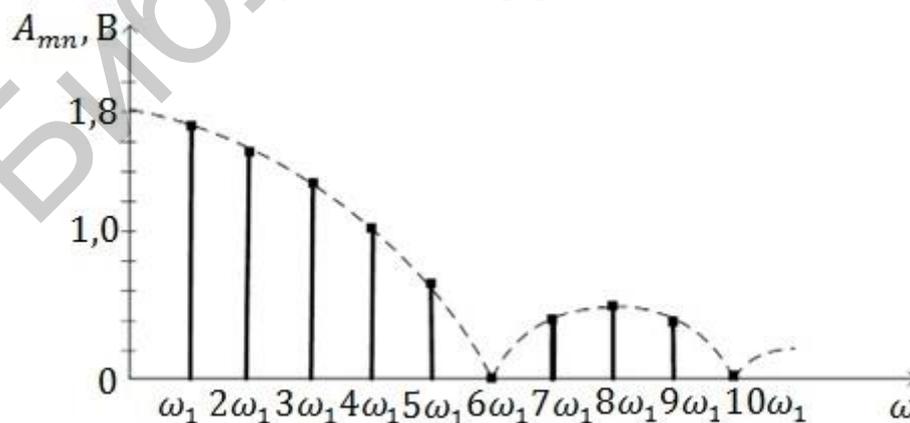


Рис. П.3.2

Табличные значения функций Бесселя при  $m = 5$  и амплитуды гармоник  
(для примера 1.8)

Таблица П.4.1

$n$	$f = f_0 \pm nF$ (МГц)	$ J_n(m) $	$U_{mn} = U_m  J_n(m) $ (мВ)
0	75	0,178	17,8
1	$75 \pm 0,015$	0,328	32,8
2	$75 \pm 0,030$	0,047	4,7
3	$75 \pm 0,045$	0,365	36,5
4	$75 \pm 0,060$	0,391	39,1
5	$75 \pm 0,075$	0,261	26,1
6	$75 \pm 0,090$	0,131	13,1

Табличные значения функций Бесселя при  $m = 10$ 

Таблица П.5.1

Номер функций Бесселя	Абсолютное значение функции Бесселя при $m = 10$
0	0,25
1	0,04
2	0,25
3	0,06
4	0,22
5	0,23
6	0,01
7	0,22
8	0,32
9	0,29
10	0,21
11	0,12
12	0,06
13	0,03
14	0,01

Таблица П.5.2

Амплитуды гармоник (А)	Частоты гармоник (кГц)
2,5	$100 \cdot 10^3$
2,5	$100 \cdot 10^3 \pm 10$
2,2	$100 \cdot 10^3 \pm 20$
2,3	$100 \cdot 10^3 \pm 25$
2,2	$100 \cdot 10^3 \pm 35$
3,2	$100 \cdot 10^3 \pm 40$
2,9	$100 \cdot 10^3 \pm 45$
2,1	$100 \cdot 10^3 \pm 50$
1,2	$100 \cdot 10^3 \pm 55$

Таблицы и графики к подразд. 2.6

Таблица П.6.1

$f$ , кГц	АЧХ $K(f)$	ФЧХ $\varphi(f)$ , в градусах
0	0,22	90
2	0,37	65
4	0,44	47
6	0,48	36
8	0,5	28
10	0,51	23
12	0,52	20
14	0,527	17
16	0,53	15
18	0,533	14
20	0,536	12
22	0,537	11
26	0,538	9
30	0,54	8,2

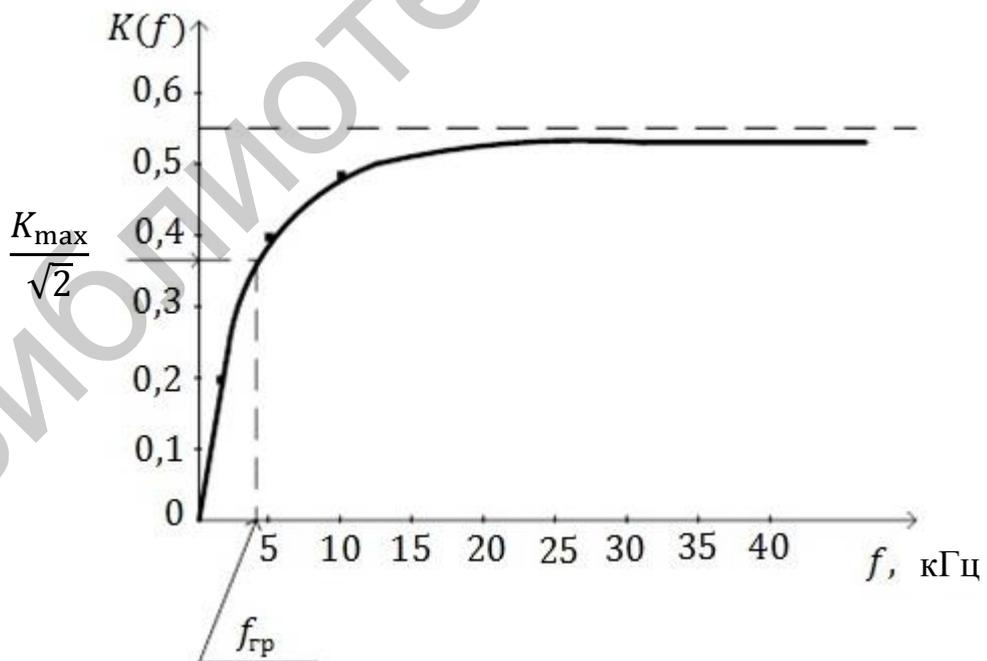


Рис. П.6.1

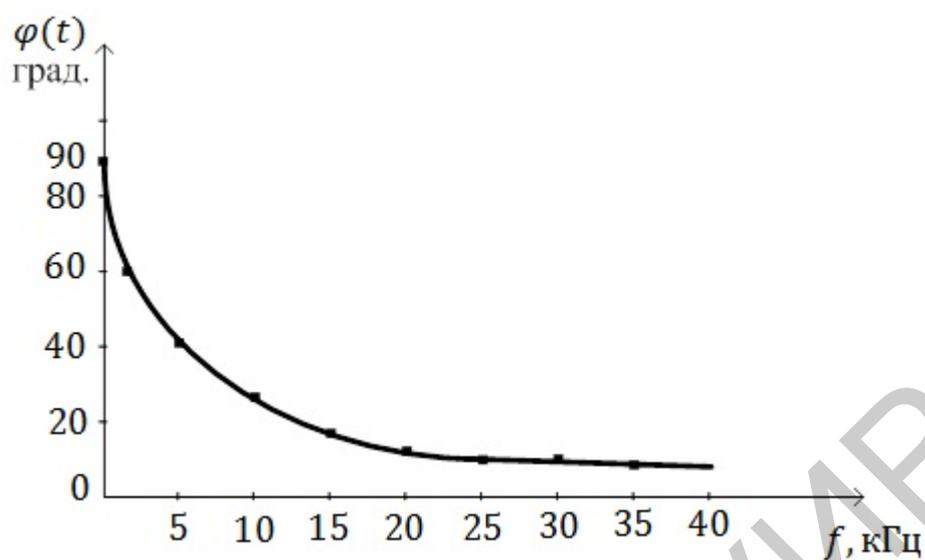


Рис. П.6.2

Значения переходной и импульсной характеристик представлены в табл. П.6.2.

Таблица П.6.2

$t$	$t$ , мкс	$h(t)$	$\kappa(t) \times 10^3, c^{-1}$
	0	0,55	-14,8
	2	0,51	-14
	4	0,49	-13,2
	6	0,46	-12,5
	8	0,44	-11,9
	10	0,42	-11,2
	16	0,35	-9,5
	20	0,31	-8,6
$\tau_{ц}$	26,7	0,26	-7
	40	0,18	-5
$2\tau_{ц}$	53,4	0,13	-3,4
	60	0,1	-2,9
$3\tau_{ц}$	80,1	0,06	-1,7

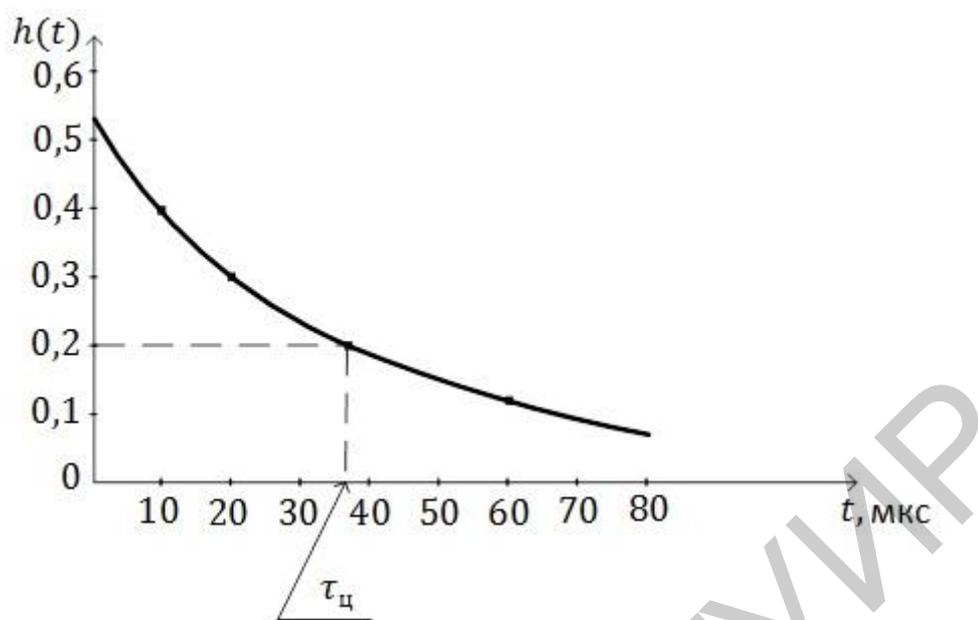


Рис. П.6.3

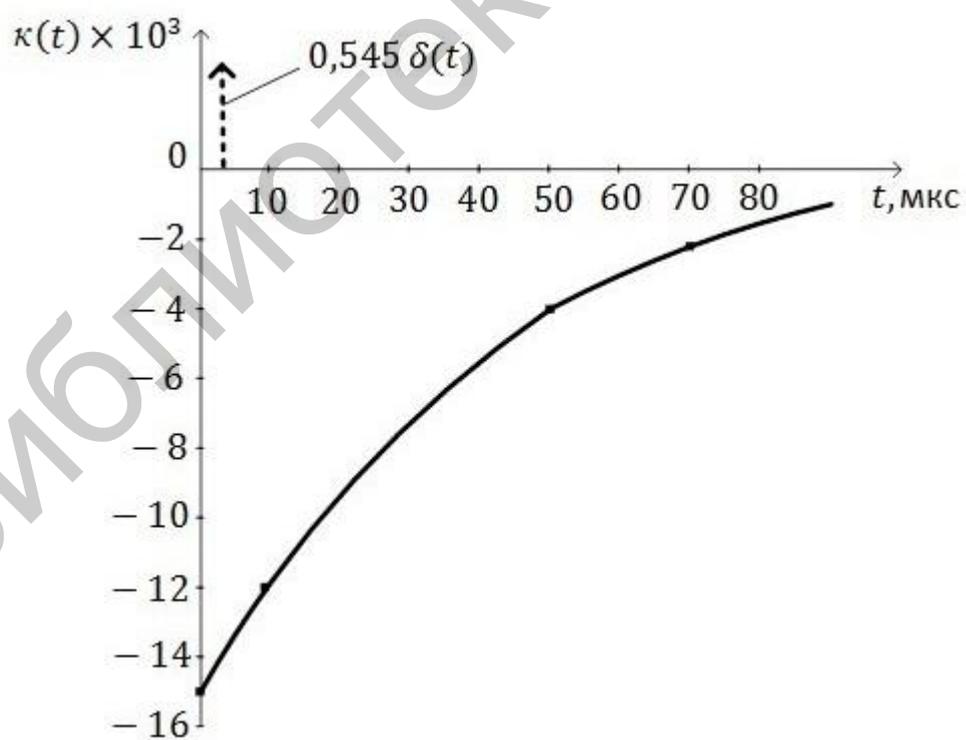


Рис. П.6.4

Таблица П.6.3

$t, \text{мс}$	$U_{\text{ВЫХ}}(t), \text{В}$
0	0,272
$0,2\tau_{\text{И}}$	0,190
$0,3\tau_{\text{И}}$	0,154
$0,4\tau_{\text{И}}$	0,122
$0,5\tau_{\text{И}} -$	0,93
$0,5\tau_{\text{И}} +$	0,457
$0,6\tau_{\text{И}}$	0,413
$0,7\tau_{\text{И}}$	0,374
$0,9\tau_{\text{И}}$	0,306
$\tau_{\text{И}} -$	0,272
$\tau_{\text{И}} +$	0,267
$1,5\tau_{\text{И}}$	-0,162
$2\tau_{\text{И}}$	-0,098
$3\tau_{\text{И}}$	-0,036

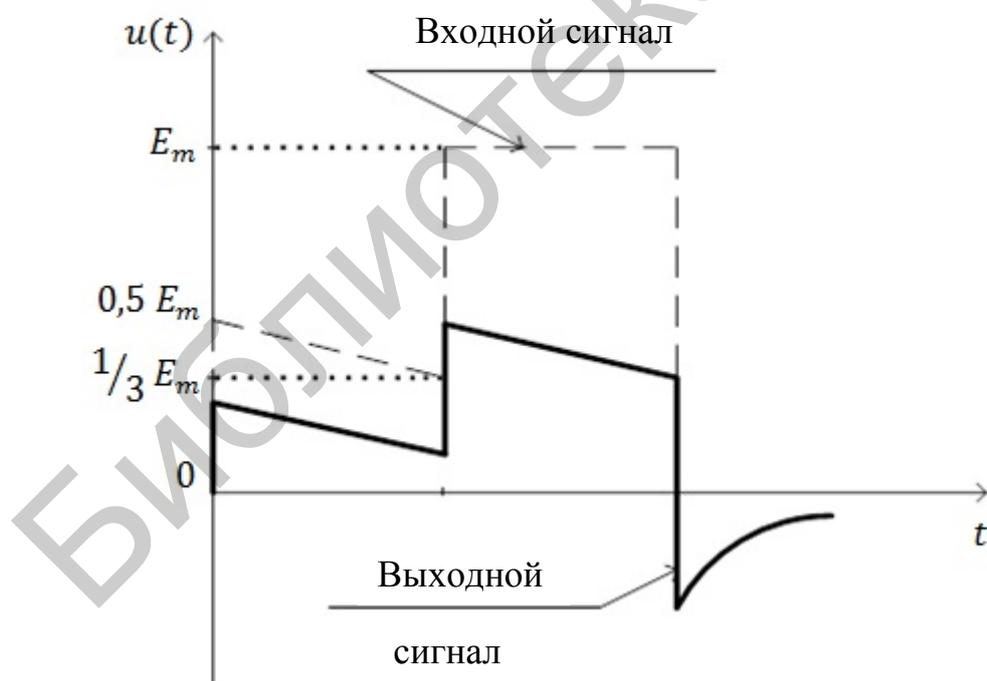


Рис. П.6.5

Таблица П.6.4

$n$	$U_{mn \text{ вх}}, \text{ мВ}$	$\psi_{n \text{ вх}}, \text{ град}$	$K(nF_1)$	$\varphi(nF_1), \text{ град}$	$U_{mn \text{ вых}}, \text{ В}$	$\psi_{n \text{ вых}}, \text{ град}$
0	177	—	0	90	0	—
1	322	-54	0,46	32,5	148	-22
2	239	-112	0,52	17,5	124	-94
3	143	179	0,534	12	76	191
4	93	85	0,539	9	50	94
5	98	-2	0,54	7	53	5
6	90	-65	0,54	6	49	-59
7	51	-117	0,54	5	28	-112
8	7	-90	0,54	5	4	-85
9	39	-61	0,5	4	21	-57
10	51	-114	0,54	3,6	28	-110

Библиотека БГУМ

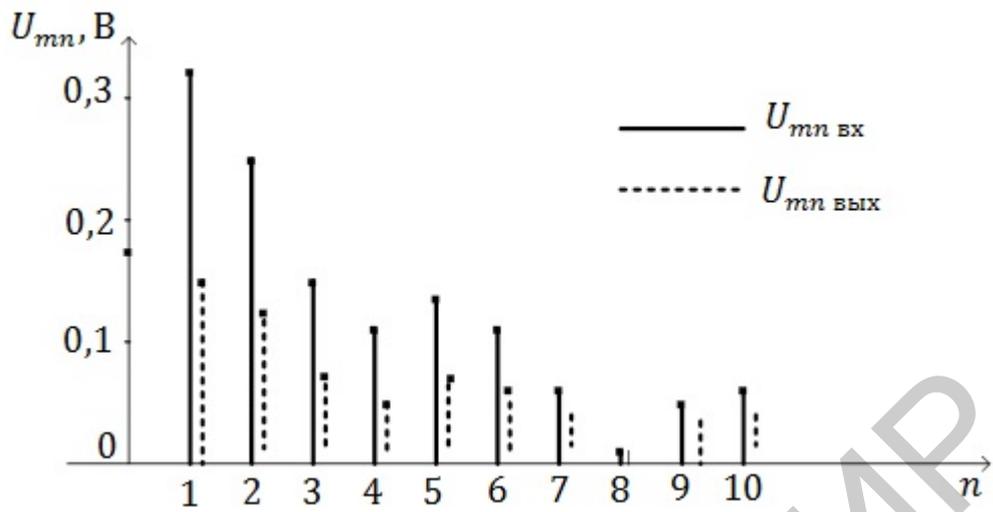


Рис. П.6.6

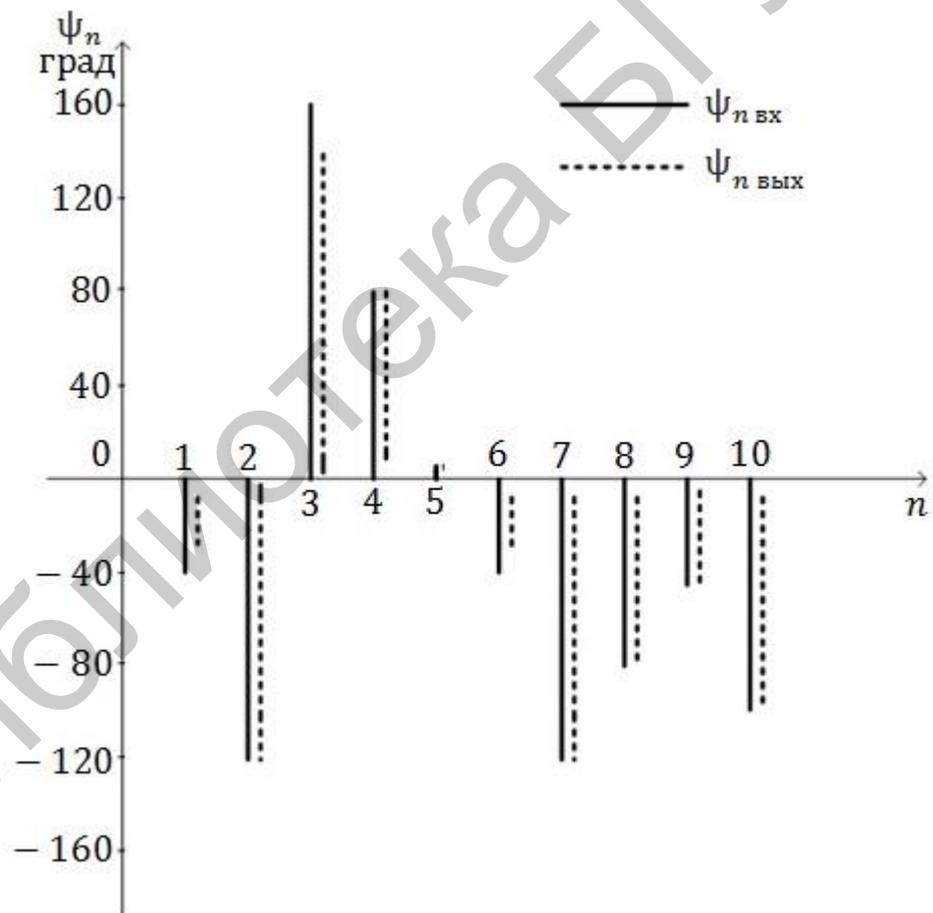


Рис. П.6.7

Таблица П.6.5

$t$	$u_{\text{ВЫХ}}(t), \text{В}$
0	0,12
$0,1\tau_{\text{и}}$	0,23
$0,2\tau_{\text{и}}$	0,190
$0,3\tau_{\text{и}}$	0,1
$0,4\tau_{\text{и}}$	0,14
$0,5\tau_{\text{и}}$	0,27
$0,6\tau_{\text{и}}$	0,37
$0,7\tau_{\text{и}}$	0,4
$0,8\tau_{\text{и}}$ </td <td>0,37</td>	0,37
$0,9\tau_{\text{и}}$	0,26
$\tau_{\text{и}}$	0,02
$1,1\tau_{\text{и}}$	-0,22
$1,2\tau_{\text{и}}$	-0,28
$1,5\tau_{\text{и}}$	-0,17
$2\tau_{\text{и}}$	-0,11
$3\tau_{\text{и}}$	-0,04

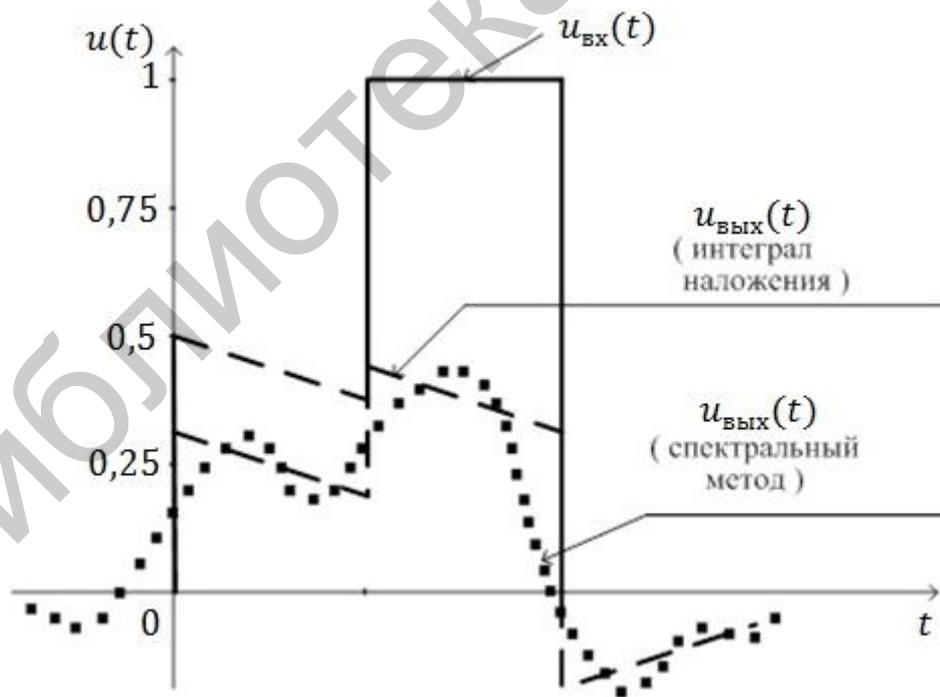


Рис. П.6.8

## Литература

1. Батура, М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – 3-е изд., перераб. – Минск, 2015.
2. Борисов, Ю. М. Электротехника / Ю. М. Борисов, Д. Н. Липатов, Ю. Н. Зорин. – 3-е изд., стереотип. – СПб., 2014.
3. Крутов, А. В. Теоретические основы электротехники / А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – Минск, 2014.
4. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Неустановившиеся процессы в электрорадиотехнических цепях / А. П. Курулёв, М. П. Батура, А. П. Кузнецов ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – Минск, 2003.
5. Покотило, С. А. Справочник по электротехнике и электронике / С. А. Покотило. – Ростов н/Д, 2012.
6. Радиотехнические цепи и сигналы / под ред. В. Н. Ушакова. – СПб., 2014.
7. Сборник задач по электротехнике и электронике / Ю. В. Бладыко [и др.] ; под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск, 2013.
8. Теория электрорадиоцепей. Анализ искажений сигнала сложной формы при прохождении по линейной электрической цепи / Ю. А. Сергеев [и др.]. – Минск, 2010.
9. Теория электрорадиосигналов. Спектральный (частотный) метод анализа электрических цепей / А. Н. Малашин [и др.]. – Минск, 2015.

## Содержание

Предисловие .....	3
Введение .....	5
Список сокращений и условных обозначений .....	7
<b>1. Сигналы и их спектры.....</b>	<b>10</b>
1.1. Классификация сигналов .....	10
1.2. Ряд и интеграл Фурье .....	15
1.2.1. Ряд Фурье .....	15
1.2.2. Интеграл Фурье .....	19
1.3. Спектры периодических видеосигналов .....	23
1.3.1. Среднее и действующее значения, мощность периодических сигналов .....	23
1.3.2. Спектры неограниченной периодической последовательности видеоимпульсов прямоугольной формы .....	26
1.3.3. Спектры неограниченной периодической последовательности видеоимпульсов, имеющих форму равнобедренного треугольника.....	34
1.3.4. Связь между формой сигнала и его спектром.....	36
1.4. Спектры непериодических видеосигналов .....	38
1.4.1. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала .....	38
1.4.2. Спектры убывающей экспоненциальной функции .....	39
1.4.3. Спектры дельта-функции.....	40
1.4.4. Спектры функции включения .....	43
1.4.5. Спектры видеоимпульса прямоугольной формы.....	46
1.4.6. Спектры видеоимпульса колоколообразной формы .....	49
1.4.7. Спектры видеоимпульсов треугольной и косинусоидальной формы .....	50
1.4.8. Спектры пачки видеоимпульсов прямоугольной формы с колоколообразной огибающей .....	52
1.4.9. Спектры пачки видеоимпульсов произвольной формы .....	53
1.4.10. Спектр пачки видеоимпульсов прямоугольной формы.....	55
1.5. Спектры модулированных сигналов.....	55
1.5.1. Амплитудно-модулированные колебания .....	56
1.5.2. Спектры сигналов с однотоновой амплитудной модуляцией .....	58
1.5.3. Мощность амплитудно-модулированных сигналов .....	62
1.5.4. Спектры сигналов с многотоновой амплитудной модуляцией .....	64
1.6. Спектры радиосигналов .....	67
1.6.1. Связь между спектрами видеосигналов и радиосигналов .....	67
1.6.2. Спектры одиночного радиоимпульса прямоугольной формы .....	68
1.6.3. Спектры неограниченной периодической последовательности когерентных радиоимпульсов прямоугольной формы.....	71
1.6.4. Спектр пачки прямоугольных радиоимпульсов .....	74
1.6.5. Спектры одиночного радиоимпульса и пачки прямоугольных радиоимпульсов колоколообразной формы .....	75
1.6.6. Спектры затухающего радиосигнала .....	78

1.7. Угловая модуляция.....	78
1.7.1. Фазовая модуляция .....	79
1.7.2. Частотная модуляция.....	84
1.7.3. Спектры сигналов с однотоновой угловой модуляцией.....	85
1.7.4. Спектр амплитуд радиоимпульсов с угловой модуляцией .....	92
1.7.5. Спектры при многотонной угловой модуляции.....	97
1.7.6. Сравнение колебаний при амплитудной и угловой модуляции .....	98
1.8. Импульсная модуляция.....	99
<b>2. Преобразование спектров сигналов в линейных электрических</b>	
<b>цепях</b> .....	104
2.1. Связь между спектрами сигналов на входе и выходе линейной	
электрической цепи .....	104
2.2. Прохождение сигналов с дискретными спектрами через линейные	
электрические цепи .....	107
2.2.1. Прохождение однотоново амплитудно-модулированного	
сигнала через колебательный контур.....	107
2.2.2. Прохождение периодической последовательности прямоугольных	
видеоимпульсов через дифференцирующие цепи.....	110
2.2.3. Прохождение сигналов с дискретными спектрами через	
интегрирующие цепи .....	117
2.3. Прохождение сигналов со сплошными спектрами через линейные	
электрические цепи .....	118
2.3.1. Частотные характеристики неискажающей линейной	
электрической цепи.....	118
2.3.2. Влияние частотных характеристик линейной электрической	
цепи с ограниченным диапазоном частот на форму выходного	
сигнала.....	120
2.3.3. Прохождение дельта-функции через линейную электрическую	
цепь с ограниченной полосой пропускания .....	121
2.3.4. Прохождение единичной функции через линейную	
электрическую цепь с ограниченной полосой пропускания .....	123
2.3.5. Прохождение видеоимпульса прямоугольной формы через	
линейную электрическую цепь с ограниченной полосой	
пропускания .....	125
2.4. Влияние неравномерности частотных характеристик линейной	
электрической цепи на форму сигналов .....	127
2.4.1. Влияние неравномерности амплитудно-частотной	
характеристики линейной электрической цепи на форму сигналов.....	127
2.4.2. Влияние неравномерности фазочастотной характеристики	
линейной электрической цепи на форму сигналов .....	129
2.5. Связь между частотными и временными характеристиками	
линейной электрической цепи .....	132
2.5.1. Связь между передаточной функцией линейной электрической	
цепи и ее импульсной характеристикой .....	132

2.5.2. Связь между передаточной функцией линейной электрической цепи и ее переходной характеристикой .....	133
2.6. Анализ искажения сигнала сложной формы при прохождении через линейную электрическую цепь .....	135
<b>3. Преобразование спектров сигналов в нелинейных электрических цепях .....</b>	<b>143</b>
3.1. Особенности нелинейных электрических цепей .....	143
3.2. Преобразование спектра сигнала в умножителе частоты .....	144
3.3. Преобразование спектра сигнала при гетеродинировании .....	148
3.4. Преобразование спектра сигнала при амплитудной модуляции .....	151
3.5. Преобразование спектра сигнала при амплитудном детектировании .....	153
3.6. Преобразование спектра сигнала при выпрямлении .....	156
Приложение 1. Основные свойства преобразований Фурье .....	158
Приложение 2. Спектры пачек видеоимпульсов произвольной формы .....	159
Приложение 3. Пример расчета АЧС .....	162
Приложение 4. Табличные значения функций Бесселя при $m = 5$ и амплитуды гармоник (для примера 1.8) .....	164
Приложение 5. Табличные значения функций Бесселя при $m = 10$ .....	165
Приложение 6. Таблицы и графики к подразд. 2.6. ....	166
Литература .....	173

*Научное издание*

**Курулёв Александр Петрович**

***ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ  
В ЭЛЕКТРОРАДИОЦЕПЯХ***

Корректоры *Е. И. Герман, Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоя*

Подписано в печать 31.07.2017. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 10,46. Уч.-изд. л. 12,3. Тираж 100 экз. Заказ 12.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,  
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.  
220013, Минск, П. Бровки, 6