Реоптимизация решения задач коммивояжера методом эластичных сетей

Ревотюк М.П., Кот О.В.
Кафедра ИТАС, факультет информационных технологий и управления
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: rmp@bsuir.by

Аннотация **– Задача коммивояжера рассматривается для случая изменяющегося набора посещаемых городов, когда удаление и добавление города отражает некоторый процесс обслуживания появляющихся заявок. Предложен вариант алгоритма метода эластичных сетей для ускоренного построения нового решения путем учета результатов имеющегося решения до изменения исходных донных.**

Ключевые слова: задача коммивояжера; реоптимизация; метод эластичных сетей; вычислительная сложность

I. Введение

В классической постановке [1] формальная модель задачи коммивояжера (ЗК) имеет вид:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=1;\\ x_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n};\\ u_i-v_j+nx_{ij}\le n-1,\\ i=\overline{2,n},\ \ j=\overline{2,n},\ \ i\ne j\end{array}\right.\right\} \qquad (1)$$

Принадлежность модели ЗК моделям линейного программирования, несмотря на NP-полноту ЗК, порождает мысль о возможности реоптимизации решения после каких-либо изменений матрицы $\left\| c_{ij},\ i,j=\overline{1,n}\right\|$ в (1). Проблема реоптимизации также является NP-полной [2]. Возникает потребность в создании эвристических рекуррентных алгоритмов построения нового решения с использованием информации о существующем решении. В настоящей работе рассматривается применение метода эластичных сетей для реоптимизации решения евклидовой ЗК и проводится экспериментальная оценка его эффективности.

II. Метод эластичных сетей

В методе эластичных сетей предлагается рассматривать каждый из маршрутов коммивояжера как отображение окружности на плоскость так, что в каждый город на плоскости отображается как некоторая точка этой окружности. При этом требуется, чтобы соседние точки на окружности отображались в точки, по возможности ближайшие и на плоскости. Алгоритм стартует с помещения на плоскость небольшой окружности. Замкнутая линия первоначального кольца, неравномерно расширяясь, проходит практически около всех городов и, в конечном итоге, определяет искомый маршрут.

Каждая точка расширяющегося кольца движется под действием двух сил. Первая перемещает ее в сторону ближайшего города, а вторая смещает в сторону ее соседей на кольце так, чтобы уменьшить его длину. По мере расширения такой эластичной сети каждый город оказывается ассоциированным с определенным участком кольца.

Вначале все города оказывают приблизительно одинаковое влияние на каждую точку маршрута. В последующем большие расстояния становятся менее влиятельными, а каждый город становится более специфичным для ближайших к нему точек кольца. Постепенное увеличение специфичности контролируется значением некоторого эффективного радиуса R. Если обозначить через $\mathbf{X}_i$ вектор, определяющий положение города i на плоскости, а $\mathbf{Y}_j$ – координату точки j на кольце, то закон изменения последней имеет вид

$$\Delta\mathbf{Y}_j=\alpha\sum_i w_{ij}\left(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}_j\right)+\beta R\cdot\left(\mathbf{Y}_{j-1}-2\mathbf{Y}_j+\mathbf{Y}_{j+1}\right), \qquad (2)$$

где параметры α и β определяют относительное воздействие на точку описанных выше двух сил. Коэффициенты w_{ij}, определяющие воздействие города i на точку j кольца, являются функцией расстояния $\left|\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}_j\right|$ и параметра R. Эти коэффициенты должны быть нормированы так, что полное воздействие каждого из городов оказывается одинаковым:

$$w_{ij}=\Phi\left(\left|\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}_j\right|,R\right)\Big/\sum_k\Phi\left(\left|\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}_k\right|,R\right).$$

Здесь $\Phi(d,R)$ – положительная, ограниченная и убывающая функция, приближающаяся к нулю, когда $d>R$.

Очевидно, что итерационный характер метода эластичных сетей порождает вопрос правила остановки. Известно, что для ЗК с 30 городами, метод эластичной сети генерирует наикратчайший маршрут примерно за 1000 итераций. Для 100 городов найденный этим методом маршрут лишь на 1% превосходил оптимальный [2].

III. Реоптимизация решения задачи

Известно, что у любого оптимального решения евклидовой ЗК есть общее свойство: вершины, расположенные на выпуклой оболочке, посещаются в том порядке, в котором они расположены на границе данной выпуклой оболочки [2].

В ходе работы алгоритма, реализующего метод эластичных сетей, выпуклая оболочка оказывается построенной. Очевидно, что при изменении расположения или добавлении некоторой вершины нет необходимости заново пересчитывать коэффициенты модели, изменяющиеся в ходе каждой итерации.

Новые вершины, оказавшиеся рядом с найденной оболочкой, могут быть часто включены в новый маршрут за значительно меньшее время по сравнению с независимым поиском нового решения. В [2-4] изучен вопрос устойчивости решения при изменениях, вносимых в матрицу расстояний, а в [5, 7] получены необходимые и достаточные условия устойчивости оптимального решения ЗК при изменениях в исходном множестве вершин.

Используя упомянутые условия устойчивости, можно исключить итерации поиска решения. Однако реализация такой идеи нуждается в конструировании вычислительной схемы, связывающей известные эвристики.

Обозначим расстояние между городами с произвольными номерами i и j как $d(i,j) = \left|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\right|$.

Пусть $\gamma_1,\ldots\gamma_n$ – оптимальный маршрут посещения городов в открытой ЗК, когда фиксированы начальный и конечный города маршрута – γ_1 и γ_n. Для закрытой ЗК вида (1) такими городами могут быть любые смежные города кратчайшего гамильтонова цикла.

В случае добавления нового города с номером $z = n+1$ маршрут $\gamma_1,\ldots\gamma_k, z, \gamma_{k+1},\ldots\gamma_n$ остается оптимальным, если выполняется

$$d(\gamma_k, z) + d(z, \gamma_{k+1}) - d(\gamma_k, \gamma_{k+1}) = \min_{i,j}\left\{d(i,z) + d(z,j) - d(i,j),\ i,j \in \overline{1,n}\right\}. \quad (3)$$

В случае удаления города γ_k из оптимального маршрута $\gamma_1,\ldots\gamma_{k-1},\gamma_k,\gamma_{k+1},\ldots\gamma_n$, когда $1 < k < n$, маршрут $\gamma_1,\ldots\gamma_{k-1},\gamma_{k+1},\ldots\gamma_n$ останется оптимальным, если справедливо условие

$$d(\gamma_{k-1},\gamma_{k+1}) - d(\gamma_{k-1},\gamma_k) - d(\gamma_k,\gamma_{k+1}) \le \min_j\left\{d(\gamma_1,\gamma_j) - d(\gamma_1,\gamma_k) - d(\gamma_k,\gamma_j),\ j \in \overline{2,n} \setminus k\right\} \quad (4)$$

или условие

$$d(\gamma_{k-1},\gamma_{k+1}) - d(\gamma_{k-1},\gamma_k) - d(\gamma_k,\gamma_{k+1}) \le \min_i\left\{d(\gamma_i,\gamma_n) - d(\gamma_i,\gamma_k) - d(\gamma_k,\gamma_n),\ i \in \overline{1,n-1} \setminus k\right\}. \quad (5)$$

Удаление начальных или конечных городов оптимальность остающегося маршрута не меняет.

Очевидно, что изменение положения некоторого города соответствует ситуации его удаления и добавления в новую точку на плоскости.

Вычислительная сложность процедур проверки условий (3)-(5) – $o(n^3)$. Практически проверка таких условий может проводиться путем построения областей устойчивости решения. Если условия (3)-(5) не выполняются, то необходимо провести поиск оптимального или близкого к нему решения.

Для ускоренной оценки истинности (3)-(5) предлагается учесть траекторию движения точек эластичной сети при выполнении итераций (2). Кроме этого, известен ряд приемов приближенного решения задачи реоптимизации ЗК за полиномиальное время [3-5]. При добавлении одного нового города хорошие результаты дает эвристика "самой дешевой вставки" [6]. Доказано, что полученный результат отличается максимум в полтора раза от оптимального, а такую небольшую разницу многие оценивают как приемлемую. Другие алгоритмы имеют верхнюю границу в 4/3 оптимума, но строго это пока не доказано [3].

При удалении одной вершины предлагается просто склеивать образовавшийся разрыв. Доказано, что полученный результат не более, чем в полтора раза отличается от оптимального [3,4].

Эксперимент по оценке времени решения ЗК и реоптимизации ее результатов после добавления нового города подтвердил полезность реоптимизации (рис. 1).

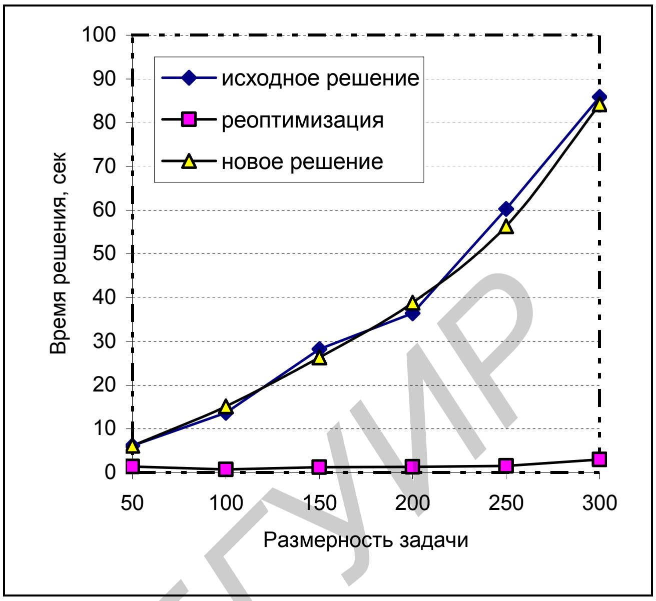

Рис. 1. Результаты оценки эффективности реоптимизации

IV. Заключение

При решении последовательно порождаемых задач коммивояжера с изменением состава посещаемых городов реоптимизация может рассматриваться как эффективный прием преодоления высокой вычислительной сложности нового решения изменившейся задачи. Схема выделения областей устойчивости для ускорения формирования решения применима для симметричных и асимметричных ЗК, независимо от метода их решения.

[1] Gutin G., Punnen A. P. The Travelling Salesman Problem and Its Variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2007. – 830 p.

[2] G. Laporte, “The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms,” Eur. J. Oper. Res., vol. 59, pp. 231–247, 1992.

[3] Poort E.S. Aspects of sensitivity analysis for the travelling salesman problem: PhD dissertation, University of Groningen. – Groningen, 1997. – 191 p.

[4] Libura M. Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems // Discrete Applied Mathematics. – 1991. – Vol. 30, Iss. 2-3, pp. 197-211.

[5] Bokenhauer H.-J., Hromkovic J., Klasing R., Seibert S., Unger W. Towards the Notion of Stability of Approximation for hard Optimization Tasks and the Traveling Salesman Problem // Computer Science. – 1999. – Vol. 285, pp. 3-24.

[6] Буслаева Л.Т. Об устойчивости алгоритма «иди в ближайший»// Сб. научн. трудов «Маршрутно-распределительные задачи». – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 1995. – С. 21-32.

[7] E. E. Иванко. Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2010, № 1. – С. 48–57.