Список использованных источников
1.Митюхин, А. И. Цифровая обработка речи и анализ изображений / А. И. Митюхин - Минск, БГУИР, 2016. –.72 с.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЭНТРОПИИ

Белорусский государственный университет г. Минск, Республика Беларусь

Титова А.В.

Майсеня Л.И. – д.пед.н., к.ф.-м.н., доцент,
Палуха В.Ю. – аспирант

Осуществлен анализ основных видов оценок энтропии Реньи и приведены результаты разработки эффективного вычислительного алгоритма.

Целью работы является разработка эффективного алгоритма оценки энтропии Реньи порядка $\alpha \geq 0$, которая является обобщением энтропии Шеннона и определена как

$$H_\alpha\ p\ = \frac{1}{1-\alpha} ln \quad _{x \in X} p_x^\alpha, \tag{1}$$

где p_x — вероятности пребывания системы в состояниях $x_i,\ i = 1, n$.

Ранее было показано [1], что алгоритм оценки энтропии Шеннона $H\ p$ для дискретных временных рядов имеет сложность $O(\frac{k}{lnk})$, где k – мощность алфавита. Во многих случаях энтропию Шеннона $H\ p$ можно заменить более общей энтропией Реньи $H_\alpha\ p$ порядка $\alpha \geq 0$. Тогда, согласно [1], сложность алгоритма оценки для целых порядков $\alpha > 1$ будет $O(k^{1-\frac{1}{\alpha}})$.

В работе [1] рассмотрены три основные оценки для $P_\alpha(p)$ и приведен сравнительный анализ их эффективности:

1) эмпирическая оценка, обычно используемая для энтропии Шеннона, строится следующим образом

$$P_\alpha = \quad _{x \in X}(\frac{N_x}{n})^\alpha, \tag{2}$$

однако для $\alpha \neq 1$ данная оценка не является несмещенной, что не позволяет успешно применить ее для энтропии Реньи;

2) несмещенная оценка для энтропии Реньи строится по формуле

$$P_\alpha = \quad _{x \in X}\frac{N_x^{\underline{\alpha}}}{n^\alpha}, \tag{3}$$

где $N_x^{\underline{\alpha}}$ — факторильное возведение в степень, т.е.

$$N_x^{\underline{\alpha}} = N\ N-1\ \ldots (N-\alpha+1),$$

данная оценка позволяет получать значения энтропии высоких порядков, близкие к теоретическим;

3) для получения логарифмического улучшения находится лучшее полиномиальное приближение степени *d* для y^d, где $y \in\ 0;1$, вида

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_d y^d;$$

далее используется условное разделение оценок в предположении, что N'_x и N_x являются множествами *x*. Приблизительная полиномиальная оценка использует полином для малых значений N'_x и эмпирическую оценку для больших значений, она имеет следующий вид:

$$P_\alpha^{d,\tau} = \quad _{x:\,N'_x \leq \tau} \quad {}^{d}_{m=0} \frac{a_m\ 2\tau\ ^{\alpha-m} N_x^{\underline{m}}}{n^\alpha} + \quad _{x:\,N'_x > \tau} \quad \frac{N_x}{n}\ ^\alpha .$$

Сравнительная эффективность трех перечисленных оценок приведена в следующей таблице:

Порядок α	Эмпирическая оценка	Несмещенная оценка	Приблизительная полиномиальная оценка
$\alpha < 1$	$O\ (k^{\frac{1}{\alpha}})$		$O\ (\frac{k^{\frac{1}{\alpha}}}{lnk})$
$\alpha > 1, \alpha \notin N$	$O\ (k\ )$		$O\ (\frac{k}{lnk})$
$\alpha > 1, \alpha \in N$	$O\ (k\ )$	$O(k^{1-\frac{1}{\alpha}})$	

Библиотека БГУИР

Пусть наблюдается последовательность $x_1, \ldots, x_n \in V = \{0,1\}$. Определим энтропию Реньи для фрагментов (x_{t+1}, …, x_{t+m}) длины m с распределением вероятностей $p_{i_1,\ldots,i_m} = P\{x_{t+1} = i_1, \ldots, x_{t+m} = i_m\}$ не зависящим от $t \in N \cup \{0\}$.

Заменим p_x^α в (1) на $p_{i_1,\ldots,i_m}^\alpha$:

$$H_\alpha \; m = \frac{1}{1-\alpha} ln \sum_{i_1,\ldots,i_m} p_{i_1,\ldots,i_m}^\alpha.$$

Обозначим: $i = \sum_{j=1}^{m} 2^{j-1} i_j$ – представление числа i $(i = 0, \; 2^m - 1)$ в двоичной системе счисления,

$$p_i(m) = P\{\sum_{j=1}^{m} 2^{j-1} x_j = i\} = p_{i_1,\ldots,i_m},$$

Построим частотные статистические оценки распределения вероятностей:

$$\hat{p}_i(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\bar{X}^{(k)},i}, \quad \bar{X}^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} 2^{j-1} x_{k-1+j}, \quad \delta_{\bar{X}^{(k)},i} = \begin{cases} 1, \; \bar{X}^{(k)} = i; \\ 0, \; \bar{X}^{(k)} \neq i. \end{cases} \qquad (4)$$

Далее, используя подстановочный принцип, рассмотрим различные способы оценки энтропии, используя полученную оценку (4).

Для энтропии Реньи справедливо соотношение:

$$H_\alpha \; p = \frac{1}{1-\alpha} ln P_\alpha \; p \; ,$$

где

$$P_\alpha \; p = \sum_{x \in X} p_x^\alpha$$

– сумма степеней распределений вероятностей порядка α. Таким образом, оценивание энтропии Реньи эквивалентно оцениванию суммы $P_\alpha \; p$. Нашей задачей являлось построение оценки сумм распределений вероятности.

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

1) В ходе проведенных нами экспериментов с последовательностями небольших длин порядка 100 Мб (последовательности взяты с сайта http://qrng.physik.hu-berlin.de/download) было выяснено, что для порядков $s \leq 35$ оценка (2) является более эффективной, чем оценка (3), то есть при относительно небольших порядках энтропии факториальное возведение в степень, используемое в несмещенной оценке, не дает значительного улучшения результатов вычислений.

2) При подсчете энтропии более высоких порядков результаты, полученные с использованием оценки (3), отличаются от теоретической оценки $H_2 \; s \; = s \; ln2$. Для последовательностей небольшой длины значение энтропии существенно превышает теоретическую оценку.

Список использованных источников:

1.Jayadev Acharya, Alon Orlitksy, Ananda Theertha Suresh. Estimating Renyi Entropy of Discrete Distributions. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://people.csail.mit.edu/jayadev/papers/main-renyi.pdf.Дата доступа: 27.04.2017.

МИКРООРГАНИЗАЦИИ И ИХ МЕСТО В ЭКОНОМИКЕ

Институт информационных технологий БГУИР, г.Минск, Республика Беларусь

Самец М.М.

Анохин Е. В. − м. э. н., ст. преподаватель

Малый бизнес – важнейший элемент рыночной экономики, без которого не может гармонично развиваться государство. Малый бизнес во многом определяет темпы экономического роста, структуру и качество валового национального продукта. В связи с этим анализ факторов развития сектора малого предпринимательства для любой страны является задачей актуальной и значимой как в научном, так и в практическом отношении.

В таблице 1 представлена роль малого бизнеса в развитии экономического благосостояния Беларуси. Как видно, вклад частного сектора начинает падать. Если в 2013 г. доля малого бизнеса в ВВП составляла 14,9 %, то в 2015 г. она упала до 14,2 %. Около трети экспорта формируется за счет малых предприятий. Доля занятости упала в среднем на 0,8 %, что является своего рода индикатором того, что уровень

Библиотека БГУИР