Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

УДК 514.765.1

Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства

Н.П. Можей

Цель работы – классификация трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят главным образом локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.
Ключевые слова: алгебра Ли, редуктивное пространство, группа преобразований, симметрическое пространство.

The purpose of the work is the classification of three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces. We concerned the case, when Lie group of transformations is unsolvable. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.
Keywords: Lie algebra, reductive space, transformation group, symmetric space.

Введение. П. К. Рашевский ввел в рассмотрение класс пространств аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения [1]. Этот класс однородных пространств, получивших название «редуктивных», изучается в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Все геодезические на редуктивных пространствах являются однородными [2]. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Название «симметрическое» связано тем, что геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [3]. Классификация римановых симметрических пространств получена Э. Картаном, им была решена и задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Найдена также классификация симметрических однородных пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [4], [5]). Трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальные связности изучались в работе [6]. В данной работе найдены все редуктивные несимметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [7, с. 89–91]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т.е. достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g})=(Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s\in G, x\in\bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $x.(y+\mathfrak{g})=[x,y]+\mathfrak{g}$ для всех $x\in\mathfrak{g}, y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x\in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2, т. 2, с. 177–179].

Пусть $M=\bar{G}/G$ – однородное пространство, на котором связная группа $\bar{G}$ действует транзитивно и эффективно. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, и наоборот, если G связна. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, т. е. $\Lambda([x,y])=[\Lambda(x),\Lambda(y)]$ для всех $x\in\mathfrak{g}, y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Известно (см., например, [8]), что инвариантные аффинные связности на $(M,\bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное.

Говорят, что многообразие M с аффинной связностью является аффинным *симметрическим*, если для каждого $x\in M$ симметрия s_x может быть продолжена до глобального аффинного преобразования для M. На каждом связном аффинном симметрическом пространстве группа аффинных преобразований транзитивна, т. е. аффинное симметрическое пространство M может быть представлено как однородное пространство $\bar{G}/G$. Более того, поскольку $M=\bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), достаточно рассматривать только изотропно-точные пространства. Таким образом, симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G для $\bar{G}$ и инволютивного автоморфизма σ для $\bar{G}$ такого, что $\sigma(g)=s_ogs_o^{-1}$ для $g\in\bar{G}$, где s_o – симметрия для M, а o – неподвижная точка для s_o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. Если же первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Классификация редуктивных несимметрических однородных пространств. Определим пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\dots,e_n,u_1,u_2,u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n=\dim\mathfrak{g})$. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\dots,e_n$, а $\{u_1,u_2,u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$, если обратное не установлено. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [9, с. 31–42], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Через λ, α, β и т. д. обозначены параметры, появляющиеся в процессе классификации. Если на них накладываются некоторые дополнительные условия, то они записаны сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Теорема. *Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$*, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой* ($\mathfrak{g}\neq\{0\}$)*, имеют вид:*

– $\mathfrak{g}$ *разрешима:*

dim $\mathfrak{g}$=1.

1.1.7.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.3.3

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.8.2.

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

1.3.4

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

dim $\mathfrak{g}$=2.

2.21.4.

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

– $\mathfrak{g}$ *не является разрешимой:*

dim $\mathfrak{g}$=3.

3.3.2.

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

3.3.3.

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

dim $\mathfrak{g}$=4.

4.2.2.

	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0
e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0
e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

dim $\mathfrak{g}$=5.

5.2.2.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1	, $\lvert\alpha\rvert \le 1$,
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2	$\alpha \ne -1$
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1	
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2	
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	$-\alpha u_1$	$-\alpha u_2$	0	

5.2.3.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$	, $\alpha \ne 0$
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$	
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4	
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5	
u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0	

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1+e_4, u_2+e_5, u_3\}$, а в случае 5.2.3 – $\{u_1+\alpha e_4, u_2+\alpha e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Доказательство. Сначала найдены все трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ выписаны в [9]. Из них выбраны редуктивные несимметрические пары с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$, т. е. те, для которых $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, но не выполняется условие $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ задает трехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство, а $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$1.1.\begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & \\ \hline\end{array};\ 1.3.\begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ -x & & \\ & & \\ \hline\end{array};\ 1.8.\begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & x \\ & & \\ \hline\end{array};\ 2.21.\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & & y \\ & & -x \\ \hline\end{array};\ 3.3.\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ z & -x & \\ & & \\ \hline\end{array};$$

$$4.2.\begin{array}{|ccc|}\hline (1/2)x+y & z & \\ u & (1/2)x-y & \\ & & x \\ \hline\end{array};\ 5.2.\begin{array}{|ccc|}\hline x & u & v \\ z & -x & u \\ & & \\ \hline\end{array}.$$

Здесь переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такая, что подалгебра $\mathfrak{g}$ типа 3.3 (далее соответствующую пару также будем называть парой типа 3.3), эквивалентна одной и только одной из пар 3.3.1 (тривиальная пара), 3.3.2, 3.3.3. Действительно, пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Заметим, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}), \text{ где}$$
$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2.$$

Поэтому $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3, [u_1, u_3] = \beta_1 u_1, [u_2, u_3] = \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, видим, что $a_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_2$, а $\alpha_3 \gamma_2 = 0$. Рассмотрим следующие случаи:

1°. $\alpha_3 = \gamma_2 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 3.3.1.

2°. $\alpha_3 \neq 0, \gamma_2 = 0$. Тогда отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1,2,3, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_3} u_3,$$

показывает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.2.

3°. $\alpha_3 = 0, \gamma_2 \neq 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где

$$\pi(e_i) = e_i, i = 1,2,3 \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \gamma_2 u_3,$$

показывает, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.3.3 эквивалентны.

Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, мы видим, что пары 3.3.1 и 3.3.2 не эквивалентны. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_3 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.1 не эквивалентны. Поскольку $Z\bar{\mathfrak{g}}_2 = \mathbb{R}u_3$ и $Z\bar{\mathfrak{g}}_3 = 0$, заключаем, что пары 3.3.3 и 3.3.2 не эквивалентны. Заметим, что у пары 3.3.1 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ имеет вид $\{\{-2u_2, -2u_1, u_3\}, \{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$, у пары 3.3.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{u_3, -u_2, u_1\}, \{2e_2 + 2u_1 + u_3, -2e_3, e_1 - u_2\}\}$, у пары 3.3.3 – $\{\{-2u_2, -2u_1, u_3\}, \{-4e_1 + 2u_2, -4e_2 - 2u_1, -4e_3\}\}$. Пара 3.3.1 является симметрической и не входит в рассматриваемый в работе класс пар. Пары 3.3.2 и 3.3.3 не являются симметрическими, но являются редуктивными.

Опишем аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix},$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (для всех $i, j = 1,2,3$). Рассмотрим локально однородное пространство 3.3.2. Поскольку ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, и отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, имеем

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),$$

следовательно, $p_{1,1}=p_{1,2}=p_{2,1}=p_{2,2}=p_{2,3}=p_{3,1}=p_{3,3}=0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2),$$

$$q_{1,1}=q_{1,2}=q_{1,3}=q_{2,1}=q_{2,2}=0,\ q_{2,3}=p_{1,3},\ q_{3,1}=p_{3,2},\ q_{3,2}=q_{3,3}=0.$$

Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)]=0$, $r_{1,2}=r_{1,3}=r_{2,1}=r_{2,3}=r_{3,1}=r_{3,2}=0$. Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)]=0$, то $r_{2,2}=r_{1,1}$. Нашли аффинную связность на паре 3.3.2:

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Для пары 3.3.3 рассуждения аналогичны.

Рассмотрим теперь, например, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ типа 2.21. Пусть $E = \{e_1, e_2\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \times U^{\alpha}(\mathfrak{h})$ для всех $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, U^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1, \mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_2, U^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, U^{(-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

проверив тождество Якоби, получим, что $[u_1, u_2] = \alpha_1 u_1, [u_1, u_3] = \alpha_1 u_2, [u_2, u_3] = \alpha_1 u_3$.

При $\alpha_1 \neq 0$ отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_4 \to \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{\alpha_1} u_1$, $\pi(u_2) = \frac{1}{\alpha_1} u_2$, $\pi(u_3) = \frac{1}{\alpha_1} u_3$, устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.21.4 (это пространство является редуктивным с каноническим разложением).

При $\alpha_1 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна, т. е. у полученной пары алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. Разумеется, пары не сопряжены друг другу, т. к. в случае 2.21.4 алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой (ее разложение Леви – $\{\{e_1 + u_2, -e_2 + u_1\}, \{u_1, -u_3, u_2\}\}$).

Пусть далее, $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – локально однородное пространство 2.21.4. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, получим $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = p_{1,1}$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = p_{2,1}$, $p_{3,3} = p_{1,1}$, $p_{3,2} = 0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),\ p_{1,1} = p_{1,3} = 0.$$

Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, $q_{2,2} = q_{1,1} + p_{1,2}$, $q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}$, $q_{3,3} = q_{2,2} + p_{1,2}$, $q_{2,1} = q_{3,1} = q_{3,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{1,2} = q_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_2, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = -p_{1,2} = r_{2,1} = r_{3,2}$, $r_{2,2} = r_{1,1}$, $r_{2,3} = r_{1,2}$, $r_{3,1} = 0$, $r_{3,3} = r_{2,2}$. Так как $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda([e_1, u_3]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = -\Lambda(u_3)$, имеем $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай 5.2. Разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{-e_5, e_4\}, \{2e_2, -2e_3 - 2e_5, e_1 + e_4\}\}$, $\mathfrak{h}$ порождена e_1. Так как $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где $\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, имеем $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = b_4 e_4 + \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = c_5 e_5 + \gamma_2 u_2$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha e_4 + \beta u_1$, $[u_2, u_3] = \alpha e_5 + \beta u_2$.

1° $\alpha = \beta = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 5.2.1, которая является симметрической.

2° $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. Пара эквивалентна 5.2.2 посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = e_4 + u_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = e_5 + u_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}) / 2 \neq 0$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической. Разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{-2e_4, -2u_1, u_3, -2u_2, -2e_5\}, \{-4e_1 + 2e_5 - 4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

3° $\beta^2 + 4\alpha < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 5.2.3 показывает $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \mathfrak{g}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = u_1 + (\beta\lambda / 2)e_4$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = u_2 + (\beta\lambda / 2)e_5$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda^{-1} u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = 2 / \sqrt{-\beta^2 - 4\alpha}$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической, разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{u_3, -2u_2, -2u_1, -2e_5, -2e_4\}, \{-4e_1 + 2e_5, -4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

Пусть $\mathfrak{r}_i$ – радикал $\bar{\mathfrak{g}}_i$ для $i = \overline{1,3}$. Рассмотрим $f_i : \bar{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\bar{\mathfrak{r}}_i} x$ в базисе $\{e_4, e_5, u_1, u_2\}$ пространства $\bar{\mathfrak{r}}_i$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары не эквивалентны.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. В частности, любая пара типа 4.2 эквивалентна одной из пар 4.2.1 (тривиальная пара), 4.2.2. Действительно, пусть $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2 (заметим, что $\mathfrak{a} = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4$ – полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,2)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-2)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1/2,1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1/2,-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3$. Поэтому $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})$, $[u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1/2+1,1)}(\mathfrak{h})$, $[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1/2+1,-1)}(\mathfrak{h})$, имеем $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = 0$, $[u_2, u_3] = 0$. В силу тождества

Якоби $[u_1,u_2]=\alpha_3 u_3$. При $\alpha_3=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна 4.2.1, при $\alpha_3\neq 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 4.2.2 показывается посредством отображения $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,4}$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(u_3)=\alpha_3 u_3$. Поскольку $\dim D(\bar{\tau}(D\bar{\mathfrak{g}}_1))\neq\dim D(\bar{\tau}(D\bar{\mathfrak{g}}_2))$, пары 4.2.1 и 4.2.2 не эквивалентны. Пара 4.2.1 является симметрической и не входит в рассматриваемый в работе класс пар, пара 4.2.2 не является симметрической, но является редуктивной. Заметим, что у пары 4.2.2 разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{e_1,u_2,-(1/2)u_1,(1/4)u_3\},\{-4e_2+u_1,-4e_4+u_2+(1/8)u_3,-4e_3\}\}$, а разложение Леви $\mathfrak{g}$ – $\{\{e_1\},\{-4e_2,-4e_3,-4e_4\}\}$.

Прямыми вычислениями получаем результат и в остальных случаях.

Для остальных найденных пар также выпишем разложение Леви:

Пара	Разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$	Пара	Разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$
1.1.7	$\{\{u_3\},\{-e_1-u_3,-u_1,-u_2\}\}$	1.3.4	$\{\{u_3\},\{-e_1+u_3,-u_1,-u_2\}\}$
1.3.3	$\{\{u_3\},\{e_1+u_3,u_1,u_2\}\}$	1.8.2	$\{\{-e_1+u_1\},\{u_1,u_2,u_3\}\}$

Заключение. Таким образом, найдены все трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также могут иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на редуктивных и симметрических пространствах.

Литература

1. Рашевский, П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П.К. Рашевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т. – 414 с.

3. Широков, П.А. Симметрические пространства первого класса / П.А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.

4. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан // Сборник работ. – М., 1949. – 384 с.

5. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон ; Пер. с англ. – М., 1964. – 608 с.

6. Можей, Н.П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н.П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 6. – С. 28–36.

7. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.

8. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.

9. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 30.01.2017