

УДК 621.391.26

## ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБОК ПРИ ПРИЕМЕ СИГНАЛОВ ПО УПЛОТНЕННЫМ КАНАЛАМ СВЯЗИ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ ЧАСТОТНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ

В.П. ТУЗЛУКОВ

*Белорусская государственная академия авиации, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 10 мая 2017*

**Аннотация.** Проводится математический анализ вероятности ошибок приема сигналов, передаваемых по уплотненным каналам связи с ортогональным частотным разделением при наличии замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом распределения Накагами- $m$ . В отличие от предшествующих публикаций в настоящей работе рассматривается воздействие неравномерного распределения фазы замираний в канале связи на вероятность ошибок приема сигналов. Представлено унифицированное математическое выражение производящей функции моментов для замираний канала связи в частотной области, распределенных в соответствии с законом Накагами- $m$ , при неравномерных распределениях фазы замираний в канале связи. Таким образом, классические методы определения производящей функции моментов могут непосредственно использоваться для получения точных математических выражений вероятности ошибок приема сигналов для различных видов модуляции и разнесения сигналов.

**Ключевые слова:** производящая функция моментов, вероятность ошибок, замирания в канале связи, ортогональное частотное разделение каналов.

**Abstract.** A mathematical analysis of the probability of errors in the reception of signals transmitted over compressed communication channels with orthogonal frequency separation in the presence of fading in the communication channel distributed in accordance with the Nakagami- $m$  distribution law is made. Unlike previous publications, the present work considers the effect of non-uniform distribution of the phase of fading in the communication channel on the probability of errors in signal reception. A unified mathematical expression of the generating function of the moments for fading of the communication channel in the frequency domain, distributed according to the Nakagami- $m$  law, is presented for uneven fading phase distributions in the communication channel. Thus, the classical methods of determining the generating function of moments can be used directly to obtain exact mathematical expressions for the probability of signal reception errors for various types of modulation and signal diversity.

**Keywords:** moment generating function, error probability, fading channels, orthogonal frequency-division multiplexing.

**Doklady BGUIR. 2017, Vol. 107, No. 5, pp. 77-84**

**Probability of errors when receiving signals  
on sealed communication channels with orthogonal frequency separation**

**V.P. Tuzlukov**

### Введение

Точные статистические модели для коэффициентов усиления канала связи в частотной области играют важную роль при анализе вероятности ошибок при обработке мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением, принимаемых посредством частотно-избирательных каналов связи с замираниями. Предыдущие исследования вероятности ошибок при обработке мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением, принимаемых посредством частотно-избирательных

каналов связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- $m$ , основывались на следующих предположениях: 1) фазовые углы и амплитуды комплексных коэффициентов усиления канала связи являются независимыми случайными величинами; 2) фазовые углы являются равномерно распределенными случайными величинами. Несмотря на тот факт, что эти предположения широко используются, четкий и ясный базис для этих предположений отсутствует [1]. Распределение амплитуды замираний в канале связи в соответствии с законом Накагами- $m$  широко используется благодаря эмпирически подтвержденным совпадениям с высокой точностью с измеренными данными амплитуды замираний в канале связи [2–6]. Однако плотность распределения вероятностей фазы замираний в канале связи, коррелированная с законом Накагами- $m$ , не рассматривалась. В большинстве журнальных публикаций и монографий предполагалось равномерное распределение фазы без каких-либо подтверждений. С другой стороны, сравнительно недавно [7–14] было определено, что фаза комплексной случайной величины, которая распределена в соответствии с законом Накагами- $m$ , не может быть равномерно распределена для всех значений параметра  $m$  и точные модели распределения фазы замираний в канале связи зависят от параметра  $m$ . Отметим, что при  $m > 1$  замирания, распределенные в соответствии с законом Накагами- $m$ , приближаются к распределению Райса, для которого, как известно, фазы замираний не являются равномерно распределенными. Аналогично при  $m < 1$  распределение замираний стремится к закону Хойта, для которого фазы замираний также не являются равномерно распределенными [7]. Анализ вероятности ошибок при приеме мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением посредством канала связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- $m$  с неравномерным распределением фазовых углов, представляет собой как теоретический, так и практический интерес. Наиболее близкими по результатам к настоящей работе можно рассматривать исследования, проведенные в [15] и [16]. В [15] была предложена аппроксимация коэффициента усиления канала связи с замираниями в частотной области другой случайной величиной, распределенной по закону Накагами- $m$ , обладающей отличающимся параметром замирания. Строгий математический анализ вероятности ошибок в случае равномерно распределенной фазы замираний в канале связи был предложен в [16]. С использованием круговой симметрии случайных величин, распределенных в соответствии с законом Накагами- $m$ , и благодаря предположению о равномерности распределения фазы замираний анализ в [16] был упрощен. Результаты [16] не могут распространяться на модели с неравномерным распределением фазы замираний в канале связи. В настоящей работе предлагается точный математический анализ вероятности ошибок мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением, принимаемых по каналам связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- $m$ , при произвольном распределении фазы замираний.

### Модель замираний

Оригинальная модель замираний в канале связи, соответствующая закону Накагами- $m$ , не определяет какое-либо распределение фазы замираний. Благодаря равномерному распределению фазы при рэлеевских замираниях большинство исследователей произвольным образом установили для себя, что при замираниях в канале связи, распределенных в соответствии с законом Накагами, фаза замираний распределена равномерно, и сделали предположение без четкого и убедительного обоснования, что фазовый угол замираний независим от амплитуды. С другой стороны, убедительная модель Накагами для замираний, описываемых комплексными случайными величинами, основывается на наблюдении того, что для полуцелого или целого  $m$  можно представить случайную величину, соответствующую распределению Накагами- $m$ , как корень квадратный из суммы квадратов  $2m$  независимых гауссовских случайных величин. Таким образом, если  $R$  есть комплексная случайная величина с амплитудой  $|R|$ , подчиняющаяся распределению Накагами- $m$  со средним значением  $\sqrt{\Omega}$ , тогда

$$|R|^2 = \frac{\Omega}{2m} \sum_{i=1}^m |g_{c,i} + jg_{s,i}|^2, \quad (1)$$

где  $g_{c,i}$  и  $g_{s,i}$  – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. С этой точки зрения следует отметить, что (1) широко используется при моделировании коррелированных случайных величин, подчиняющихся закону распределения Накагами- $m$  [17–23]. Следовательно, убедительная и правдоподобная модель для комплексной случайной величины, распределенной в соответствии с законом распределения Накагами- $m$ , удовлетворяющая (1) при  $m=1, 2, \dots$ , может быть представлена в виде [7–14]

$$R = \delta_1 \sqrt{X \Omega / 2m} + j\delta_2 \sqrt{Y \Omega / 2m}, \quad (2)$$

где  $\delta_1, \delta_2, X, Y$  – взаимно независимые случайные величины;  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – равновероятные случайные величины, принимающие значения в пределах интервала  $[-1, 1]$ , в то время как  $X = \sum_{i=1}^m g_{c,i}^2$  и  $Y = \sum_{i=1}^m g_{s,i}^2$  – случайные величины, распределенные в соответствии с законом хи-квадрат с  $m$  степенями свободы, т. е.  $f_X(x) = f_Y(y) = [2^{0,5m} \Gamma(0,5m)]^{-1} x^{0,5m-1} \exp\{-0,5x\}$ ;  $\Gamma(\cdot)$  – Гамма функция. Сумма двух идентичных и независимых Гамма случайных величин с параметром  $0,5m$  является также случайной величиной, но с параметром  $m$ . Уравнение, подобное (2), также может быть использовано для генерации комплексных случайных величин, распределенных в соответствии с законом Накагами- $m$  при нецелочисленном  $m$ . В этом случае  $X$  и  $Y$  становятся независимыми Гамма случайными величинами с параметром  $0,5m$ . На основе модели, представленной в (2), в [7] и [8] было получено следующее строгое математическое выражение для плотности распределения вероятностей фазового угла  $\arg R$ :

$$f_{\arg R}(\varphi) = \Gamma(m) [2^m \Gamma^2(0,5m)]^{-1} |\sin 2\varphi|^2.$$

### Математический анализ

Вероятность ошибок при обработке мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением зависит от текущего значения отношения сигнал/помеха, которое может быть определено как  $q_n = SNR |H_n|^2$ , где  $SNR$  – среднее значение отношения сигнал/помеха;  $H_n$  – импульсная переходная характеристика канала  $n$  в частотной области;  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

$$H_n = \sum_{l=0}^{L-1} R_l \exp\{-j2\pi l n / N\}, \quad (3)$$

где  $L$  – число маршрутов при многолучевом распространении сигнала;  $N$  – общее число каналов. Здесь  $R_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$  – независимые комплексные случайные величины, где  $|R_l|$  – случайная величина, подчиняющаяся распределению Накагами- $m$ , т. е.  $f_{|R_l|}(r) = (2/\Gamma(m)) \times (m/\Omega_l)^m r^{2m-1} \times \exp\{-(m/\Omega_l)r^2\}$ ,  $m > 0,5$ , где  $\Omega_l = E[R_l^2]$  – мощность замираний по  $l$ -му маршруту канала связи;  $\sum_{l=0}^{L-1} \Omega_l = 1$ . Выражение (3) можно переписать в следующем виде:  $H_n = \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{x}_l + j\tilde{y}_l)$ , где

$$\tilde{x}_l = |R_l| \cos(\arg R_l - 2\pi l n / N) = x_l \cos(2\pi l n / N) + y_l \sin(2\pi l n / N);$$

$$\tilde{y}_l = |R_l| \sin(\arg R_l - 2\pi l n / N) = x_l \times \sin(2\pi l n / N) - y_l \cos(2\pi l n / N);$$

$$x_l = |R_l| \cos(\arg R_l) \text{ и } y_l = |R_l| \sin(\arg R_l).$$

Заметим, что сдвинутый угол  $(\arg R_l - 2\pi l n / N) \pmod{2\pi}$  не подчиняется такому же закону распределения, как  $\arg R_l$ . Это противоречит тому, что равномерно распределенные случайные величины  $\pmod{2\pi}$  сохраняют свое равномерное распределение при любых

произвольных сдвигах угла  $(\arg R_l - 2\pi l n/N) \times (\text{mod } 2\pi)$ , что хорошо известно [23]. Мощность или квадрат амплитуды замираний в  $n$ -м канале связи определяется как

$$|H_n|^2 = \left| \sum_{l=0}^{L-1} (\tilde{x}_l + j\tilde{y}_l) \right|^2 = \left( \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l \right)^2 + \left( \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{y}_l \right)^2. \quad (4)$$

Для того, чтобы получить строгое математическое выражение в общем виде для производящей функции моментов  $\mathbf{E}\{\exp\{-z |H_n|^2\}\}$ , используем хорошо известное равенство [24]

$(1/\sqrt{\pi}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) d\omega = 1$ , что эквивалентно

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(\omega + jR)^2\} d\omega = 1, \forall R. \quad (5)$$

Выражение (5) предполагает, что  $\exp\{-R^2\} = (1/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) \exp(-2j\omega R) d\omega$ . Пусть

$R = \sqrt{z} \times \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l$ . Тогда

$$\exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l\right)^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega^2) \exp\left(-2j\sqrt{z}\omega \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l\right) d\omega, \quad (6)$$

что обладает желаемым свойством, так как случайные величины  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{L-1}$  появляются только в линейной комбинации в степени экспоненты. Это значительно упрощает оценку требуемого среднего значения, используя характеристическую функцию. Поскольку в (4) рассматривается производящая функция моментов  $|H_n|^2$ , отметим, что в общем смысле  $\tilde{x}_l$  и  $\tilde{y}_l$  не являются независимыми. Из (6) получаем

$$\exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{x}_l\right)^2\right\} \exp\left\{-z \left(\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{y}_l\right)^2\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(u^2 + v^2)\} \exp\left\{-\sqrt{z} 2j \sum_{l=0}^{L-1} (u\tilde{x}_l + v\tilde{y}_l)\right\} dudv. \quad (7)$$

Определим математическое ожидание левой и правой части (7) и затем вынесем математическое ожидание за знак интегрирования, чтобы получить производящую функцию моментов квадрата амплитуды от суммы комплексных случайных величин в виде характеристической функции их суммы, т. е.

$$\mathbf{E}\{\exp\{-z |H_n|^2\}\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(u^2 + v^2)\} \prod_{l=0}^{L-1} \Phi_l(2\sqrt{z}u, 2\sqrt{z}v) dudv, \quad (8)$$

$$\Phi_l(u, v) = \mathbf{E}\{\exp\{-j(u\tilde{x}_l + v\tilde{y}_l)\}\} = \mathbf{E}\{\exp\{-jx_l[u \cos(2\pi l n/N) + v \sin(2\pi l n/N)]\} \times \exp\{-jy_l[u \sin(2\pi l n/N) - v \cos(2\pi l n/N)]\}\}. \quad (9)$$

В случае комплексной случайной величины, распределенной в соответствии с законом Накагами- $m$ , заданной в (2), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\exp\{-j\omega x_l\}\} &= \mathbf{E}\{\exp\{-j\omega y_l\}\} = \mathbf{E}\{\exp\{-j\omega \delta_l \times \sqrt{X_l \Omega_l / m}\}\} = \\ &= \mathbf{E}\{\cos\{\omega \sqrt{X_l \Omega_l / m}\}\} \int_0^{\infty} \cos\{\omega \sqrt{X_l \Omega_l / m}\} [2^{0.5m} \Gamma(0, 5m)]^{-1} x^{0.5m-1} \exp\{-0, 5x\} dx = \\ &= {}_1F_1(0, 5m; 0, 5; -\omega^2 \Omega_l / 4m). \end{aligned}$$

Мы воспользовались предположением, что вероятность  $P(\delta_l = -1) = P(\delta_l = 1) = 0, 5$  и, используя преобразование Куммера [21], получаем конечный результат, т. е. (9) сводится к выражению

$$\begin{aligned} \Phi_l(u, v) &= {}_1F_1\{0, 5m; 0, 5; (-\Omega_l / m)[u \cos(2\pi l n/N) + v \sin(2\pi l n/N)]^2\} \times \\ &\times {}_1F_1\{0, 5m; 0, 5; (-\Omega_l / m)[u \sin(2\pi l n/N) - v \cos(2\pi l n/N)]^2\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  ${}_1F_1(\cdot; \cdot)$  – вырожденная гипергеометрическая функция.

Выражение (8) совместно с (10) позволяет получить производящую функцию моментов квадрата амплитуды замираний в канале  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , что значительно упрощается

при  $n = 0, N/4, N/2, 3N/4, \dots$ , и (8) сводится к простому выражению

$$\mathbf{E}\{\exp\{-z |H_n|^2\}\} = \mathcal{M}^2(z, m), \quad (11)$$

$$\mathcal{M}(z, m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\omega^2) \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1(0, 5m; 0, 5; -z\omega^2 \Omega_l/m) d\omega. \quad (12)$$

Как показано в [16], можно получить строгое математическое выражение для (12) с учетом гипергеометрической функции нескольких переменных [24]:

$$\mathcal{M}(z, m) = F_A^{(L)}(0, 5; 0, 5m, \dots, 0, 5m; 0, 5, \dots, 0, 5; -z\Omega_0/m, \dots, -z\Omega_{L-1}/m). \quad (13)$$

Кроме того, используя [22], (12) может быть выражено через многочлен Эрмита

$$\mathcal{M}(z, m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^K \alpha_k \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1(0, 5m; 0, 5; -z\beta_k^2 \Omega_l/m) + \mathfrak{R}_K, \quad (14)$$

где  $\beta_k$  и  $\alpha_k$  – выборочные точки и весовые коэффициенты многочлена Эрмита, табулированные в [25];  $\mathfrak{R}_K$  – остаток, который очень мал по величине при больших значениях  $K$ . Следовательно, (14) упрощает численное оценивание  $\mathcal{M}(z)$ . Необходимо отметить, что (13) приведено только для того, чтобы выразить (12) в компактной форме в терминах гипергеометрической функции нескольких переменных. Этот прием широко используется, например, в [16]. Так как рассматривается численное оценивание (12), будем использовать (14). В предельном случае при  $m \rightarrow \infty$  амплитуда замираний в канале связи становится постоянной  $\sqrt{\Omega_l}$ . Можно показать, что в этом случае (12) сводится к

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{M}(z, m) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\infty \exp(-\omega^2) \prod_{l=0}^{L-1} \cos(\sqrt{2\Omega_l} z \omega) d\omega. \text{ Необходимо подчеркнуть, что с этой}$$

точки зрения (8) представляет собой унифицированное выражение для производящей функции моментов, которая действительна для каналов связи с многолучевым замиранием с произвольной моделью распределения амплитуды и фазы замираний. Например, в случае замираний в канале связи, распределенных в соответствии с законом Накагами- $m$ , с равномерно распределенной фазой из (8) получается [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\exp\{-z |H_n|^2\}\} &= (1/\pi) \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\{-(u^2 + v^2)\} \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1[m; 1; -z(\Omega_l/m)(u^2 + v^2)] dudv = \\ &= \int_0^\infty e^{-\omega} \prod_{l=0}^{L-1} {}_1F_1(v; 1; -z\omega \Omega_l/m) d\omega, \end{aligned}$$

где последний интеграл получается, используя преобразования  $u = \sqrt{\omega} \cos \theta$  и  $v = \sqrt{\omega} \sin \theta$ . В итоге получаем, что производящая функция моментов мощности замираний в канале связи задается функцией  $\mathcal{M}^2(z)$ , где  $\mathcal{M}(z)$  определена выражениями (12)–(14). Точные математические выражения для вероятности ошибок систем связи различных типов легко определяются в терминах производящей функции моментов [26–29]. Например, средняя вероятность ошибок на бит ( $BER$ ) при использовании двоичной фазовой модуляции с порядком разнесения  $D$  сигналов равной мощности и суммированием дифференциально взвешенных сигналов каждого канала определяется как  $BER = 1/\pi \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}^{2D}[(SNR/\sqrt{2} \sin \theta), m] d\theta$ .

Представленные здесь результаты используют специальную комплексную модель распределения Накагами- $m$ , в то время как в [7] и вещественные, и мнимые компоненты имеют идентичные параметры. Тем не менее это может быть легко применимым к более обобщенным комплексным моделям распределения Накагами- $m$ , в которых вещественные и мнимые компоненты обладают неидентичными параметрами, как это показано в [8, 9]. В этом случае (11) имеет вид  $\mathbf{E}\{\exp\{-z |H_n|^2\}\} = \mathcal{M}(z, m_x) \times \mathcal{M}(z, m_y)$ , где  $\mathcal{M}(z, m)$  задается (12), а  $m_x$  и  $m_y$  – параметры вещественной и мнимой компоненты соответственно.

### Численные результаты

На рис. 1–3 сравниваются вероятности ошибок на бит ( $BER$ ) при приеме мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением и двоичной фазовой

модуляцией, передаваемых по каналам связи с многолучевыми замираниями, распределенными в соответствии с законом Накагами- $m$ , как с равномерно, так и с неравномерно распределенной фазой. Полагаем, что  $n = N/2$ . При теоретическом анализе берем за основу (11) и (12). Результаты Монте-Карло моделирования также представлены для подтверждения предложенных новых теоретических результатов. На рис. 1 BER представлена как функция от  $m$  параметра замираний в канале связи при  $L = 2, 3$ , где  $L$  – число маршрутов распространения сигнала. Видно, что две кривые BER совпадают друг с другом при  $m \leq 1$ , т. е. BER становится нечувствительной к закону распределения фазы замираний при  $m \leq 1$ . С другой стороны, различие между BER увеличивается с увеличением значения параметра  $m$ . При  $L = 2$  неравномерность распределения фазы замираний приводит к более высокому значению вероятности ошибки на бит, в то время как при равномерно распределенной фазе замираний в канале связи более высокие значения вероятности ошибки на бит наблюдаются при  $L = 3$ . Действительно, как следует из рис. 1, б, BER поднимается вверх при неравномерно распределенной фазе замираний в канале связи при четном  $L$ , в то время как при равномерном распределении фазы замираний в канале связи BER поднимается вверх при нечетном  $L$ . Как и ожидалось, обе кривые BER сходятся к одному и тому же значению при  $L > 8$ . На основании центральной предельной теоремы комплексная огибающая амплитуды замираний в канале связи сходится к комплексной гауссовской случайной величине при  $L \gg 1$  независимо от закона распределения фазы замираний в канале связи и значения параметра  $m$ .

На рис. 2 показано, что в случае равномерно распределенной фазы замираний в канале связи кривые BER сходятся быстрее. На рис. 3 BER представлена как функция  $SNR$  при  $m = 3$ , когда порядок разнесения сигналов  $N = 1$  и  $2$ . Различие между двумя кривыми BER увеличивается с ростом  $SNR$ . Из рис. 1, а видно, что при  $L = 2$  BER поднимается вверх с увеличением параметра  $m$  уже при  $m > 2$ , в то время как рис. 1, б демонстрирует, что при  $L = 3$  BER резко опускается вниз с увеличением параметра  $m$  при  $m > 2$ . В силу нелинейного характера BER очень сложно интуитивно объяснить такое поведение. Следует отметить, что подобный эффект обсуждался в [16]. На рис. 1 также представлены кривые BER, полученные при аппроксимации коэффициентов канала связи в частотной области распределением Накагами- $m$  с другими параметрами замираний в канале связи [15]. В [16] также было показано, что эта аппроксимация не может заслуживать доверия в случае распределения Накагами- $m$  с равномерно распределенной фазой замираний в канале связи. Из рис. 1 видно, что аппроксимация в [15] не заслуживает доверия и в случае неравномерно распределенной фазы замираний в канале связи.

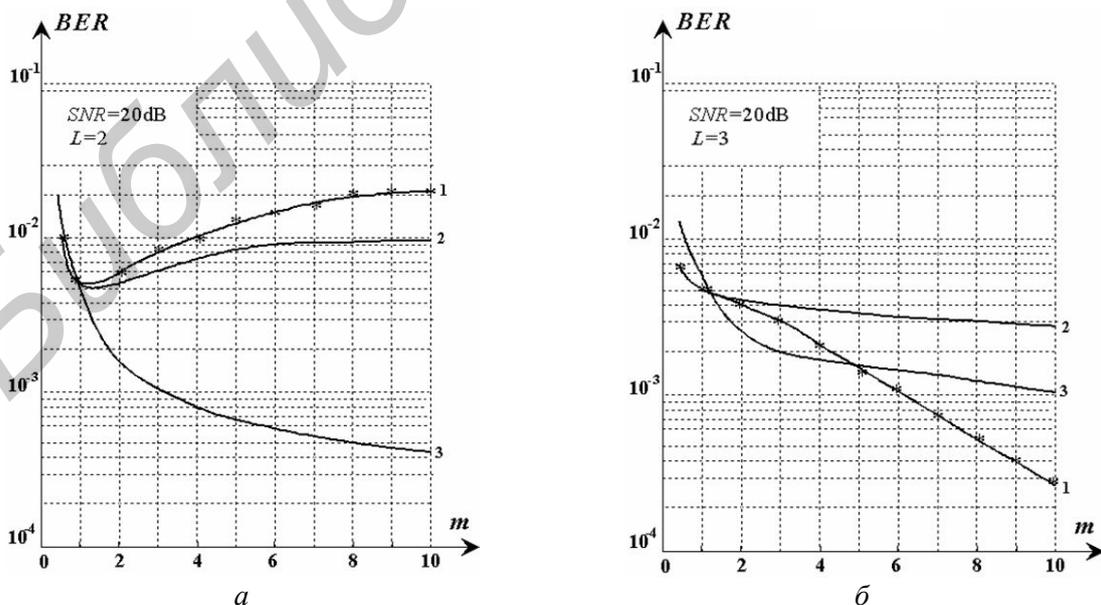


Рис. 1. Среднее значение BER как функция параметра замираний  $m$ : 1 – неравномерное; 2 – равномерное распределение фазы Накагами- $m$  замираний; 3 – Накагами- $m$  аппроксимация; \* – моделирование

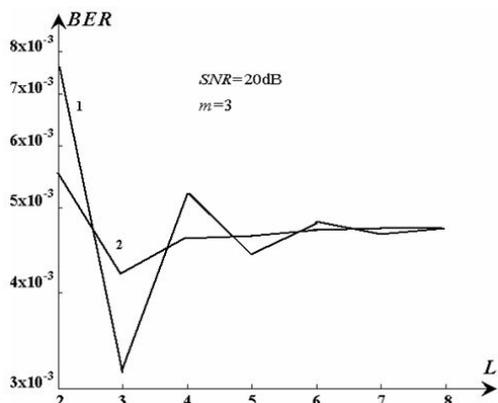


Рис. 2. Среднее значение BER как функция параметра  $L$ : 1 – неравномерное; 2 – равномерное распределение фазы Накагами- $m$  замираний

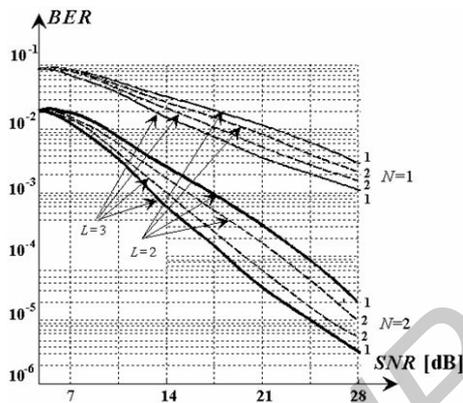


Рис. 3. BER как функция  $SNR$  для однолучевого ( $N = 1$ ) и двулучевого разнесенного приема ( $N = 2$ ): 1 – неравномерное; 2 – равномерное распределение фазы Накагами- $m$  замираний

### Заключение

В настоящей работе исследовано воздействие неравномерно распределенной фазы замираний в канале связи на характеристики вероятности ошибок на бит при приеме мультиплексированных ортогональных сигналов с частотным разделением посредством частотно-избирательных каналов связи с замираниями, распределенными в соответствии с законом распределения Накагами- $m$ . Простая нетривиальная процедура позволила получить новое строгое аналитическое выражение для производящей функции моментов мощности коэффициентов канала связи с замираниями в частотной области в виде характеристических функций комплексных коэффициентов канала связи с многолучевыми замираниями. Классические методы могут использоваться для получения точных характеристик вероятности ошибок на бит для различного вида модуляций и произвольного порядка разнесения сигналов при многоканальной связи.

### Список литературы / References

1. Nakagami M. The  $m$ -distribution – a general formula of intensity distribution of rapid fading // Statistical Methods in Radio Wave Propagation. 1962. Vol. 40, No. 11. P. 757–768.
2. Aulin A. Characteristics of a digital mobile radio channel // IEEE Transactions on Vehicle Technology. 1981. Vol. 30, No. 1. P. 45–53.
3. Charash U. Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays // IEEE Transactions on Communications. 1979. Vol. 27, No. 4. P. 657–670.
4. Suzuki H. A statistical model for urban multipath // IEEE Transactions on Communications. 1977. Vol. 25, No. 7. P. 673–680.
5. Dwivedi V., Singh G. Error-rate analysis of the OFDM for correlated Nakagami- $m$  fading channel by using maximal-ratio combining diversity // International Journal of Microwave and Wireless Technology. 2011. Vol. 3, No. 6. P. 717–726.
6. Jain G., Dubey R. BER performance of OFDM system over Nakagami- $m$  fading channels with different modulation schemes // International Journal of Advances Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET). 2012. Vol. 1, No. 6. P. 111–116.
7. Yacoub M., Fraidenraich G., Santos J. Nakagami- $m$  phase envelope joint distribution // IEE Electronics Letters. 2005. Vol. 41, No. 5. P. 17–18.
8. Yacoub M. Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution: a new model // IEEE Transactions on Vehicle Technology. 2010. Vol. 59, No. 3. P. 1552–1557.
9. Mallik R. A new statistical model of the complex Nakagami- $m$  fading gain // IEEE Transactions on Communications. 2010. Vol. 58, No. 9. P. 2611–2620.
10. Sood N., Sharma A., Uddin M. On channel estimation of OFDM-BPSK and -QPSK over Nakagami- $m$  fading channels // Signal Processing: An International Journal (SPIJ). 2016. Vol. 4, No. 4. P. 239–246.

11. Kumar I., Rao P. Efficient BER analysis of OFDM system over Nakagami- $m$  fading channel // International Journal of Computer Engineering in Research trends (IJCERT). 2015. Vol. 2, No. 11. P. 745–750.
12. Santos Filho J., Yacoub M. On the second-order statistics of Nakagami fading simulators // IEEE Transactions on Communications. 2009. Vol. 57, No. 12. P. 3543–3546.
13. Ma Y., Zhang D. A method for simulating complex Nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics // IEEE Transactions on Vehicle Technology. 2010. Vol. 59, No. 1. P. 29–35.
14. Mishra M., Sood N., Sharma A. New BER analysis of OFDM system over Nakagami- $n$  (Rice) fading channel // International Journal of Computer Science, Engineering and Information Technology (IJCEIT). 2011. Vol. 1, No. 3. P. 12–20.
15. Kang Z., Yao K., Lorenzelli F. Nakagami- $m$  fading modeling in the frequency domain for OFDM system analysis // IEEE Communications Letters. Vol. 7, No. 10. P. 484–486.
16. Du Z., Cheng J., Beaulieu N. Accurate error-rate performance analysis of OFDM on frequency-selective Nakagami- $m$  fading channels // IEEE Transactions on Communications. 2006. Vol. 54, No. 2. P. 319–328.
17. Tuzlukov V. Signal detection theory. New York: Springer-Verlag. 2001. 746 p.
18. Luo J., Zeidler J., McLaughlin S. Performance analysis of compact antenna arrays with MRC in correlated Nakagami fading channels // IEEE Transactions on Vehicle Technology. 2001. Vol. 50, No. 1. P. 267–277.
19. Polprasert C., Ritcey J. A Nakagami fading phase difference distribution and its impact on BER performance // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2008. Vol. 7, No. 7. P. 2805–2813.
20. de Souza R., Yacoub M. Bivariate Nakagami- $m$  distribution with arbitrary correlation and fading parameters // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2008. Vol. 7, No. 12. P. 5227–5232.
21. New results for the multivariate Nakagami- $m$  fading model with arbitrary correlation matrix and applications / G. Alexandropoulos [et al.] // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2009. Vol. 8, No. 1. P. 245–255.
22. Reig J. Multivariate Nakagami- $m$  distribution with constant correlation model // AEU International Journal on Electronics and Communications. 2009. Vol. 63, No. 1. P. 46–51.
23. Tuzlukov V. Signal processing in radar systems. Boca Raton, London, New York, Washington D.C.: CRC Press. 2012. 601 p.
24. Gradshteyn G., Ryzhik I. Table of integrals, series, and products. 6<sup>th</sup> edition. Los Angeles: Academic Press. 2005. 1457 p.
25. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions. 10<sup>th</sup> ed. Washington, D.C. 2010. 1048 p.
26. Simon M., Alouini M. Digital communication over fading channels. 2<sup>nd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2005. 936 p.
27. Tuzlukov V. Contemporary issues in wireless communications. Chapter 4: Signal processing by generalized receiver in DS-CDMA wireless communication systems. INTECH. Croatia. 2014. P. 79–158.
28. Tuzlukov V. Communications systems: new research. New York: NOVA Science Publishers, Inc. 2013. 423 p.
29. Tuzlukov V. Advances in communications and media research. Chapter 6: detection of spatially distributed signals by generalized receiver using radar sensor array in wireless communications. New York: NOVA Science Publishers, Inc. 2015. P. 143–173.

#### **Сведения об авторе**

Тузлуков В.П., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры технической эксплуатации радиоэлектронного и авиационного оборудования Белорусской государственной академии авиации.

#### **Адрес для корреспонденции**

220096, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. Уборевича, д. 77,  
Белорусская государственная академия авиации  
тел. +375-44-549-35-17;  
e-mail: slava.tuzlukov@mail.ru  
Тузлуков Вячеслав Петрович

#### **Information about the author**

Tuzlukov V.P., D. Sci., professor, professor of the technical operation of radioelectronic and aircraft equipment department of Belarusian State Academy of Aviation.

#### **Address for correspondence**

220096, Republic of Belarus,  
Minsk, Uborevich str., 77,  
Belarusian state academy of aviation  
tel. +375-44-549-35-17;  
e-mail: slava.tuzlukov@mail.ru  
Tuzlukov Vyacheslav Petrovich