ТАВТОЛОГИИ И ТОЖДЕСТВА НА РЕШЕТКАХ

В.И. Емельяненков
Кафедра телекоммуникаций и информационных технологий, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: emelvi@bsu.by

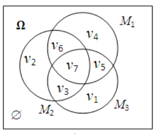
В данной работе рассматривается построение решеточной интерпретации алгебры булевых функций, в которой обоснования логических тождеств и тавтологий выполняются как формальные процедуры вычисления значений для логических выражений.

Введение

Имеет место изоморфизм алгебры множеств, булевой алгебры и дистрибутивных решеток. И этот факт широко используется в теоретических исследованиях [1]. Однако в прикладном плане он используется не в полной мере. Особенно это ощущается в задачах вывода, основанных на доказательствах тождеств и тавтологий. В значительной степени это можно объяснить тем, что конструктивное установление изоморфизма обычно рассматривается как частная задача. Однако, имеют место закономерности, которые позволяют получать достаточно общие решения.

Основная часть

Для уяснения этого положения проведем перевод теоретико-множественной формы доказательства логических тождеств в решеточное представление на примере трех множеств M_1, M_2, M_3, используемых в качестве базиса алгебраической системы. На рис. 1 а эта ситуация представлена в виде диаграммы Эйлера, где каждое из множеств M_1, M_2, M_3 изображено в виде круга.



a)

c	a	b	c	f_0	f_1	…	M_3	…	M_2	…	M_1	…	f_{255}
c_0	0	0	0	0	1		0		0		0		1
c_1	0	0	1	0	0		1		0		0		1
c_2	0	1	0	0	0		0		1		0		1
c_3	0	1	1	0	0		1		1		0		1
c_4	1	0	0	0	0		0		0		1		1
c_5	1	0	1	0	0		1		0		1		1
c_6	1	1	0	0	0		0		1		1		1
c_7	1	1	1	0	0		1		1		1		1

b)

Рис. 1 – Представления множеств, булевой алгебры и решеток

По построению все исходные множества попарно пересекаются так, что имеет место образование системы V их подмножеств $V = \{\varnothing, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. При n = 3 и множество V состоит из 2^3 неделимых элементов. Пересечение любых из них друг с другом пусто.

В таких системах традиционно решаются задачи обоснования тождеств с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Рассмотрим данный подход на следующем примере

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \qquad (1)$$

Здесь устанавливается эквивалентность левой и правой частей равенства (1) через посредство выполнения аналогов этих операций на диаграммах для множеств. Вначале рассмотрим диаграммы, которые отвечают операциям левой части тождества. Коньюнкции $b \wedge c$ отвечает пересечение множеств $M_2 \cap M_3 = v_3 \cup v_7$, состоящее из элементов v_3 и v_7 набора V. Далее выполняя объединение подмножеств, входящих в M_1, с результатом пересечения M_2 и M_3, получим в итоге

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = v_3 \cup v_4 \cup v_5 \cup v_6 \cup v_7. \qquad (2)$$

Аналогичным образом для правой части получаем $M_1 \cup M_2 = v_2 \cup v_3 \cup v_4 \cup v_5 \cup v_6 \cup v_7$, а $M_1 \cup M_3 = v_1 \cup v_3 \cup v_4 \cup v_5 \cup v_6 \cup v_7$, откуда следует

$$(M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) = v_3 \cup v_4 \cup v_5 \cup v_6 \cup v_7. \qquad (3)$$

Таким образом, в результате выполнения операций на множествах для левой и правой частей (1) получаются одинаковые составы независимых подмножеств, что и доказывает тождество. Конечно, это наглядная и интуитивно убедительная конструкция. Однако, в данном случае возникает, по крайней мере, два вопроса.

Во-первых, доказательство в такой форме является в большей степени иллюстрацией, чем эквивалентом аналитического вывода.

Во-вторых, это не формализуемое построение, и его нельзя автоматизировать в форме программного решения.

Для формализации данного подхода используем его теоретико-решеточное представление. С этой целью воспользуемся тем, что в булевой алгебре на трех переменных аналогично может быть образовано 2^3 кортежей. Данная ситуация представлена в таблице на рис. 1 b, где логические переменные a, b, c представляют множества M_1, M_2, M_3, а строки определяют конституенты, которые являются логическими эквивалентами пересечений M_1, M_2, M_3.

$$c_0 = 000 = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \approx \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 = \varnothing,$$
$$c_1 = 001 = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \approx \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 = v_1,$$
$$c_2 = 010 = \bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \approx \bar{M}_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 = v_2,$$
$$c_3 = 011 = \bar{a} \wedge b \wedge c \approx \bar{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 = v_3,$$
$$c_4 = 100 = a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \approx M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 = v_4,$$
$$c_5 = 101 = a \wedge \bar{b} \wedge c \approx M_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 = v_5,$$
$$c_6 = 110 = a \wedge b \wedge \bar{c} \approx M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 = v_6,$$
$$c_7 = 111 = a \wedge b \wedge c \approx M_1 \cap M_2 \cap M_3 = v_7.$$

Таким образом каждому из элементов v_i набора $\varnothing$, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и v_7 взаимно однозначным образом отвечает строка c_i из набора $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ строк таблицы. В связи с этим любой набор элементов из V имеет свой эквивалент в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) алгебры булевых функций. А каждой ДНФ, как представлено на рис. 1 b) отвечает функция из набора $f_0, f_1, ..., f_{255}$, номер которой образует двоичная запись содержимого ее столбца [2].

Далее мы используем то, что уже на двоичных идентификаторах ДНФ может быть построена решетка, которая и образует модельное пространство. Действительно на множестве $V = \{\emptyset, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ как множество всех его подмножеств образуется универсум Ω, мощность которого равна 2^8. Именно столько логических функций $f_0, f_1, \ldots, f_{255}$ может быть представлено в табличной форме на Рис. 1 b). И им будут соответствовать узлы решетки L, частично представленной на рис. 2.

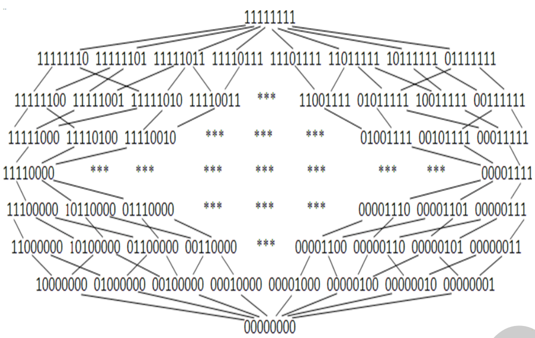


Рис. 2 – Решетка булевых функций.

Для того чтобы модельные пространства универсума Ω и решетки L совпали, требуется установить взаимно-однозначное соответствие между ними как алгебрами.

С этой целью маркировку узлов решетки мы интерпретируем не как численное значение номера i (i = 0, 1, 2, . . . , 255) функции f_i, а как кортеж, где положение единиц и нулей соответствует порядку вхождения в ДНФ образующих ее конституент. Тогда решетка становится алгеброй на множестве маркировок с операциями $\vee, \wedge, \neg$. А именно логическое сложение маркировок как объединение конституент соответствующих ДНФ представляет отображение объединения соответствующих им множеств Ω. Аналогично, логическое умножение маркировок отображает пересечение соответствующих им множеств Ω, поскольку полученная ДНФ содержит только те конституенты, которые входят в каждый из перемножаемых узлов.

Для иллюстрации сказанного и сравнения подходов приведем несколько примеров. Рассмотрим, пример тождества (1) в решетке L. Здесь узел 11110000 представляет множество M_1, узел 11001100 отвечает множеству M_2, а узел 10101010 отвечает множествуM_3. Подставляя эти маркировки в левую и правую части (1) получим

$$a \vee (b \wedge c) =$$
$$= 11110000 \vee (11001100 \wedge 10101010) =$$
$$=11110000 \vee 10001000 = 11111000,$$
$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) =$$
$$= (11110000 \vee 11001100) \wedge$$
$$\wedge\ (11110000 \vee 10101010) =$$
$$= 11111100 \wedge 11111010 = 11111000.$$

Действительно имеет место тождество.

В случае тавтологий в правой части тождества стоит константа единицы. Следовательно, логическое выражение будет тавтологией, если в результате подстановки и преобразований будет получена единичная маркировка 11111111. При этом не обязательно, чтобы в качестве переменных выступали именно эквиваленты множеств M_1, M_2, M_3. В качестве подстановочных элементов могут выступать любые конкретные формулы, а значит и любые узлы решетки. Удобнее всего брать эквиваленты элементов множества V. Покажем это на примере аксиомы $((P \to Q) \to P) \to P$, которая с помощью равенства $x \to y = \neg x \vee y$ приводится к виду $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P$. Затем после подстановки маркировок узлов $P =$ 10000000 и $Q =$ 01000000 получим

$$((P \to Q) \to P) \to P =$$
$$= \neg(\neg(\neg 10000000 \vee 01000000) \vee$$
$$\vee\ 10000000) \vee 10000000 =$$
$$= \neg(\neg(01111111 \vee 01000000)\vee$$
$$\vee\ 10000000) \vee 10000000 =$$
$$= \neg(\neg(01111111) \vee 10000000) \vee 10000000 =$$
$$= \neg(10000000 \vee 10000000) \vee 10000000 =$$
$$= \neg 10000000 \vee 10000000 = 11111111.$$

Заключение

Таким образом, использование алгебры решеток в рассмотренной интерпретации обеспечивает высокий уровень унификации механизмов логического вывода.

Это позволяет применять данный подход для решения поисковых задач в онтологических моделях, основанных на исчислении высказываний с набором операций $\to, \wedge, \vee, \neg$.

В общем случае имеет место экспоненциальная зависимость длины маркера узлов решетки относительно числа переменных. Однако в базисе $\to, \vee, \neg$ размерность модельного пространства, и, следовательно, длина маркера могут быть существенно сокращены. При этом имеет место линейная зависимость по отношения к числу операций логической формулы, что во многих случаях может быть определяющим фактором.

1. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. /Пер. с английского Янкова В А. – М.: Наука. Физматгиз, 1972 г., – 592 стр
2. Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. – М. : Наука. Физматгиз, 2000. – 544 с. – ISBN 5-02-015238-2/