СИНТЕЗ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ САМОНАВОДЯЩЕЙСЯ РАКЕТОЙ

А. А. Бабчёнок, С. А. Шабан, О. В. Сидорович
Кафедра систем автоматического управления,
кафедра тактики и вооружения войсковой противовоздушной обороты,
Учреждение образования «Военная академия Республики Беларусь»
Минск, Республика Беларусь
E-mail: babcheynok@yandex.ru, serg-shab@mail.ru

Рассматривается один из подходов к решению задачи синтеза квазиоптимального контура управления самонаводящейся ракетой по критерию минимума дисперсии промаха и минимального расхода нормального ускорения.

Введение

Проблема синтеза оптимального управления самонаводящейся ракетой является одной из важнейших в современной теории автоматического управления. Задача синтеза контура самонаведения сводится к определению алгоритмов управления ракетой, именуемых также законами управления и обеспечивающих наилучшее качество протекания процесса наведения в течение всего времени функционирования контура или наилучший конечный результат в соответствии с заранее установленным критерием при заданных ограничениях [1].

I. Постановка задачи

Динамика системы управления самонаводящейся ракетой описывается в пространстве состояний матричным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами [3]:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + \bar{\xi}(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $F(t) \in R^{3\times3}$ - матрица состояния (матрица системы);

$x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)^T$ - вектор состояния системы;

$G(t) \in R^{3\times1}$ - матрица управления;

$u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)^T$ - вектор управления;

$\bar{\xi}(t)$ – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и матрицей односторонних спектральных плотностей Q .

В качестве составляющих вектора состояния системы выбраны промах(П), скорость изменения промаха ($\dot{\Pi}$) и нормальное ускорение цели(W_t). Тогда динамику системы управления, в которой управлением является нормальное ускорение ракеты(W_r), можно представить в виде [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\Pi}, \\ \ddot{\Pi} = W_t(t) - W_r(t), \\ \dot{W}_t(t) = -\frac{1}{T_0}W_t(t) + \frac{1}{T_0}\xi(t), \end{cases}$$

где T_0 – параметр, характеризующий маневренные возможности цели.

Наблюдения полагаются линейными и описываются матричным линейным уравнением:

$$z(t) = C(t)x(t) + \overline{\eta}(t), \quad (2)$$

где $C(t) \in R^{1\times3}$ - матрица наблюдения;

$\overline{\eta}(t)$ – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и матрицей односторонних спектральных плотностей R .

Требуется найти такое управление $u(t)$, которое является функционалом от $z(t)$ и минимизирует условное математическое ожидание следующего обобщенного квадратичного функционала [3]:

$$I = \frac{1}{2}x^T(t_k)S_k x(t_k) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} u^T(t)Bu(t)dt, \quad (3)$$

где

$$S_k = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; B = b.$$

Терминальный член в (3) определяет требование минимума дисперсии промаха в конечный момент времени t_k , а функция текущего состояния характеризует потери в каждый момент времени τ за счет расхода ресурса на управление и является ограничением действующего нормального ускорения ракеты с коэффициентом штрафа на управление:

$$b = \frac{\Pi^2_{dop}}{W^2_{rasp}},$$

где Π^2_{dop} и W_{rasp} – допустимое значение дисперсии промаха и располагаемое нормальное ускорение ракеты соответственно.

Таким образом, необходимо минимизировать условное математическое ожидание функционала:

$$I = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{\Pi^2_{dop}}{2W^2_{rasp}}\int_{t_0}^{t_k} W_t^2(t)dt.$$

II. Синтез оптимального управления

Управление $u(t)$, минимизирующее функционал (3), найдено, используя известные методы синтеза [1,2,3], путем совместного решения системы (1) и уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{\overline{\lambda}}^T(t) = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t)}{\partial x(t)} = -\overline{\lambda}^T(t)F(t),$$

$$\overline{\lambda}^T(t_k) = x^T(t_k)S_k; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), t)}{\partial u(t)} = u^T(t)B + \overline{\lambda}^T(t)G(t) = 0, \quad (5)$$

где

$$H(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}\left[u^T(t)Bu(t) + \overline{\lambda}^T(t)F(t)x(t) + \right.$$

$$\left. + G(t)u(t) + \overline{\xi}(t)\right].$$

Из уравнения (5) следует:

$$u(t) = -B^{-1}G^T(t)\overline{\lambda}(t). \qquad (6)$$

Подстановка (6) в (1) и присоединение к полученной системе условия (4) приводит к линейной двухточечной краевой задаче.

В силу линейности задачи множители Лагранжа можно выразить через вектор состояния соотношением [2]:

$$\overline{\lambda}(t) = S(t)\overline{x}(t).$$

Таким образом, управление оказывается связанным с условным математическим ожиданием вектора состояния:

$$u(t) = -J(t)\overline{x}(t), \quad \overline{x}(t) = M\left[\hat{x}\right], \qquad (7)$$

где

$$J(t) = -B^{-1}G^T(t)S(t). \qquad (8)$$

Матрица $S(t)$ определяется путем решения уравнений Риккати [2]:

$$\dot{S}(t) = -S(t)F(t) - F^T(t)S(t) + S(t)G(t)\times$$

$$\times B^{-1}G^T(t)S(t), \quad S(t_k) = S_k. \qquad (9)$$

Уравнения (7), (8), (9) при известном $\hat{x}(t)$ позволяют однозначно определить оптимальное управление $u(t)$.

Апостериорная оценка $\hat{x}(t)$ вектора состояния получается с помощью линейного фильтра на основании измерения (2) вектора $z(t)$. Уравнения оптимального фильтра в векторной форме имеют вид:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + G(t)u(t) + T(t)(z(t) -$$

$$-C(t)\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = x_0, \qquad (10)$$

где $T(t) = P(t)C^T(t)T(t)R^{-1}$ – матрица коэффициентов усиления оптимального фильтра;

$P(t)$ – ковариационная матрица ошибок оценивания вектора состояния, определяемая из решения уравнений Риккати:

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) -$$

$$-T(t)RT(t) + Q; \quad P(t_0) = P_0.$$

Определив произведения матриц в уравнении (8) и уравнении для матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра, можно матричные уравнения (7) и (10) представить в скалярной форме:

$$\begin{cases} W_r(t) = \frac{s_{21}(t)}{b}\hat{\Pi} + \frac{s_{22}(t)}{b}\hat{\dot{\Pi}} + \frac{s_{23}(t)}{b}\hat{W}_t(t), \\ \dot{\hat{\Pi}} = \hat{\dot{\Pi}} + \frac{p_{11}(t)}{RD}(z(t) - \frac{\hat{\Pi}}{D}), \\ \dot{\hat{\dot{\Pi}}} = \hat{W}_t(t) - W_r(t) + \frac{p_{21}(t)}{RD}(z(t) - \frac{\hat{\Pi}}{D}), \\ \dot{\hat{W}}_t(t) = -\frac{1}{T_0}\hat{W}_t(t) + \frac{p_{31}(t)}{RD}(z(t) - \frac{\hat{\Pi}}{D}). \end{cases}$$

Структурная схема оптимального устройства выработки команд самонаводящейся ракеты, полученная на основании уравнений (7) и (10), представлена на рис. 1.

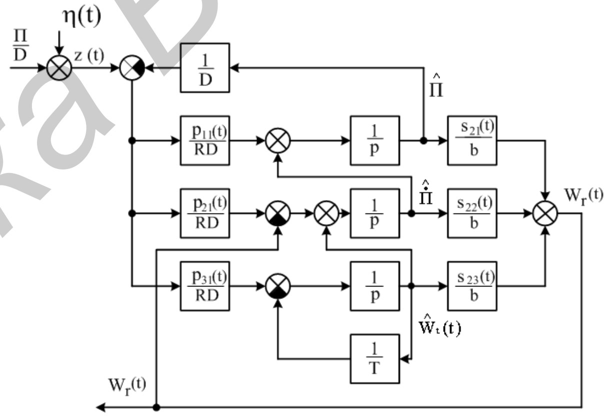

Рис. 1 – Структурная схема контура управления самонаводящейся ракетой

Заключение

Рассмотрен один из подходов к решению задачи синтеза квазиоптимального контура управления самонаводящейся ракетой. Получена структура оптимального устройства выработки команд для линеаризованной модели кинематики плоского самонаведения с учетом маневра цели.

1. Казаков, И. Е. Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М.: Наука, 1987. –304 с.
2. Брайсон, А. Е. Прикладная теория оптимального управления / А. Е. Брайсон, Хо-ю-ши. – М.: Мир, 1972. – 545 с.
3. Кун, А. А. Основы построения систем управления ракетами: в 3 ч. / А. А. Кун, В. Ф. Лукьянов, С. А. Шабан. Под ред. А. А. Куна. – Минск: Издание академии, 2001. – 3 ч.