

# ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЦЕНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

В.А. Пархименко

Кафедра экономики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
Минск, Республика Беларусь  
E-mail: parkhimenko@bsuir.by

*Представлен непараметрический подход к решению задачи динамического определения оптимальной цены, который может использоваться в качестве встроенного в веб-сайты интернет-магазинов алгоритма.*

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных маркетинговых инструментов, которыми располагает любая коммерческая организация или индивидуальный предприниматель (даже если речь идет про систему автоматического управления маркетингом [1]), является цена.

Манипулирование размером цены (уменьшение или повышение) подразумевает стимулирующее или угнетающее воздействие на объем продаж. В экономической теории подобная зависимость именуется законом или функцией спроса. И для так называемых нормальных товаров (т.е. для подавляющего большинства) эта зависимость обратно пропорциональная: повышение цены ведет к уменьшению продаж, а снижение цены – к их увеличению.

Очень часто в качестве приближения такой зависимости в экономической теории используют простую линейную зависимость вида:

$$Q = a - b \cdot p \quad (1)$$

где  $Q$  – объем спроса на продукцию за определенный период;  $p$  – цена единицы продукции;  $a, b$  – некоторые параметры (константы).

Оставляя пока за скобками проблему выбора конкретной модели из упоминаемых в литературе (еще одним классическим приближением является модель с постоянной ценовой эластичностью, в которой используется степенная функция), рассмотрим задачу определения оптимальной для коммерческой организации цены.

## I. КЛАССИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОЙ ЦЕНЫ

На практике в качестве оптимальной цены понимают в разных ситуациях разное [2, с. 511–512]. Либо цену, максимизирующую прибыль, либо цену, максимизирующую выручку и долю рынка, либо достаточно низкую цену, позволяющую выйти на новый рынок или «выдавить» с существующего рынка опасных конкурентов, т.е. оптимальную в стратегическом смысле, а не в смысле текущей максимизации какого-либо финансового показателя.

Мы в качестве оптимизационной функции используем здесь вполне традиционно для микроэкономической логики максимизацию прибыли ( $Pr$ ):

$$Pr = (p - VC) \cdot Q - FC \rightarrow \max \quad (2)$$

где  $VC$  – переменные издержки на единицу продукции (в случае интернет-магазина это может быть, например, закупочная цена единицы продукта);  $FC$  – постоянные издержки на весь объем продаж (в случае интернет-магазина это может быть, например, стоимость аренды офиса).

Тогда для (1) в соответствии с (2) максимизирующее прибыль значение цены равно:

$$p^* = \frac{a + b \cdot VC}{2b} \quad (3)$$

И задача максимизации прибыли посредством цены в такой формулировке сводится к следующим прикладным шагам: сбор статистики продаж ( $Q$ ) при разных уровнях цены ( $p$ ); расчет констант  $a$  и  $b$  методами параметрической статистики, в первую очередь методом наименьших квадратов (МНК); расчет оптимальной цены ( $p^*$ ) по (3).

Очевидно, однако, что подобный классический подход сталкивается с рядом проблем.

Во-первых, не ясно, какую конкретно модель брать за основу (линейную, степенную или какую-то другую).

Во-вторых, исходя из экономической теории, можно ожидать, что даже если на определенных отрезках времени искомая связь неплохо аппроксимируется параметрическими функциями вида (1), то содержащиеся в них неизвестные параметры  $a$  и  $b$  являются константами только внутри рассматриваемых отрезков времени, и за пределами этих отрезков эти параметры являются случайными величинами (говоря языком микроэкономики на наклон и положение функции спроса влияют неценовые факторы: изменения в моде, появление новых конкурентных аналогов, макроэкономические шоки и т.п.).

С нашей точки зрения, устранение этих недостатков и, возможно, более полное отражение реальных процессов продаж подразумевает переход к иному классу методов – методам

непараметрической идентификации экономических систем [3].

## II. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОЙ ЦЕНЫ

Для некоторой компании (магазина) рассмотрим множество наблюдений в определенные моменты времени за ценами конкретного товара  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и соответствующие им объемы спроса или продаж этого же товара  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

Ставится задача нахождения зависимости между  $Q$  и  $p$  (построение функции спроса) с целью возможности определения оптимального уровня цены на товар, исходя из максимизации прибыли (2). Инфляция, налоги и прочие не указанные выше явным образом факторы в расчет не принимаются.

Из (2) найдем максимизирующее прибыль значение цены для общего (непараметрического) случая:

$$[p \cdot Q(p) - VC \cdot Q(p) - FC]' = 0$$

Отсюда оптимальную цену  $p^*$  можно представить как:

$$Q(p^*) + (p^* - VC)Q'(p^*) = 0 \quad (4)$$

Оценку функции  $Q(p^*)$  представим как непараметрическую регрессию по Надарая [4] и Ватсону [5] по выборке  $(p_i, Q_i)$  за период  $i = 1, \dots, n$ :

$$Q_n(p^*) = r_n(p^*) = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot K\left(\frac{p^* - p_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{p^* - p_i}{h_n}\right)} \quad (5)$$

Оценку первой производной  $Q'(p^*)$  представим следующий образом (продифференцировав (5) по  $p$ ):

$$Q'(p^*) = \frac{dr_n(p^*)}{dp} = \frac{A'}{B} - \frac{B' \cdot A}{B^2} \quad (6)$$

где  $A = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot K\left(\frac{p^* - p_i}{h_n}\right)$ ,  $B = \sum_{i=1}^n K\left(\frac{p^* - p_i}{h_n}\right)$ .

Тогда оптимальное управление (уровень цены) можно представить, исходя из (4), как непараметрическую оценку функционалов:

$$\frac{A}{B} + (p^* - VC) \cdot \left(\frac{A'}{B} - \frac{B' \cdot A}{B^2}\right) = 0 \quad (7)$$

Удовлетворяющая условию (7) оценка оптимальной цены  $p^*$  предполагает свое использование в реальной действительности в момент времени  $n + 1$  и соответствующую «реакцию» рынка в виде  $Q_{n+1}$ . Аналогично и в периоды времени  $n + 2, n + 3$  и т.д. Таким образом, возникает возможность проверки на практике оптимальности полученного решения и его последующей корректировки.

Здесь, однако, существует ряд моментов, которые требуют отдельного изучения.

Так, подобный способ постановки задачи нахождения оптимальной цены (7) подразумевает поиск решения путем использованием численных методов. В данной статье мы оставляем открытым вопрос о сходимости этого класса методов применительно к (7) и вообще о существовании единственного решения, которое имеется в случае описанного выше классического подхода (3), и которое можно ожидать и в случае непараметрического оценивания (все-таки очевидна обратная пропорциональная связь между ценой и объемом продаж), однако это требует своего доказательства или опровержения.

Вероятно, на практике потребуется введение ограничения на  $p^*$  исходя из экспертных суждений о рыночной конъюнктуре вида

$$VC \leq p_{min} < p^* < p_{max}$$

что в принципе, по всей видимости, упростит и ускорит схождение численного метода.

Начальная точка  $p_0$  для численного метода может браться также исходя из экспертных оценок. Или, возможно, из (3), рассчитанного по той же выборке наблюдений параметрическим методом (например, МНК).

Крайне важный вопрос – размер выборки  $n$ . Здесь действует два эффекта. С одной стороны, больший размер выборки позволяет получать более надежные оценки. С другой стороны, больший размер выборки может привести к тому, что серьезные изменения в спросе (сдвиг кривой спроса, изменения ее наклона) будут излишне сглаживаться алгоритмом.

Возможно, следует говорить о «скользящей» оценке, когда в выборку для непараметрического оценивания берутся не все прошлые данные, а только  $n$  последних и по мере «движения во времени» из этой выборки по одному отбрасываются ранние наблюдения и добавляются последние.

Важны также и такие технические вопросы, как выбор вида функции ядра и величины «размытости оценки»  $h$ .

1. Пархименко, В. А. Концепция системы автоматического управления маркетингом в интернете / В. А. Пархименко, Л. Ю. Шилин // Международная научно-техническая конференция, приуроченная к 50-летию МРТИ – БГУИР, (Минск, 18-19 марта 2014 года) : материалы конференции : в 2 ч. / [редколлегия: А. А. Кураев и др.]. – Ч. 2. – С. 247–249.
2. Ламбен Ж.-Ж. Менеджмент, ориентированный на рынок / Ж.-Ж. Ламбен, Р. Чумпитас, И. Шулинг. – СПб.: Питер, 2011. – 720 с.
3. Непараметрическая идентификация экономических систем : учеб. пособие / Г. М. Кошкин ; Федер. агентство по образованию, Том. гос. ун-т, [инноват. образоват. программа]. – Томск : Изд-во науч.-техн. лит., 2007. – 307 с.
4. Надарая, Э. А. Об оценке регрессии / Э. А. Надарая // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – Т. 9., № 1. – С. 157–159.
5. Watson, G. S. Smooth regression analysis / G. S. Watson // Sankhya. Ser. A. – 1964. – V. 26. – P. 359–372.