ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ИНТЕРЕСАХ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ

А.С. Храменков, С.Н. Ярмолик
Кафедра радиолокации и приемо-передающих устройств, Военная академия Республики Беларусь
Минск, Республика Беларусь
E-mail: yarmsergei@yandex.ru, xras.tech@mail.ru

Рассмотрены вопросы выбора базисных функций, используемых для аппроксимации закона распределения, лежащего в основе принятия решений при радиолокационном распознавании. В качестве весовых функций предлагается использовать одномерные сечения анализируемой многомерной плотности.

Эффективность функционирования устройств классификации объектов характеризуется значениями вероятностей принимаемых решений. Применительно к радиолокационным системам распознавания наблюдаемых объектов показателями качества выступают условные вероятности правильного и ложного распознавания. При использовании стратегии Байеса, значения рассматриваемых вероятностей принимаемых решений, определяются путем интегрирования многомерных плотностей решающей статистики (1). Где $F_{k/g}$ – вероятность принятия решения в пользу k-го класса, при наблюдении объекта g-го класса ($k, g = 1\ldots\ M$, $l \neq\ k$); M–количество распознаваемых классов; $p_{k/g}(\mathbf{Z}) = p_{k/g}(Z_{k1/g}, \ldots\ , Z_{kl/g}, \ldots\ , Z_{kM/g})$–закон распределения межканальных разностей случайных величин, лежащих в основе принимаемых решений; $Z_{kl/g}$ – разность сигналов, формируемых на выходах k-го и l-го каналов обработки при наблюдении объекта g-го класса.

Следует отметить, что точное аналитическое описание закона распределения многомерной случайной величины $\mathbf{Z}$, как правило, не известно. В связи с этим возникают существенные трудности, связанные с аналитическим представлением и последующим интегрированием анализируемой решающей статистики. Отмеченный факт обуславливает необходимость использовать приближенное представление многомерной плотности вероятности случайной величины $\mathbf{Z}$ полиномиальным рядом, основанном на ортогональных полиномах и их весовых функциях [1].

На основе известного [1] разложения двумерного закона распределения в ряды по ортогональным полиномам в [2, 3] получено выражение для многомерной плотности вероятности $p_{k/g}(\mathbf{Z})$ (2). Где $\phi_l(Z_{kl/g})$, $l = 1\ldots\ M$, $l \neq\ k$ – весовые функции используемого полинома; $Q_n(Z_{kl/g}) = \sum_{p=0}^{n} r_{n/p}^{kl/g} Z_{kl/g}^{p}$ – n-ый ортонормированный полином; $r_{n/p}^{kl/g}$ – коэффициенты n-го ортонормированного полинома, стоящего у переменной $Z_{kl/g}$ в степени p; $c_{q1\ldots\ qM}$ – весовые коэффициенты разложения в ряд.

Несмотря на относительную простоту и доступность общей методики использования полиномиальных рядов, значимым моментом аппроксимации является выбор наиболее предпочтительной системы базисных функций. На сегодняшний момент не существует оптимального правила выбора весовых функций $\phi_l(Z_{kl/g})$. Чаще всего, исходя из имеющихся априорных сведений о типе распределения, ограничиваются рассмотрением разложений, основанных на использовании полиномов с весовой функцией в виде нормального закона распределения (ряд Грама-Шарлье, ряд Эджворта, разложение Мелера в ряд Эрмита, разложение Корниша-Фишера). Иногда используются полиномы, связанные со степенями нормальной плотности вероятности (ряд Юнга) [1, 2]. При этом известно, что скорость сходимости полиномиального ряда напрямую определяется степенью соответствия выбранной весовой функции аппроксимируемому распределению [1].

Применительно к радиолокационным классификаторам, одномерные сечения многомерной плотности $p_{k/g}(\mathbf{Z})$, значительно отличаются от нормального закона распределения (рис. 1).

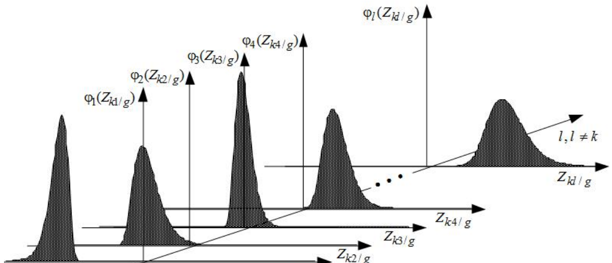

Рис. 1 – Одномерные сечения многомерной плотности вероятности $P_{k/g}(\mathbf{Z})$

Данный факт существенно затрудняет практическое использование систем полиномов, связанных со степенями нормальной плотности вероятности.

При аппроксимации унимодальных распределений, отличных от нормального, возможно использовать ряд, снованный на полиномах Лагерра (Лагерра-Сонина) [1, 2]. К сожалению, рассматриваемые полиномы характеризуются положительным интервалом ортогональности, что в значительной мере затрудняет их практическое использование [2]. Кроме того, для обеспечения качественной аппроксимации усеченным рядом Лагерра требуется большое число членов ряда.

В [3] рассматриваются неклассические полиномы Поллачека, использование которых позволяет неплохо аппроксимировать любой двусторонний закон распределения, значительно отличающийся от нормального. Недостатком предлагаемого подхода является необходимость поиска оптимальных значений двух параметров функции Поллачека [3]. При этом имеющийся диапазон изменения параметров весовой функции в ряде практически важных случаев не позволяет обеспечить требуемое качество аппроксимации.

Анализ выражений усеченного аппроксимирующего ряда (1) показывает, что весовые функции $\phi_l(Z_{kl/g})$ могут рассматриваться как одномерные сечения многомерной плотности $p_{k/g}(\mathbf{Z})$. Следует отметить, что отличия рассматриваемых функций в различных сечениях от нормального закона распределения снижает эффективность всех рассматриваемых аппроксимаций [3].

С целью повышения качества аппроксимации апостериорного многомерного распределения $p_{k/g}(\mathbf{Z})$, целесообразно каждое одномерное сечение $p_l(Z_{kl/g})$ максимально точно аппроксимировать подходящей системой ортогональных полиномов, характеризующихся соответствующей весовой функцией $\phi_l(Z_{kl/g})$. При этом выбранная весовая функция будет обеспечивать возможность синтеза требуемой системы неклассических ортогональных полиномов.

Основу предложенной методики составляет выбор наиболее предпочтительной для каждого анализируемого сечения весовой функции. В качестве таких функций предлагается использовать одномерные сечения многомерной плотности $p_{k/g}(\mathbf{Z})$.

При использовании байесовского критерия оптимальности, разность сигналов $Z_{kl/g}$, формируемая на выходах каналов обработки в устройстве радиолокационного распознавания, представляет собой квадратичный функционал. Одна из первых попыток получения аналитического выражения для распределения квадратичной формы от стационарного гауссовского процесса предпринята в [4]. Предложенная методика, основанная на вычислении значений характеристической функции $\Theta_z(\nu)$ с помощью теории вычетов, характеризуется сложностью реализации и не нашла практического применения. В [5] предложен весьма точный способ получения одномерного распределения квадратичной формы $p_l(Z_{kl/g})$, также основанный на преобразовании ее характеристической функции. Получаемые одномерные распределения предлагается использовать в качестве весовых функций для каждого анализируемого сечения многомерной плотности вероятностей: $\phi_l(Z_{kl/g}) = p_l(Z_{kl/g})$. Такая весовая функция обеспечивает оптимальное качество и максимальную скорость сходимости аппроксимирующего ряда.

Выбранная весовая функция $\phi_l(Z_{kl/g})$, в свою очередь, полностью определяет соответствующую систему ортогональных многочленов. Для их описания может быть использовано представление искомого многочлена на основе определителей Грама n-го порядка и степенных моментов весовой функции [6]. Предложенный подход позволяет синтезировать требуемое семейство ортонормированных «неклассических» полиномов, обеспечивающих качественную аппроксимацию.

Таким образом, предложенная методика существенно расширяет возможности известных полиномиальных разложений многомерных распределений, обеспечивает высокое качество аппроксимации за счет оптимизации базисных весовых функций, является практически реализуемой и позволяет определять вероятностные показатели качества устройств радиолокационного распознавания.

1. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов – 2-е изд., перераб. и доп. –М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
2. Шаляпин, С. В.Представление рядами ортогональных полиномов многомерной плотности выходных сигналов систем распознавания для оценки их характеристик / С. В. Шаляпин // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. –Т. 1. –№ 1. – С. 12–21.
3. Ярмолик, С. Н. Методика анализа характеристик систем распознавания на основе полиномиальной аппроксимации многомерной плотности вероятности выходных сигналов / С. Н. Ярмолик, С. В. Шаляпин // Доклады БГУИР. – 2003. –Т. 1. – № 3. – С. 28–32.
4. Проскурин, В. И.Распределение вероятностей квадратичного функционала от гауссовского случайного сигнала / В. И. Проскурин // Радиотехника и электроника. – 1985. –Т. 30. –№ 7. – С. 1335–1340.
5. Леховицкий, Д. И. О вычислении законов распределения квадратичных форм комплексных нормальных векторов / Д. И. Леховицкий, П. М. Флексер, С. В. Полишко // Прикладная радиоэлектроника. – 2011. –Т. 10. – № 4. – С. 456–461.
6. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин –М.: Наука, 1976. –328 с.

$$F_{k/g} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty p_{k/g}(Z_{k1/g}, \ldots, Z_{kl/g}, \ldots, Z_{kM/g}) dZ_{k1/g} \ldots dZ_{kl/g} \ldots dZ_{kM/g} \quad (1)$$

$$p_{k/g}(\mathbf{Z}) = \prod_{l=1, l\neq k}^{M} \phi_l(Z_{kl/g}) \sum_{q1=0}^{\infty} \ldots \sum_{qM=0}^{\infty} c_{q1\ldots qM} Q_{q1}(Z_{k1/g}) \ldots Q_{qM}(Z_{kM/g}) \quad (2)$$