АНАЛИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.П. Кузнецов, Е.В. Протченко, Н.В. Хаджинова
Кафедра информационных систем и технологий,кафедра информационных технологий автоматизированных систем, Белорусский государственный университетм информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: vpk@bsuir.by, khajynova@bsuir.by, protchenko@bsuir.by

Рассматриваются непрерывные динамические системы, в общем случае нестационарные и нелинейные, описываемые дифференциальными векторно-матричными уравнениями. Разрабатываются методы преобразования уравнений динамики и анализа устойчивости положения равновесия.

Рассматривается класс непрерывных динамических систем в общем случае нестационарных и нелинейных, которые описываются системой дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x}(t) = A[t, x(t)]x(t), \tag{1}$$

где $x = col[x_i, ..., x_n]$ - вектор состояния системы размерности n, x_i - переменные состояния, A - nxn матрица с элементами $a_{ij}(t, x)$, зависящими от аргумента t-времени и координат $x_i, \dot{x}(t)$, - производная по времени.

I. Постановка задачи

Параметры системы и соответственноконкретный вид коэффициентов a_{ij} неизвестен, а известны лишь пределы их изменения, т.е. заданы ограничения

$$a'_{ij} \leq a_{ij}(t, x) \leq a''_{ij}, \tag{2}$$

справедливые для любых t и x_i, а a'_{ij} и a''_{ij} - некоторые постоянные величины.

Уравнением (1) при ограничениях (2) будет описываться непрерывная динамическая система с неопределенными параметрами.

Задача ставится в разработке методов анализа таких систем и в частности анализе устойчивости и динамических свойствпроцессов. Впервые в такой постановке в свое время была сформулирована задача абсолютной устойчивости положения равновесия. В конце прошлого столетия появился термин интервальные системы.

Уравнение (1) всегда можно представить в виде

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + H_0[t, x(t)]x(t), \tag{3}$$

т.е. из матрицы А выделить некоторую линейную часть с матрицей A_0 с постоянными коэффициентами a_{ij}. Такое выделение возможно рядом способов. Наиболее просто это усреднить коэффициенты $a_{ij}(t, x)$ в соответствующих интервалах (2). При этом будем полагать, что матрица A_0 является Гурвицевой и может быть произвольного вида или как частный случай быть матрицей Фробениуса.

Уравнение (3) с помощью преобразования $x = MZ$, где M - модальная матрица, преобразуются к виду

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + H[t, z]z(t), \tag{4}$$

где $D = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n]$, λ_i - n различных собственных чисел матрицы A_0. Алгоритм формирования модельной матрицы при известных λ_i общеизвестен и изложен в литературе.

Совокупность параметров (коэффициентов матрицы (1)) уравнения (1) будем называть областью экспоненциальной устойчивости с показателем α (α - область), если любое решение уравнения (1) затухает не медленнее экспоненты с показателем - α , т.е. $||x(t)|| \leq ||x_0||exp(-\alpha t), ||\cdot||$, – норма вектора. При $\alpha = 0$ имеем просто область асимптотической устойчивости.

II. Основные результаты

Основными полученными результатами являются:

1. α – область всегда существует, если $Re\lambda\alpha_{max} \leq -\alpha$;
2. Достаточным условием существования - области уравнения (1) является выполнение в некоторой области пространства коэффициентов a_{ij}, включающей точку с координатами $a_{ij} = \bar{a}_{ij}$ неравенства
$$(-1)^n det\left\{\frac{D + H(t, z) + [D + H(t, z)]^*}{2} + \alpha E\right\} > 0 \tag{5}$$
3. Граница α - области в пространстве коэффициентов задается уравнением
$$det\left\{\frac{D + H(t, z) + [D + H(t, z)]^*}{2} + \alpha E\right\} = 0 \tag{6}$$

В написанных соотношениях $[D + H(t, z)]^*$ -эрмитовосопряженная матрица к матрице $D = H(t)$, а Е - единичная матрица.

Отметим, что если матрица является матрицей Фробениуса

$$A[t, x(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_n(t, x) & \dots & \dots & \dots & -b_1(t, x) \end{bmatrix},$$

то граница α - области относительно произвольного коэффициента $b_k(t,x)$ всегда представима в виде

$$g_2 * b_k^2 + g_1 b_k + g_0 = 0, \tag{7}$$

где коэффициенты g_i являются аналитическими функциями величин b_i, $i \neq k$.

III. Пример

В качестве примера рассмотрим динамическую систему второго порядка

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2(t,x) & -b_1(t,x) \end{bmatrix} x(t), \tag{8}$$

Выбирая $\bar{b_1}, \bar{b_2}$ некоторыми постоянными для случая действительных корней уравнения $\lambda^2 + \bar{b_1}\lambda_1 + \bar{b_2} = 0$ $(\bar{b_1}^2 > 4\bar{b_2})$ коэффициенты уравнения (7) будут $(b_k = b_1)$

$$g_2 = \frac{4b_2}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_2}} - \frac{1}{4},$$

$$g_1 = \frac{1}{2}\bar{b_1} - \alpha - 4\frac{2b_2 - \bar{b_1}\bar{b_2}}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_2}},$$

$$g_0 = \alpha^2 + b_2 - \frac{1}{4}\bar{b_1}^2 - 4 + \frac{-\bar{b_2^2} + b_2(\bar{b_1}^2 - 2\bar{b_2}) + \bar{b_2}^2}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_2}}, \tag{9}$$

Если $\bar{b_1}^2 < 4\bar{b_2}$, то получены соответствующие выражения

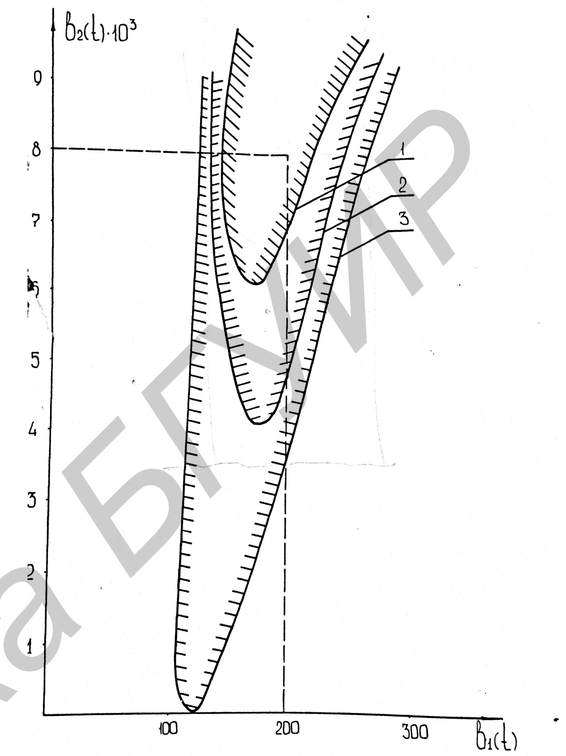
$$g_2 = \frac{1}{4} + 4\frac{\bar{b_2}}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_2}},$$

$$g_1 = 4v\frac{2b_2 - \bar{b_1}\bar{b_2}}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_1}} - \alpha,$$

$$g_0 = \alpha^2 + \bar{b_1} - \frac{1}{4}\bar{b_1}^2 + 4 + \frac{\bar{b_2}^2 + b_2(\bar{b_1}^2 - 2\bar{b_2}) + \bar{b_2}^2}{\bar{b_1}^2 - 4\bar{b_2}}, \tag{10}$$

Используя (7), (9), (10) и задавая α строятся соответствующие кривые и области в плоскости параметров b_1, b_2.

α - область при выборе $\bar{b_1} = 200, \bar{b_2} = 8000$ и соответственно $\alpha = 0, 20, 40$, приведены на рисунке.



α -области для уравнения (4.4I)
($\bar{b}_1 = 200$, $\bar{b}_2 = 8000$)

1. Кузнецов В.П. Оценки процессов в нелинейных нестационарных непрерывных интервальных системах.//Избранные научные статьи в 10-летию Минского института управления.-Мн.:МИУ,2001-с.12-16.