МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДИЗЪЮНКТОВ В НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ С КВАНТОРАМИ.

Шатилов Н. П., Громов М. Л.
Кафедра информационных технологий в исследовании дискретных структур, Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Российская Федерация
E-mail: muz_on@live.com, gromov@sibmail.com

В данной работе рассматривается задача выполнимости булевых формул с кванторами и проводятся экспериментальные исследования влияния метода разделения множества дизъюнктов на скорость сколемизации таких формул.

Введение

Задача выполнимости квантифицированных булевых формул (КБФ) находит применение во многих практических приложениях [1], таких как верификация логических схем, автоматический синтез программ, нахождение выигрышной стратегии для игр на двух игроков и т.д. Для определения выполнимости некоторой булевой формулы с кванторами в [1] предлагается использовать известный подход из логики предикатов: сколемизировать [2] исходную формулу, с тем, чтобы избавиться от кванторов, а затем к получившейся формуле применить метод резолюций [3].

Серьёзным вопросом при описанном подходе к выполнимости КБФ становится вопрос подбора сколемовых функций.

I. Основные понятия

Булевой формулой будем называть последовательность символов, построенную из маленьких букв латинского алфавита, знаков логических операций, скобок и символов 0, 1.

Квантифицированной булевой формулой будем называть вида: $\phi ::= Q_1x_1...Q_kx_k\varphi$, где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ – кванторы, φ – булева формула над переменными $x_1, \ldots, x_k$, называемая подкванторным выражением. Заметим, что в определённых выше булевых формулах с кванторами все переменные подкванторного выражения связаны кванторами. Значения квантифицированных булевых формул вычисляются следующим образом: если $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, то $\forall x\varphi(x) = 1$, иначе $\forall x\varphi(x) = 0$; если $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то $\exists x\varphi(x) = 0$, иначе $\exists x\varphi(x) = 1$. Будем говорить, что заданная булева формула с кванторами ϕ *выполнима*, если $\phi = 1$, иначе формула называется *невыполнимой*[1].

Предположим, задана следующая КБФ: $\phi = \forall x\exists y(y \to x)$. При сколемизации переменная y будет заменена на Сколемову функцию $y(x)$, а квантор всеобщности – отброшен, и в итоге получится формула $(y(x) \to x)$. Для того чтобы выяснить выполнима ли исходная КБФ, необходимо подобрать функцию $y(x)$ так, чтобы получившаяся формула была тождественно равна 1. В данном случае в качестве функции $y(x)$ можно выбрать константу 0, то есть функцию, зависящую не от одной переменной, а от нуля переменных. Тогда формула $(0 \to x)$ будет тождественно равна 1, а значит исходная формула тоже выполнима.

Время, необходимое для поиска подходящей сколемовой функции существенно зависит от числа переменных, от которых она зависит.

II. Метод разделения множества дизъюнктов

Чтобы упростить поиск сколемовых функций, мы предлагаем следующее решение. Рассмотрим формулу $\Phi = \forall x\exists yF(x, y, \vec{z})$. Мы предполагаем, что подкванторное выражение в исходной формуле можно представить в виде конъюнкции двух формул $G_1(x, y, \vec{z})$ и $G_2(y, \vec{z})$, то есть формул, в первую из которых переменная x входит, а во вторую – нет. Тогда $\Phi = \forall x\exists y[G_1(x, y, \vec{z}) \wedge G_2(y, \vec{z})]$. Заметим, что разбить формулу на конъюнкцию двух подформул достаточно легко, если она представлена в виде конъюнктивной нормальной формы (КНФ) [4].

Можно показать, что если формула Φ – выполнима, то выполнима и формула $\Phi' = \forall x\exists y[G_1(x, y, \vec{z}) \wedge \exists yG_2(y, \vec{z})]$ или, что тоже самое, если формула Φ' – невыполнима, то и невыполнима формула Φ. Таким образом, достаточно проверить выполнимость двух формул $\Phi_1 = \forall x\exists y[G_1(x, y, \vec{z})$ и $\Phi_2 = \exists yG_2(y, \vec{z})]$, и если хотя бы одна из них окажется невыполнимой, то невыполнима будет и формула Φ', а значит и формула Φ. При проверке выполнимости формул Φ_1 и Φ_2 можно ожидать, что потребуется меньшее количество ресурсов, чем при проверки выполнимости исходной формулы Φ, поскольку обе формулы содержат меньшее количество дизъюнктов, а

[1]Заметим, что данное определение выполнимости формулы не противоречит общепринятому: формула ϕ *выполнима*, если существует такой набор значений для её n свободных переменных (в нашем случае n = 0) при подстановки которых в формулу, $\phi = 1$.

Φ_2, к тому же, не содержит переменной x. Однако, в случае когда обе формулы Φ_1 и Φ_2 оказываются выполнимы, то никакого вывода о выполнимости исходной формулы Φ сделать не удаётся и необходимо проверять её на выполнимость. Данный подход мы назвали *методом разделения множества дизъюнктов*.

III. Эксперимент

Для проверки, насколько метод разделения множества дизъюнктов ускоряет процесс выяснения того, выполнима формула или нет, нами было решено провести вычислительные эксперименты. Для этого была написана программа, которая принимает на вход файл содержащий КБФ Φ в формате qdimacs [5] (пример формулы в этом формате см. на рис. 1), а на выход выдаёт два файла, в первом из которых записана формула Φ_1, а во втором Φ_2 так же в формате qdimacs.

Рис. 1 – Представление КБФ в формате qdimacs

Для проведения компьютерных экспериментов была написана программа, которая генерирует случайным образом исходную КБФ. Максимально возможное число переменных 32. Число дизъюнктов генерируется случайным образом из заданного диапазона, т.к. различных дизъюнктов не может быть больше $3^n - 1$, причем на каждом шаге проверяется, что сгенерированный дизъюнкт не совпадает с ранее сгенерированными. Затем подаем сгенерированную КБФ на вход программы, которая разделяет КБФ. После деления подаем получившиеся файлы на один из бесплатных SAT-solver'ов для КБФ – sKizzo [6].

Результаты проведённых экспериментов представлены в таблице 1. В первом столбце указаны встречаемые варианты. В-В-В – вариант, при котором исходная формула Φ выполнима и формулы Φ_1 и Φ_2 тоже выполнимы. Н-В-В – вариант, при котором исходная формула Φ невыполнима а формулы Φ_1 и Φ_2 выполнимы, и т.д.. Во втором столбце указан процент случаев, когда встречался тот или иной вариант. В третьем – среднее время определения выполнимости исходной формулы Φ. В четвёртом – среднее время, которое было потрачено на определение выполнимости формулы Φ с использованием метода разделения множества дизъюнктов, для удобства анализа время указано в долях от времени, потраченного на проверку выполнимости исходной формулы Φ напрямую. При этом мы предполагаем, что исследователю «не повезло», то есть для вариантов В-В-В и Н-В-В указывается суммарное время проверки всех трёх формул (Φ, Φ_1 и Φ_2), для случаев Н-Н-В и Н-В-Н указывается сумма проверки выполнимости обеих формул – Φ_1 и Φ_2, так как исследователь мог «ошибиться» и взять для рассмотрения выполнимую формулу, а для варианта Н-Н-Н – максимальное из двух времён (одно для Φ_1, другое – Φ_2).

Таблица 1 – Результаты экспериментального исследования

Вариант	$\langle t_{\Phi_1}/t_\Phi \rangle$	$\langle t_{\Phi_2}/t_\Phi \rangle$	$\langle R \rangle$	Количество случаев
В-В-В	$0,28$	$0,58$	$1,88$	76/135
Н-В-В	$0,65$	$5,51$	$7,9$	13/135
Н-Н-В	$34,6$	$1,2$	$35,8$	1/135
Н-В-Н	$49,52$	$4,65$	$51,0$	23/135
Н-Н-Н	$0,57$	$0,45$	$0,58$	22/135

$\langle t_{\Phi_1}/t_\Phi \rangle$ – среднее отношение времени t_{Φ_1} проверки формулы Φ_1 ко времени проверки формулы Φ. $\langle t_{\Phi_2}/t_\Phi \rangle$ – аналогичное отношение для формулы Φ_2. Значение R отражает на сколько быстрее ($R < 1$) или медленнее ($R > 1$) удается проверить выполнимость исходной формулы с использованием метода разделения дизъюнктов. Причем в каждом случае мы рассматриваем худший вариант (если только одна из подформул невыполнима, то предполагается что для анализа сначала была выбрана невыполнимая формула, и т.д.). Например для случая когда формулы Φ, Φ_1 и Φ_2 выполнимы, то значение R вычисляется по формуле $R = \frac{t_\Phi + t_{\Phi_1} + t_{\Phi_2}}{t_\Phi}$.

По данным экспериментам можно сделать вывод, что чаще всего встречаются случаи когда формулы Φ_1 и Φ_2 – выполнимы, а значит необходимо прибегать к проверке исходной формулы. Во всех случаях, кроме случая, когда все три формулы невыполнимы, метод разделения дизъюнктов не даёт выигрыша.

Причиной сложившейся ситуацией может быть как и недостатки предложенного нами метода разделения дизъюнктов, так и особенностями генерируемых КБФ или SAT-solver'a sKizzo. Данный вопрос требует дополнительных исследований.

1. Balabanov V., Jie-Hong R. Jiang Resolution Proofs and Skolem Functions in QBF Evaluation and Applications // Proceedings of the 23rd international conference on Computer aided verification / Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2011. – P. 149–164.
2. Зюзьков, В. М. Математическое введение в декларативное программирование// Учебное пособие. – ТУСУР, 2003. – 83 с.
3. Чень Ч., Ли Р. Глава 5. Метод резолюций // Математическая логика и автоматическое доказательство теорем – М.: «Наука», 1983. – 315 с.
4. Шатилов, Н. П., Громов, М. Л. // Изв. Вузов. Физика. – 2012. – № 9/2. – С. 321–322.
5. QDIMACS standard [Electronic resource] – Mode of access: http://www.qbflib.org/qdimacs.html. – Date of access: 14.02.2013.
6. sKizzo [Electronic resource] – Mode of access: http://skizzo.info. – Date of access: 28.02.2013.