ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПУАССОНОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Муха В. С., Прищепчик М. В.
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекторoники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: mukha@bsuir.by, prishchepchikmv@tut.by

Представлена математическая модель скалярного случайного поля, порожденного Пуассоновским случайным процессом. Разработан математический аппарат, позволяющий выполнять вероятностный анализ данного поля. Рассматривается пример моделирования с графической иллюстрацией его результатов.

Введение

При исследованиях пространственных систем массового обслуживания возникает потребность в рассмотрении Пуассоновского случайного поля. В литературе известно определение точечного Пуассоновского случайного поля [1]: это случайное поле, у которого числа точек в любом наборе непересекающихся измеримых множеств являются взаимно независимыми случайными величинами, распределенными по закону Пуассона:

$$P(\xi(B_i)=k)=\frac{\Lambda(B_i)^k}{k!}exp(-\Lambda(B_i)), \qquad (1)$$

где $P(\xi(B_i)=k)$ – вероятность того, что в множестве B_i окажется k точек, $\Lambda(B_i)=E(B_i)$, E – символ математического ожидания. Реализация такого случайного поля может описывать, например, позиции видимых звезд на участке звездного неба [2]. Более содержательная по сравнению с (1) математическая модель Пуассоновского случайного поля, содержащая направление развития поля по пространственно-временному аргументу, представлена в работе [3]. В настоящей работе выполняется анализ ее вероятностных характеристик.

I. Пуассоновское случайное поле

В [3] скалярное случайное поле определено с помощью скалярной случайной функции скалярной переменной $\xi(t)\in S=\{s_1,s_2,...\}$, в которой принято, что $t=\phi(z)$, где $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in Z\subseteq R^n$, $\phi(z)$ – неотрицательная и неубывающей по каждой переменной z_i функция. Одной из скалярных переменных z_i в этом определении может быть время, остальные рассматриваются как пространственные переменные. Значение $z_2=(z_{1,2},z_{2,2},...,z_{n,2})$ аргумента $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ называется «следующим» по отношению к значению $z_1=(z_{1,1},z_{2,1},...,z_{n,1})$, если $\tau=\phi(z_2-z_1)$ неотрицательно, т. е. если $\tau=\phi(z_2-z_1)\geq 0$, то $z_2\geq z_1$. Аргумент $t=\phi(z)$ называется обобщенным временем, функция $\phi(z)$ – порождающей функцией, $\tau=\phi(z_2-z_1)$ – интервалом обобщенного времени, $\tau_i=\phi(z_{1,1},...,z_{i,2}-z_{i,1},...,z_{n,1})$ – интервалом по i-му аргументу, $i=\overline{1,n}$. Определенное таким образом случайное поле названо в [3] скалярным случайным полем, порожденным скалярным случайным процессом $\xi(t)$ и обозначено как $\xi(z)\in S$, $z\in Z\subseteq R^n$.

Предположим, что порождающий случайный процесс $\xi(t)$ Пуассоновский с параметром λ. Приращение η пуассоновского случайного процесса $\xi(t)$ за время τ распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau$:

$$p_{i,i+k}(\tau)=P(\eta=k/\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}, \qquad (2)$$

где $p_{i,i+k}(\tau)$ – вероятность перехода случайного процесса $\xi(t)$ из состояния s_i в состояние s_{i+k} за время τ, $i=1,2,...,k=0,1,2,....$ Состояние s_i будем отождествлять с целочисленным значением $i-1$, т.е. $s_i=i-1$. Относительно порожденного таким образом случайного поля справедлива уточненная по сравнению с [3] теорема:

Теорема 2 *Пусть* $\xi(z)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in Z\subseteq R^n$, *– скалярное случайное поле, порожденное пуассоновским случайным процессом* $\xi(t)$ *с параметром* λ *и неотрицательной неубывающей по каждому аргументу* $z_1,z_2,...,z_n$ *функцией* $t=\phi(z)$. *Приращения* $\eta_i=\xi(z_{1,1},...,z_{i,2}-z_{i,1},...,z_{n,1})$ *по каждой координате* z_i *распределены по закону Пуассона*

$$P(\eta_i=k/\tau_i)=\frac{(\lambda c_i\tau_i)^k}{k!}e^{-\lambda c_i\tau_i},$$
$$i=\overline{1,n},k=0,1,2,...,$$

тогда и только тогда, когда порождающая функция $t=\phi(z)=\phi(z_1,z_2,...,z_n)$ *имеет вид*

$$t=\phi(z)=\sum_{i=1}^{n}c_iz_i, \qquad (3)$$

где c_i *– некоторые неотрицательные константы. Приращение* $\eta=\xi(z_2-z_1)$ *случайного поля за обобщенное время* $\tau=\phi(z_2-z_1)$ *распределено по закону Пуассона (2) с* $\tau=\sum_{i=1}^{n}c_i\tau_i$, $\tau_i=z_{i,2}-z_{i,1}$.

Замечание. Определенная в данной теореме математическая модель Пуассоновского случайного поля является более общей по сравнению с классической моделью (1), так как включает ее в случае, когда порождающая функция $\phi(z)$ является случайной.

На рисунке 1 представлен пример множества реализаций кривых точек роста Пуассоновского случайного поля, определенного на плоскости.

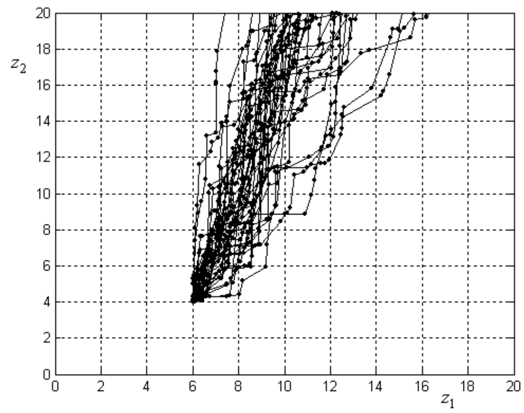

Рис. 1 – Реализации кривых точек роста Пуассоновского случайного поля

II. Вероятностный анализ Пуассоновского случайного поля

Теорема позволяет выполнить все вероятностные расчеты, относящиеся к Пуассоновскому случайному полю. Для этого необходимо воспользоваться теорией Пуассоновских случайных процессов. В частности, вектор-строка безусловных вероятностей состояний $A(t) = (a_i(t))$, $i = 1, 2, ...,$ Пуассоновского случайного процесса $\xi(t)$ для произвольного момента времени t определяется выражением

$$A(t) = A(t_0)P(t - t_0), \qquad (4)$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени, $P(t - t_0) = (p_{i,j}(t - t_0))$, $i, j = 1, 2, ...,$ – матрица вероятностей перехода процесса за время $t - t_0$. Элементы $p_{i,j}(t - t_0)$ матрицы $P(t - t_0)$ определяются формулой

$$p_{i,j}(t - t_0) = P(\eta = j - i/t - t_0) = \\ = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\lambda(t-t_0))^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-t_0)}, & j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{array} \right\}, \qquad (5)$$

Подстановка (5) в (4) дает следующее выражение для безусловной вероятности состояния $s_j = j-1$ пуассоновского случайного процесса $\xi(t)$:

$$a_j(t) = P(\xi(t) = s_j) = \\ = \sum_{i=1}^{j} a_i(t_0)\frac{(\lambda(t - t_0))^{j-i}}{(j - i)!}e^{-\lambda(t-t_0)}, j = 1, 2, ... \qquad (6)$$

Формулу расчета безусловных вероятностей $a_j(z)$ состояний $s_j = j - 1$ в обобщенный момент времени $t = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$ для пуассоновского случайного поля с начальным обобщенным моментом времени $t_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i z_{i,0}$ получим, полагая в (6) $t = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k$, $t_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k z_{k,0}$:

$$a_j(z) = P(\xi(z) = s_j) = \\ = \sum_{i=1}^{j} a_i(z_0)\frac{(\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k(z_k - z_{k,0}))^{j-i}}{(j - i)!}\cdot \\ \cdot e^{-\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k(z_k - z_{k.0})}, j = 1, 2, ..., \qquad (7)$$

Выражение (7) определяет вероятность того, что в гиперпрямоугольной области $[z_{1,0}, z_1] \times [z_{2,0}, z_2] \times \cdots \times [z_{n,0}, z_n] \subseteq Z$ пространственно-временного континуума Z будет находиться ровно $j - 1$ точек роста случайного поля (событий). Вероятность того, что в указанной области будет находиться от s_l до s_{l+m} точек роста, определяется выражением:

$$P(s_l \leq \xi(z) \leq s_{l+m}) = \sum_{j=l}^{l+m} a_j(z).$$

На рисунке 2 представлен пример поверхности вероятности фиксированного состояния $s_{15} = 14$ Пуассоновского случайного поля, построенной по формуле (7) при $j = 15$. Видно, что вероятнее всего данное фиксированное состояние (14 точек) будет наблюдаться в прямоугольных областях, ограниченных началом координат и точками на прямой, изображенной на рисунке.

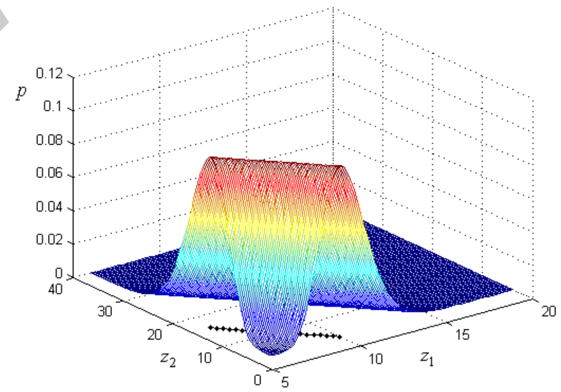

Рис. 2 – Поверхность вероятности фиксированного состояния Пуассоновского случайного поля

III. Список литературы

1. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 1999.
2. Федосеев В. И. Пуассоновская модель звездного неба и задача обнаружения звезд оптико-электронным прибором // Оптический журнал. 2011. № 2. С. 61–64.
3. Mukha V.S., Prishchepchik M.V. Modeling of spatial queues system // Computer Data Analysis and Modeling. Theoretical and applied stochastics. Proceedings of the tenth international conference (Minsk, September 10–14, 2013). V. 1. Minsk: Publishing center of BSU, 2013. P. 214–217.
4. Муха В.С. Случайное поле, порожденное винеровским процессом // Автоматика и телемеханика. 2005. № 6. С. 170–174.