

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

**В. Б. Кирильчук, Д. В. Лихачевский**

***ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВЧ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ***

В 2-х частях

Часть 1

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники в качестве  
учебно-методического пособия для студентов учреждений,  
обеспечивающих получение высшего образования  
по специальностям радиотехнического профиля*

Минск БГУИР 2011

УДК 621.3.049.77+537.87(075.8)

ББК 32.86-01я73

К-43

**Р е ц е н з е н т ы:**

главный научный сотрудник научно-исследовательского учреждения  
«Институт ядерных проблем БГУ», доктор физико-математических наук  
Г. Я. Слепян;

заведующий кафедрой радиосвязи и радиовещания учреждения  
образования «Высший государственный колледж связи»,  
кандидат технических наук, доцент  
А. И. Корзун

**Кирильчук, В. Б.**

К-43

Основы проектирования СВЧ интегральных схем. В 2 ч. Ч. 1: Основы теории электромагнитного поля : учеб.-метод. пособие / В. Б. Кирильчук, Д. В. Лихачевский. – Минск : БГУИР, 2011. – 187 с. : ил.

ISBN 978-985-488-521-6 (ч. 1).

В первой части пособия излагаются основы теории электромагнетизма, рассматриваются электродинамические процессы взаимодействия поля с веществом в однородных изотропных и биизотропных средах, приводятся основные характеристики и свойства современных материалов, выполненных на основе высокотемпературных сверхпроводников и киральных структур. На примере ступенчато-неоднородных сред, включая киральные, излагаются законы отражения и преломления электромагнитных волн. Описываются вопросы излучения элементарных источников и однородных апертур в ближней и дальней зонах. Приводятся основные сведения из области классической теории дифракции на отверстиях в непрозрачном экране в зонах Фраунгофера и Френеля.

Для студентов, магистрантов и аспирантов специальностей радиотехнического профиля.

**УДК 621.3.049.77+537.87(075.8)**  
**ББК 32.86-01я73**

**ISBN 978-985-488-521-6 (ч. 1)**

**ISBN 978-985-488-520-9**

© Кирильчук В. Б., Лихачевский Д. В., 2011

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2011

## Содержание

Введение .....	6
1. Материальные уравнения и свойства физических сред .....	6
1.1. Основные понятия и определения .....	8
1.2. Уравнение непрерывности .....	9
1.3. Свойства материальных сред .....	10
1.3.1. Поляризация и намагничивание .....	10
1.3.2. Электродинамическая характеристика сред .....	12
1.3.3. Электрические свойства материальных сред .....	20
1.3.3.1. Модели материалов .....	20
1.3.3.2. Диэлектрики .....	21
1.3.3.3. Проводники .....	23
1.3.3.4. Реальные диэлектрики .....	26
1.3.3.5. Плазма .....	28
1.3.3.6. Сверхпроводящие материалы .....	29
1.3.3.6.1. Критическое магнитное поле. Критический ток .....	29
1.3.3.6.2. Сверхпроводники первого, второго и третьего родов .....	31
1.3.3.6.3. Высокотемпературные сверхпроводники .....	32
1.3.4. Магнитные свойства материалов .....	33
1.3.4.1. Модель магнитного упорядочения в твердом теле .....	33
1.3.4.2. Классификация материалов по магнитным свойствам .....	37
1.3.4.3. Спиральные и периодические магнитные структуры .....	45
1.3.4.4. Комплексная магнитная проницаемость .....	47
1.3.4.5. Электрические свойства магнитных материалов .....	49
2. Уравнения электродинамики .....	50
2.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме .....	50
2.2. Уравнения Максвелла в интегральной форме .....	51
2.3. Граничные условия для векторов поля .....	52
2.3.1. Тангенциальные составляющие поля .....	52
2.3.2. Нормальные составляющие поля .....	53
2.3.3. Система граничных условий на проводящей поверхности .....	54
2.4. Энергия и мощность электромагнитного поля .....	55
2.4.1. Удельная мощность сторонних источников поля .....	55
2.4.2. Баланс энергии электромагнитного поля .....	56
2.5. Волновые уравнения .....	58
2.6. Электродинамические потенциалы .....	59
2.7. Вектор Герца .....	61
2.8. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла .....	63
2.9. Уравнения электродинамики для монохроматического поля .....	65
2.9.1. Уравнения Максвелла в комплексной форме .....	65
2.9.2. Волновые уравнения в комплексной форме .....	66
2.9.3. Теоремы об активной и реактивной мощности .....	68
2.10. Решения уравнений электродинамики в комплексной форме .....	69

2.10.1. Единственность решений уравнений Максвелла .....	69
2.10.2. Лемма Лоренца и принцип взаимности .....	71
2.10.3. Простейшее решение уравнений электродинамики .....	71
3. Электромагнитные волны в однородных средах .....	73
3.1. Виды электромагнитных волн .....	73
3.2. Поляризация плоских волн .....	75
3.3. Разные оценки скорости электромагнитных волн .....	78
3.4. Плоская электромагнитная волна в однородной среде .....	80
3.4.1. Распространение электромагнитных волн в среде без потерь .....	80
3.4.2. Распространение электромагнитных волн в среде с потерями .....	80
3.5. Электромагнитные волны в сверхпроводниках .....	84
3.5.1. Глубина проникновения поля в сверхпроводниках .....	84
3.5.2. Поверхностный импеданс сверхпроводников .....	85
3.6. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах .....	89
3.6.1. Сущность анизотропии .....	89
3.6.2. Тензор проницаемости .....	91
3.6.3. Особенности распространения волн в анизотропных средах .....	93
3.7. Распространение электромагнитных волн в однородной киральной среде .....	102
3.7.1. Особенности распространения волн в киральной среде .....	102
3.7.2. Поляризационные эффекты в киральной среде .....	105
3.7.3. Линейный и круговой дихроизмы .....	107
4. Отражение и дифракция электромагнитных волн .....	109
4.1. Приближенные методы решения дифракционных задач .....	109
4.2. Законы отражения и преломления волн .....	110
4.2.1. Критерий Релея .....	110
4.2.2. Наклонное падение волны на границу раздела двух сред .....	111
4.2.3. Коэффициенты отражения и прохождения .....	114
4.2.3.1. Горизонтальная поляризация .....	114
4.2.3.2. Вертикальная поляризация .....	115
4.2.3.3. Коэффициенты Френеля на границе раздела немагнитных сред .....	117
4.3. Полное прохождение волны через границу раздела .....	118
4.4. Полное внутреннее отражение .....	124
4.5. Сложные волны .....	130
4.6. Отражение в средах с двойным лучепреломлением .....	135
4.6.1. Характеристики поля при наклонном падении плоской волны на границу раздела сред с двойным лучепреломлением .....	135
4.6.2. Угол Брюстера и критический угол в среде с двойным лучепреломлением .....	139
4.7. Излучение и дифракция электромагнитных волн .....	142
4.7.1. Зоны электромагнитного поля .....	142
4.7.1.1. Дальняя зона излучения (зона Фраунгофера) .....	142

4.7.1.2. Ближняя зона излучения (зона Френеля) .....	145
4.7.1.3. Реактивная ближняя зона .....	146
4.7.2. Поле излучения элементарного электрического вибратора .....	147
4.7.3. Мощность и сопротивление излучения электрического диполя .....	149
4.7.4. Поле диполя в ближней зоне .....	151
4.7.5. Поле в промежуточной зоне диполя .....	151
4.7.6. Дальняя зона электрического диполя .....	152
4.8. Излучение апертур .....	153
4.8.1. Принцип эквивалентности поля .....	153
4.8.2. Поля излучения электрического и магнитного токов .....	156
4.8.3. Функция направленности апертуры .....	157
4.8.4. Источник Гюйгенса .....	160
4.8.5. Функция направленности и эффективная поверхность апертуры .....	161
4.8.6. Функции направленности однородных апертур .....	164
4.8.6.1. Дифракционный множитель прямоугольной апертуры .....	165
4.8.6.2. Дифракционный множитель круглой апертуры .....	169
4.9. Дифракция Френеля .....	172
4.9.1. Дифракция на прямоугольной апертуре .....	172
4.9.2. Дифракция на полуплоскости .....	178
4.9.3. Зоны Френеля .....	180
Литература .....	185

## ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в области информационных технологий неразрывно связан с разработкой и внедрением высокоскоростных систем передачи и обработки информации, обладающих высокой надежностью, малыми весогабаритными параметрами и приемлемой стоимостью. По оценкам разных специалистов в ближайшем будущем скорости информационных потоков (СИП) в устройствах обработки и преобразования информации (УОПИ) могут достигнуть величины порядка  $10^{12} \dots 10^{15}$  бит/с. Значительное увеличение СИП в трактах обработки и преобразования информации, с одной стороны, обуславливает необходимость непрерывного продвижения в область сверхвысоких (СВЧ) и крайне высоких частот (КВЧ), а с другой, повышение надежности, уменьшение весогабаритных параметров УОПИ ориентируются на использование в них методов и средств интегральной электроники. Очевидно, что техническая реализация УОПИ с такими требованиями возможна только с использованием технологий гибридных и монокристаллических интегральных схем (ИС), в которых базовые элементы (БЭ), составляющие структуру микроэлектронного узла, неразрывно связаны в плоскости подложки конструктивно, технологически и электрически.

Интегральная схема СВЧ обычно состоит из корпуса, в котором размещена диэлектрическая подложка. Диэлектрическая подложка может быть многослойной, причем каждый слой характеризуется определенными магнитными и диэлектрическими свойствами. В пределах каждого слоя обычно располагаются пассивные элементы схемы (отрезки различных типов микрополосковых линий передачи, мосты, частотные фильтры, фильтры типов волн, фазовращатели и т. д.). Активные компоненты ИС (диоды, транзисторы), как правило, располагаются на внешних слоях подложки и связаны с другими слоями либо гальванически, либо с помощью электромагнитных связей.

Элементная база современной микроэлектроники, построенная на основе гибридной и монокристаллической технологий, имеет фундаментальные ограничения, связанные не столько с физическими свойствами каждого базового элемента, сколько собственно с природой электромагнитного поля (ЭМП). В частности, при объединении БЭ в УОПИ и интегральные системы на первый план выдвигается требование эффективной передачи энергии между базовыми элементами с минимальными потерями и искажениями сигналов в заданной полосе частот. Выполнить данное требование возможно только при наличии конечного физического объема, связанного с параметрами высокочастотного ЭМП.

Переход к интегральной технологии ИС СВЧ- и КВЧ-диапазонов прежде всего предполагает разработку и реализацию новых принципов проектирования радиоэлектронной аппаратуры (РЭА). При проектировании микроэлектронного узла СВЧ, строго говоря, необходимо решать граничную задачу электродинамики. Однако даже для регулярных микрополосковых линий, не говоря уже о сложных СВЧ-узлах, граничные поверхности имеют сложную форму и волновые уравнения разрешить не удастся. Отсюда вытекают требования создания

приближенных теорий различных степеней приближения. К настоящему времени строгой теории ни одного микрополоскового устройства не существует, а приближенные теории всегда нуждаются в экспериментальной проверке. Поэтому микроэлектронные СВЧ-устройства приходится испытывать и настраивать экспериментально. Этот фактор обуславливает увеличение затрат на разработку и изготовление ИС СВЧ, а следовательно, повышает их стоимость и сдерживает серийное производство таких устройств.

В связи с этим на первый план выдвинулась необходимость автоматизированного проектирования РЭА и, в частности, ИС СВЧ с использованием ЭВМ. Переход к автоматизированному проектированию РЭА потребовал создания адекватных моделей БЭ, которые должны удовлетворять требованию соответствия модели реальным БЭ. На ранних этапах развития проектирования удовлетворительной считалась точность 10...20 %, что в значительной степени определялось возможностью механической подстройки некоторых элементов РЭА и подгонки их под необходимые параметры после изготовления устройства. В ИС СВЧ механическая подстройка не возможна (за исключением, может быть, некоторых активных элементов, расположенных, как правило, на внешних поверхностях подложки). В связи с этим обстоятельством резко повышаются требования к точности модели БЭ, которые возросли на несколько порядков. Последнее обстоятельство обуславливает необходимость перехода при проектировании БЭ к моделям на электродинамическом уровне строгости. В особенности это сказывается на БЭ, предназначенных для РЭА в высокочастотной части сантиметрового диапазона и более коротковолновых участках электромагнитного спектра. Для более точного описания модели необходимо использование эффективных вычислительных алгоритмов, а их создание в свою очередь требует глубокого знания физической сущности электромагнитных явлений в ограниченных средах. Только на основе четкой физической картины явления можно построить достаточно эффективный вычислительный алгоритм, обеспечивающий ускорение разработки ИС СВЧ, и добиться снижения ее стоимости. При проектировании микроэлектронной аппаратуры СВЧ-диапазона редко удается разделить электрический расчет схемы, разработку конструкции и даже технологию изготовления. Как правило, это единый процесс.

Таким образом, характерной чертой современного этапа развития радиоэлектроники и, в частности, микроэлектроники является разработка микроэлектронных устройств СВЧ- и КВЧ-диапазонов с использованием систем автоматизированного проектирования, в основу которых положен принцип электродинамического моделирования.

Поэтому целью первой части учебного пособия является прежде всего изложение основ теории ЭМП, знание которых необходимо для корректного электродинамического расчета микроволновых линий передачи, а также СВЧ-узлов БЭ, составляющих элементную базу в конструкциях ИС СВЧ- и КВЧ-диапазонов.

# 1. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКИХ СРЕД

## 1.1. Основные понятия и определения

Основными понятиями современной классической теории электромагнетизма являются понятие **электрического заряда**  $q$  и понятие **электромагнитного поля** (ЭМП). Электрические заряды (движущиеся и неподвижные) формируют в пространстве электромагнитное поле, которое проявляется в силовом воздействии на материальные тела, обладающие электрическим зарядом.

Электрический заряд  $q$  является скалярной величиной и может иметь положительное или отрицательное значение. Величина электрического заряда является инвариантом относительно преобразований Лоренца: во всех инерциальных системах отсчета эта величина одинакова (масса тела этим свойством не обладает).

В некоторых физических явлениях приходится учитывать «квантованность» электрического заряда, т. е. учитывать, что электрический заряд тела состоит из конечного числа мельчайших элементарных зарядов. Элементарный заряд численно равняется заряду электрона или позитрона:  $q = \pm 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Макроскопической мерой заряда материальных тел являются объемная плотность электрического заряда  $\rho$  [Кл/м<sup>3</sup>] и поверхностная плотность заряда  $\rho_S$  [Кл/м<sup>2</sup>]. Движущиеся заряды в классической электродинамике принято характеризовать с помощью векторов плотности тока электрической проводимости  $\vec{j}$  [А/м<sup>3</sup>] и плотности поверхностного тока  $\vec{j}_S$  [А/м<sup>2</sup>].

Электромагнитное поле существует как объективная реальность и обладает такими атрибутами, как масса, импульс и энергия. Электромагнитное поле может превращаться в вещество – рождение электронно-позитронных пар – и может порождаться веществом – аннигиляция электронно-позитронной пары.

Силовое воздействие ЭМП на заряд в каждой точке пространства и в произвольный момент времени характеризуется с помощью четырех векторов:

$\vec{E}(x,y,z,t)$  – вектор напряженности электрического поля [В/м];

$\vec{D}(x,y,z,t)$  – вектор электрического смещения (индукции) [Кл/м<sup>2</sup>];

$\vec{B}(x,y,z,t)$  – вектор индукции магнитного поля [Тл = Вб/м<sup>2</sup>];

$\vec{H}(x,y,z,t)$  – вектор напряженности магнитного поля [А/м],

которые являются силовыми характеристиками ЭМП.

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и магнитную индукцию  $\vec{B}$  можно считать основными величинами, так как они позволяют вычислить силу  $\vec{F}$ , действующую на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в ЭМП заряд  $q$ . Величина этой силы, называемой обобщенной силой Лоренца, определяется выражением

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1)$$

В соотношении (1.1) подразумевается, что величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  вычисляются для фиксированного момента времени  $t$  в точке расположения электрического заряда  $q$ . При этом напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B}$  представляют собой составляющие ЭМП, внешнего по отношению к заряду  $q$ . Смысл сказанного состоит в том, что электромагнитное поле, создаваемое самим зарядом  $q$ , на заряд  $q$  не действует.

Из соотношения (1.1) следует, что напряженность электрического поля  $\vec{E}$  – это та часть (составляющая) ЭМП, которая связана с местонахождением заряда, в то время как индукция магнитного поля  $\vec{B}$  связана со скоростью движения электрического заряда.

Таким образом, пространственные и временные изменения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  должны быть согласованы между собой, должны учитывать распределение и движение электрических зарядов, а также учитывать электромагнитные свойства среды, в которой рассматривается описываемое явление.

## 1.2. Уравнение непрерывности

В современной теории электромагнетизма полагается, что сумма электрических зарядов (положительных и отрицательных) в мировом пространстве постоянна.

Заряды не возникают и не исчезают (т. е. могут возникать или исчезать одновременно равные количества положительных и отрицательных зарядов, например, при ионизации, рекомбинации, аннигиляции и т. д.). Причиной изменения величины заряда в данном объеме  $V$  является перемещение зарядов, т. е. электрический ток, протекающий через ограничивающую этот объем поверхность  $S$ :

$$\frac{dq}{dt} = -I.$$

Выразим  $q$  и  $I$  через удельные величины  $\rho, \vec{j}$ :

$$q = \int_V \rho dV, I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$$

и представим ток в виде тождества

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (1.2)$$

На основании теоремы Остроградского–Гаусса (1.2) преобразуем к виду

$$\int_V \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Для любого конечного объема  $V$  последнее равенство возможно только при выполнении условия

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) называется уравнением непрерывности и выражает закон сохранения заряда.

### 1.3. Свойства материальных сред

#### 1.3.1. Поляризация и намагничивание

Любая физическая среда содержит связанные (или свободные) заряды, а также элементарные замкнутые токи, образующие магнитные диполи. В обычном состоянии вещество не создает вокруг себя наблюдаемого поля (исключения составляют постоянные магниты и электреты). Это объясняется уравновешенностью зарядов внутри его структуры. Под воздействием внешнего электрического поля  $\vec{E}$  в среде происходит деформация атомов и молекул вещества, проявляющаяся в смещение связанных зарядов, или переориентация электрических диполей элементарных частиц. В результате отклонения заряженных частиц внутри вещества появляется область некомпенсированного внутреннего поля, которое, налагаясь на внешнее, изменяет его. Такой процесс получил название **поляризации вещества**. Численной характеристикой поляризации вещества является вектор электрической поляризации  $\vec{P}$ . Этот вектор в общем случае неколлинеарен  $\vec{E}$  и определяется как удельный электрический момент в среде:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_i \vec{p}_i / \Delta V \right) = \chi_{\text{Э}} \vec{E} , \quad (1.4)$$

где  $p_i$  – электрические моменты в элементе объема;  $\chi_{\text{Э}}$  – электрическая восприимчивость вещества.

В соответствии с типом создаваемого дипольного момента поляризацию  $\vec{P}$  можно представить в виде суммы четырех составляющих, каждой из которых присущ свой механизм возникновения:  $\vec{P} = \vec{P}_{\text{Э}} + \vec{P}_{\text{И}} + \vec{P}_{\text{О}} + \vec{P}_{\text{М}}$ . Электронная поляризация  $\vec{P}_{\text{Э}}$  возникает в атомах в результате смещения электронного облака относительно положительно заряженных ядер. Ионная поляризация  $\vec{P}_{\text{И}}$  возникает в связи со смещениями противоположно заряженных ионов из своих положений при воздействии электрического поля. Если диэлектрик содержит постоянные диполи, которые в нормальном состоянии беспорядочно ориентированы, а под действием поля приобретают преимущественную ориентацию, то возникает ориентационная поляризация  $\vec{P}_{\text{О}}$ . Четвертая составляющая – миграционная поляризация  $\vec{P}_{\text{М}}$  – является результатом накопления электрического заряда в местах неоднородностей диэлектрика с низким удельным сопротивлением. Во всех перечисленных случаях диэлектрик в целом оказывается поляризованным, причем чем больше напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , тем больше поляризация вещества.

Под действием магнитного поля  $\vec{H}$  возникает преимущественная ориентация магнитных диполей, т. е. происходит намагничивание среды, характеризующееся вектором намагничивания:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_i \vec{M}_i / \Delta V \right) = \chi_M \vec{H}, \quad (1.5)$$

где  $\vec{M}_i$  – магнитные моменты в элементе объема;  $\chi_M$  – магнитная восприимчивость вещества.

В вакууме векторы электрической и магнитной индукций имеют простую связь с напряженностями ЭМП:

$$\begin{aligned} \vec{D}_0 &= \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B}_0 &= \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  [Ф/м] – электрическая постоянная вакуума;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [Гн/м] – магнитная постоянная вакуума.

В реальных средах, где имеют место явления поляризации и намагничивания, индукции связаны с векторами поляризации и намагничивания:

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P}, \quad (1.7)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{M}. \quad (1.8)$$

Для сред, в которых процессы поляризации и намагничивания можно считать независимыми ( $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$  и  $\vec{M} = \vec{M}(H)$ ), векторы электрической поляризации и намагничивания представим в виде

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (1.9)$$

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad (1.10)$$

где  $\chi_e$  и  $\chi_m$  – диэлектрическая и магнитная восприимчивости среды соответственно.

Подставим (1.9) и (1.10) в (1.7) и (1.8) соответственно и с учетом (1.6) выражения (1.7) и (1.8) представим в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \chi_e) = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (1.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m) = \mu_a \vec{H}, \quad (1.12)$$

где  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$  [Ф/м] – диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu_a = \mu_0 \mu$  [Гн/м] – абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\varepsilon = (1 + \chi_e)$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu = (1 + \chi_m)$  – относительная магнитная проницаемость среды.

Соотношения вида (1.11) и (1.12) получили название материальных уравнений электродинамики.

### 1.3.2. Электродинамическая характеристика сред

В реальных условиях параметры  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$  и  $\mu_a = \mu_0 \mu$ , входящие в материальные уравнения электродинамики (1.11) и (1.12), зависят как от амплитудных, так и от пространственных и частотно-временных характеристик электромагнитного поля:

$$\vec{D}(r, \omega, t) = \varepsilon_a(r, \omega, t) \vec{E}(r, \omega, t), \quad (1.13)$$

$$\vec{B}(r, \omega, t) = \mu_a(r, \omega, t) \vec{H}(r, \omega, t), \quad (1.14)$$

где  $r, \omega, t$  – пространственная, частотная и временная зависимости соответственно.

Среда называется **линейной**, если зависимости  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ ,  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ ,  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$  имеют линейный характер. Если эта зависимость является нелинейной, то среда называется **нелинейной**. Например, в электрически нелинейной среде соотношение (1.13) может быть представлено в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_a(E) \vec{E}, \quad (1.15)$$

где  $\varepsilon_a(E) = \varepsilon_a + \varepsilon_{a2}E + \varepsilon_{a3}E^2 + \dots$ .

Положительные свойства нелинейности материалов широко используются в электрооптических приборах, например, в оптических фазовых модуляторах и устройствах управления поляризацией сигналов.

Нежелательные свойства нелинейности проявляются, например, в оптических волокнах, если передаваемая мощность сигнала превышает несколько милливольт. При этом нелинейность проявляется в виде гармоник сигнала основной частоты. Так, при воздействии на среду гармонического колебания вида  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$  уравнение (1.15) дает

$$\vec{D} = \varepsilon_a(E) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E} + \varepsilon_{a2} \vec{E}^2 + \varepsilon_{a3} \vec{E}^3 + \dots = \varepsilon_a \vec{E}_0 e^{j\omega t} + \varepsilon_{a2} \vec{E}_0^2 e^{j2\omega t} + \varepsilon_{a3} \vec{E}_0^3 e^{j3\omega t} + \dots,$$

т. е. в нелинейной среде генерируются гармоники колебания основной частоты  $\omega - 2\omega, 3\omega$  и т. д. В волоконно-оптических системах передачи с частотным разделением несущих частот проявляющаяся нелинейность может привести к перекрестным помехам в соседних каналах передачи данных.

Материалы с частотно зависимыми диэлектрической и (или) магнитной проницаемостями  $\varepsilon_a(\omega)$ ,  $\mu_a(\omega)$  называются **дисперсионными**.

В частотно-зависимой среде динамический отклик электрической индукции от воздействующего электрического поля может быть представлен в виде

$$\vec{D}(r, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon_a(t-t') \vec{E}(r, t') dt'. \quad (1.16)$$

В частотной области выражение (1.16) может быть представлено в мультипликативной форме:

$$\bar{D}(r, \omega) = \varepsilon_a(\omega) \bar{E}(r, \omega). \quad (1.17)$$

В действительности все материалы обладают дисперсией. Однако явные дисперсные свойства начинают проявляться с определенных частот.

Для примера можно указать статическое значение относительной диэлектрической проницаемости воды для постоянных полей  $\varepsilon(0) = 81$ . Для волн инфракрасного диапазона, соответствующих длине волны  $\lambda = 1,74$  мкм, значение комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega) = 1,74$ . Объяснение особенностей зависимости  $\varepsilon(\omega)$  воды от частоты исходит из представлений о воде, как о полярном диэлектрике, поляризация которого происходит вследствие поворота имеющих большую инерцию молекул воды под действием переменного электрического поля электромагнитной волны. Особенно сильная дисперсия резонансного характера отмечается для частот сантиметрового диапазона электромагнитных волн (длина волны  $\lambda \approx (1-10)$  см).

Сильную дисперсию имеет водяной пар в диапазоне миллиметровых волн ( $\lambda \approx 0,1$  мм). Как правило, сильная дисперсия в некотором диапазоне частот сопровождается значительными потерями энергии распространяющихся электромагнитных волн из-за резонансного характера взаимодействия электромагнитной волны с атомами и молекулами среды.

Для неполярных диэлектриков, таких, как воздух, бензол, водород, гелий, неон и другие инертные газы, сера, алмаз коэффициент преломления  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  определяется статическими значениями относительных диэлектрических и магнитных проницаемостей и остаётся справедливым вплоть до оптического диапазона электромагнитных волн (частота  $10^{14} \dots 10^{15}$  Гц).

Объяснение этого факта основано на том, что в неполярных диэлектриках поляризация происходит за счёт деформации электронной оболочки составляющих их атомов и молекул. Ввиду малой инерционности электронов векторы смещения и напряженности электрического поля колеблются практически в одной фазе вплоть до очень высоких частот электромагнитных волн, что и приводит к малой дисперсии неполярных диэлектриков.

Основным следствием материальной дисперсии при распространении импульса в частотно-зависимой среде является прогрессивное расширение импульса. Этот эффект ограничивает максимальную скорость передачи информации в цифровых системах передачи данных. Есть другие типы дисперсий, например, межмодовая дисперсия, при которой несколько типов мод (колебаний) могут распространиться одновременно, или волноводная дисперсия, которая определяется соотношением рабочей и критической длин волн в волноводе.

В природе существуют материалы, которые обладают как нелинейными, так и дисперсионными свойствами. Такие среды способны поддерживать определенные типы нелинейных волн, называемых *солитонами*. В таких материалах дисперсионное расширение импульсов полностью компенсируется нелинейностью. Поэтому при распространении сигналов в виде импульсов солитонов их форма сохраняется.

Если в рассматриваемом объеме диэлектрическая и магнитная проницаемости среды не зависят от координат, то она называется **однородной**. В противном случае, когда  $\epsilon_a(x, y, z) \neq \text{const}$ ,  $\mu_a(x, y, z) \neq \text{const}$ , среда является **неоднородной**.

Среда называется стационарной, если ее диэлектрическая и магнитная проницаемости не изменяются во времени. В нестационарных средах  $\epsilon_a(t) \neq \text{const}$ ,  $\mu_a(t) \neq \text{const}$ .

Среда называется **изотропной**, если ее параметры не зависят от направления векторов  $\vec{D} \parallel \vec{E}$ ,  $\vec{B} \parallel \vec{H}$ . Среда, параметры которых зависят от направления, являются **анизотропными**. Параметры таких сред описываются тензорами относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей:

$$\vec{\epsilon} = (1 + \vec{\chi}_e) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = (1 + \vec{\chi}_m) = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Несмотря на то, что в диэлектриках не имеется заранее заготовленных элементарных диполей отдельных частиц, электрическую поляризацию можно получить посредством упорядоченного расположения заряженных частиц противоположных знаков – **диполей**. Если в структуре диэлектрика имеются такие электрические диполи, обусловленные смещениями электронных оболочек или ионов друг относительно друга и, кроме того, если диполи ориентированы в одном направлении, то кристалл будет спонтанно поляризованным. Различают два типа спонтанно поляризованных диэлектриков: **пироэлектрики** и **сегнетоэлектрики**.

**Пироэлектрики** – это кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной электрической поляризацией во всей температурной области существования кристалла вплоть до температуры плавления. Электрические диполи всех элементарных ячеек кристалла ориентированы в одном направлении. Изменить это направление внешним полем невозможно без разрушения кристаллической структуры, поскольку асимметричное расположение ионов в элементарной ячейке, ответственное за спонтанную поляризацию, возникает в момент образования кристалла при его выращивании. По этой причине в пироэлектриках поляризация  $P$  линейно зависит от величины поля  $E$ , т. е. пироэлектрики являются линейными диэлектриками.

**Сегнетоэлектрики** – это подгруппа пироэлектриков с переключаемой внешним электрическим полем поляризацией.

В отличие от пироэлектриков в сегнетоэлектриках спонтанно поляризованное состояние существует в ограниченной области температур и исчезает при некоторой критической температуре, называемой точкой Кюри (см. подразд. 1.4). К характерным особенностям сегнетоэлектрика относится его фун-

даментальное свойство, заключающееся в том, что направление спонтанной поляризации в полярной фазе может быть изменено внешним электрическим полем. Поскольку восприимчивость сегнетоэлектриков зависит от величины поля  $E$ , то зависимость между  $P$  и  $E$  нелинейная и, значит, сегнетоэлектрики – это нелинейные диэлектрики. Заряды на металлизированных поверхностях сегнетоэлектриков и пьезоэлектриков, обусловленные спонтанной поляризацией, создают в окружающем пространстве внешнее электрическое поле – формально мы имеем электрический аналог постоянного магнита. Однако на этом аналогия заканчивается. Не говоря уж о разной природе спонтанно поляризованного и спонтанно намагниченного состояний, есть и другие различия. Внешнее электрическое поле, создаваемое полярными кристаллами, не может существовать сколь угодно долго, так как довольно быстро связанные заряды спонтанной поляризации на поверхности кристаллов оказываются скомпенсированными свободными зарядами, имеющимися в атмосфере или в объеме кристалла.

Направление, вдоль которого в кристалле возникает электрическая поляризация, называется **полярным направлением**, или **полярной осью**. По наличию или отсутствию в кристаллах полярных направлений все кристаллы можно разделить на три группы: **неполярные**, **полярные** и **полярно-нейтральные кристаллы**.

Дипольные кристаллы полярных и полярно-нейтральных классов могут иметь одну или несколько полярных осей и, следовательно, обладать особыми электрическими свойствами, поэтому их называют электрическими кристаллами. К электрическим кристаллам тесно примыкают также некоторые анизотропные диэлектрические некристаллические среды, которые имеют свойства, сходные со свойствами электрических кристаллов: это электреты, пьезокерамические материалы, пьезоэлектрические полимеры. Их можно объединить в одну общую группу: материалы с метастабильной электрической поляризацией.

Высокое значение относительной диэлектрической проницаемости этих материалов (100 – 20 000) делает их весьма подходящими для использования в конденсаторах. Чаще всего в качестве материала используют сегнетокерамику на основе  $\text{BaTiO}_3$  или  $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$ , так как она обладает малыми потерями и обеспечивает надежно воспроизводимые свойства.

Пьезоэлектрические свойства сегнетоэлектриков обуславливают возможность их применения для регистрации тепловых потоков в широком спектральном интервале: от области далекого инфракрасного до коротковолнового рентгеновского излучения. При поглощении лучистой энергии температура полярного материала повышается, вследствие чего изменяется спонтанная поляризация, т. е. происходит изменение заряда на гранях кристалла и, следовательно, напряжения, которое затем регистрируется электронной схемой. Отсюда ясно, что пьезоприемники позволяют измерять как интенсивность падающего на них излучения, так и весьма малые изменения температуры. Промышленные образцы пирометров на кристаллах триглицинсульфата характеризуются разрешающей способностью  $\sim 0,1^\circ\text{C}$  в диапазоне температур  $-20 \dots 2000^\circ\text{C}$  и позволяют

дистанционно измерять температуру объектов. Наиболее широко в промышленном масштабе производятся различные устройства, действие которых основано на прямом и обратном пьезоэффектах. Способность диэлектрика деформироваться под действием электрического поля (обратный пьезоэффект) используется, например, в различных звуковоспроизводящих устройствах, двигателях для лазерных проигрывателей, позиционерах для подстройки СВЧ-антенн и автоматического фокусирования в фотоаппаратах и др.

Большое значение начинают приобретать элементы и устройства, основанные на эффекте двойного преобразования: пьезоэлектрические фильтры, генераторы, трансформаторы, линии задержки, а также устройства на поверхностных акустических волнах (корреляторы, кодирующие и декодирующие устройства, волноводы, ответвители), медицинская диагностическая аппаратура и др. Электрооптические и акустооптические свойства ряда сегнетоэлектриков, например  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{LiTaO}_3$ ,  $\text{KD}_2\text{PO}_4$ , успешно используются для создания оптических модуляторов и дефлекторов лазерного излучения. В последние годы большое внимание уделяется различным гибридным структурам на основе сегнетоэлектриков.

В последнее время среди специалистов в области электродинамики возрос интерес к исследованию так называемых биизотропных сред, в которых имеют место более общие связи типа  $\vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$ ,  $\vec{B}(\vec{H}, \vec{E})$ . Понятие биизотропной среды возникло при моделировании электродинамических свойств (в основном) сред с пространственной дисперсией. Такие среды были известны ещё во второй половине XIX в. Они получили название *оптически активных сред*, так как проявляли свои свойства в оптическом диапазоне частот.

С точки зрения технического применения в диапазоне СВЧ к числу перспективных биизотропных сред относятся так называемые *киральные среды*. Кира, или хира ( $\chi\epsilon\rho$ ), по-гречески означает рука. Этот термин ввел в науку и дал ему определение известный английский ученый-физик Уильям Томсон (1824–1907), более известный как лорд Кельвин. Он определил киральность как свойство объекта не совпадать, не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях.

Среда, обладающая киральными свойствами в СВЧ-диапазоне, может быть только искусственной. Киральные элементы на СВЧ – это искусственные проводящие двух- или трехмерные микроэлементы зеркально асимметричной формы, размеры которых значительно меньше длины СВЧ-волны ( $d \ll \lambda$ ). «Киральная среда должна обладать пространственной дисперсией, поэтому зеркально асимметричные микроэлементы должны периодически размещаться на расстояниях, соизмеримых с длиной волны излучения ( $D \sim \lambda$ ). Таким образом, примером киральной среды может служить совокупность проводящих зеркально асимметричных элементов, хаотически ориентированных и равномерно распределенных в изотропной, в общем случае магнитоэлектрической среде.

В диапазоне СВЧ при создании и моделировании киральных сред чаще

всего используются проводящие проволочные спирали с право- и левовинтовыми закрутками или электромагнитные частицы (ЭМЧ) в виде буквы  $\Omega$ , залитые в диэлектрическую основу (рис. 1.1).

ЭМЧ в изотропном диэлектрическом материале могут располагаться равномерно и упорядоченно – *бианизотропная среда* (рис. 1.1, а) или стохастически – *биизотропная среда* (рис. 1.1, б.)

Рассмотрим пример киральной среды, образованной из спиральных элементов. Механизм образования киральной поляризации под действием внешнего магнитного поля  $\vec{H}$  иллюстрирует рис. 1.2. В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея переменное магнитное поле  $\vec{H}$  (рис. 1.2, а) индуцирует ЭДС  $\mathcal{E}_i$  в каждом из витков спиральки (рис. 1.2, б). В результате вдоль длины спиральки образуется электрическое поле  $\vec{E}_i$ , которое эквивалентно полю электрического диполя (рис. 1.2, в).

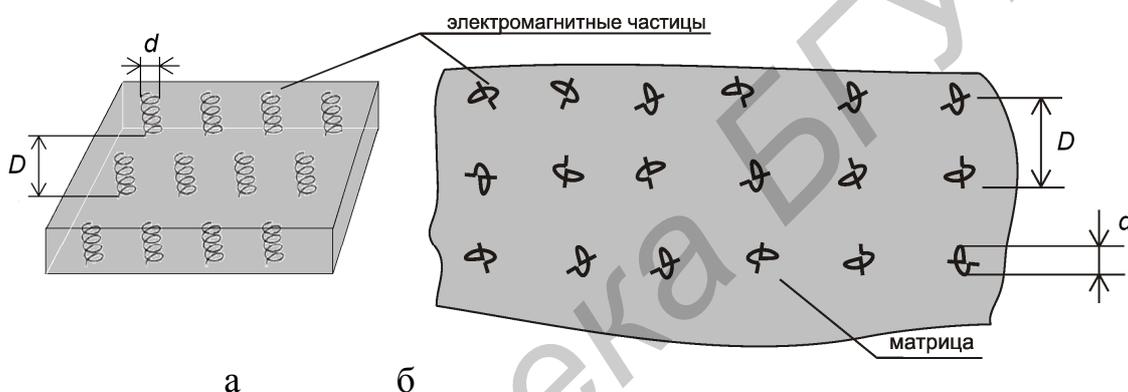


Рис. 1.1. Примеры структур киральной среды

Таким образом, за счет магнитного поля  $\vec{H}$  образуется элементарный диполь  $\vec{P}_i(\vec{H})$ . В результате возникает киральная составляющая вектора поляризации среды:

$$\vec{P}_k(\vec{H}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{P}_i(\vec{H}) / \Delta V \right).$$

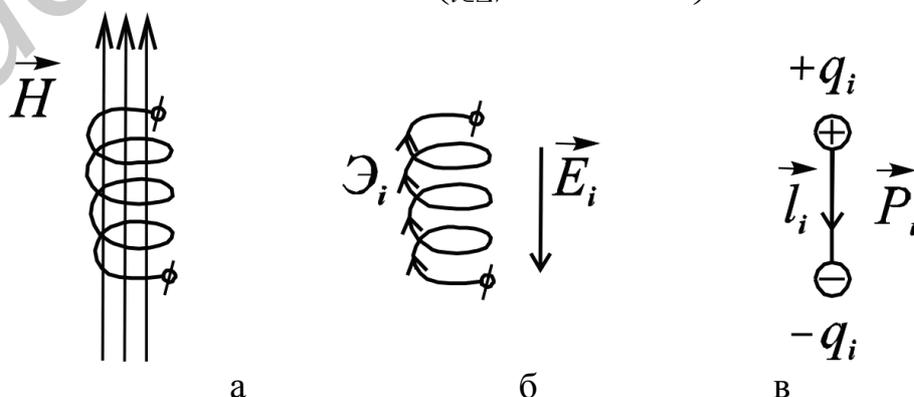


Рис. 1.2. Возбуждение  $\vec{E}$  при воздействии  $\vec{H}$

Рис.1.3 иллюстрирует процесс возникновения киральной намагниченности: за счет действия внешнего электрического поля  $\vec{E}$  (рис. 1.3, а) в проводящей спиральке возникают токи  $i_\phi$  (рис. 1.3, б), образующие вокруг спиральки магнитное поле  $\vec{H}_i$ , аналогичное полю магнитного диполя (рис. 1.3, в). В результате возникает магнитный момент  $\vec{M}_i$  (рис. 1.3, г). Следствием этого является образование киральной намагниченности:

$$\vec{M}_k(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{M}_i(\vec{E}) / \Delta V \right).$$

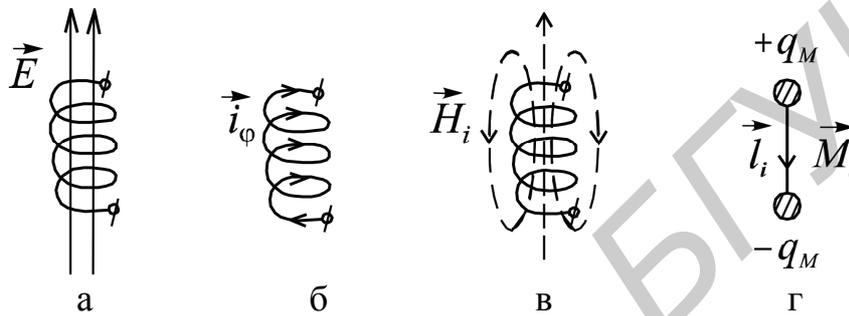


Рис. 1.3. Возбуждение  $\vec{H}$  при воздействии  $\vec{E}$

Таким образом, при распространении электромагнитной волны в киральной среде электрическое поле волны будет создавать не только электрический дипольный момент, но и магнитный, а магнитное поле падающей волны индуцирует как магнитный, так и электрический дипольные моменты. Это приводит к тому, что материальные уравнения для киральной среды связывают векторы электрической и магнитной индукций одновременно с напряженностями электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) + \vec{P}_k(\vec{H}), \\ \vec{B}(\vec{H}, \vec{E}) &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}(\vec{H}) + \vec{M}_k(\vec{E}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для киральной среды, представляющей собой одну из разновидностей биизотропных сред, материальные уравнения с учетом (1.11) и (1.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E} + (\kappa - j\chi) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H} + (\kappa - j\chi) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $\kappa$  и  $\chi$  – магнитоэлектрические параметры среды.

В зависимости от значений параметров  $\kappa$  и  $\chi$  биизотропные среды можно классифицировать в соответствии с табл. 1.1.

Таблица 1.1

Тип среды	Акиральная( $\chi = 0$ )	Киральная( $\chi \neq 0$ )
Взаимная( $\kappa = 0$ )	Обычная изотропная	Пастера
Невзаимная( $\kappa \neq 0$ )	Теллегена	Обобщенная биизотропная

Возросший в последнее время интерес к исследованию электромагнитных свойств киральных сред связан прежде всего с возможностью их применения в технике СВЧ и медико-биологических исследованиях. Главные возможности применения основываются на явлении преобразования поляризации поля в киральной среде. На основе киральных материалов возможно создание частотно- и поляризационно-селективных фильтров, преобразователей поляризации, частотно-селективных защитных экранов, а также подложек для ИС СВЧ.

Для приведенной выше классификации сред материальные уравнения для векторов поля можно записать в обобщенном виде:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{\epsilon}\vec{E} + \vec{\xi}\vec{H}, \\ \vec{B} &= \vec{\mu}\vec{H} + \vec{\zeta}\vec{E},\end{aligned}\quad (1.21)$$

где  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\zeta}$  могут являться тензорными или скалярными величинами.

В соответствии с характеристическим видом параметров  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\zeta}$  можно дать следующую классификацию сред: если  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$  – скалярные величины, а  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\zeta}$  равны нулю, то среда называется изотропной; если  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$  являются тензорными величинами, то среда называется анизотропной; если  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\xi}$  – скалярные параметры, то среда называется биизотропной; и если  $\vec{\epsilon}$  и  $\vec{\mu}$ ,  $\vec{\xi}$  – тензоры, то среда называется бианизотропной.

В общем случае эти параметры можно представить в виде матриц  $3 \times 3$  типа (1.18):

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}; & \vec{\mu} &= \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}; \\ \vec{\xi} &= \begin{bmatrix} \xi_x & 0 & 0 \\ 0 & \xi_y & 0 \\ 0 & 0 & \xi_z \end{bmatrix}; & \vec{\zeta} &= \begin{bmatrix} \zeta_x & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_y & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_z \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Среда, характеризующаяся матрицами типа (1.22), в каждой из которых по крайней мере три параметра отличаются друг от друга, называются биаксиальной анизотропной средой. Моноклинические и триклинические кристаллы являются типичными представителями такой среды. Если два из трех парамет-

ров каждой матрицы типа (1.22) одинаковы, то среда называется униаксиальной анизотропной. Например, тетрагональный, гексагональный и ромбогональные кристаллы представляют униаксиальную анизотропную среду.

### 1.3.3. Электрические свойства материальных сред

#### 1.3.3.1. Модели материалов

Простую модель материала, обладающего диэлектрическими свойствами, можно получить, рассматривая движение связанного электрона при воздействии на него электрического поля. Электрическое поле, пытаясь отделить электрон от положительно заряженного ядра, порождает в свою очередь электрический дипольный момент. Усреднение этого дипольного момента по объему материала характеризуется макроскопическим дипольным моментом в единице объема.

Для простоты положим, что на электрон действует электрическое поле  $E$  только вдоль координаты  $x$ , сила восстановления из-за притяжения электрона к ядру, а также сила трения пропорциональны скорости движения электрона. В этом случае простейшая модель динамики смещения связанного электрона описывается следующим уравнением движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = \frac{e}{m} E, \quad (1.23)$$

где  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона соответственно;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – частота резонанса связанных электронов.

Хороший проводник, для которого в пределе  $\omega_0 = 0$ , характеризуется наличием свободных электронов. Второе слагаемое в (1.23) описывает трение при столкновении электронов, в результате которого замедляется их движение. Параметр  $\alpha$  является мерой столкновений в единицу времени (частота столкновений), и поэтому  $\tau = 1/\alpha$  характеризует среднее время между столкновениями. В типичных проводниках  $\tau$  имеет порядок  $10^{-14}$  с, например, для меди  $\tau = 2,4 \cdot 10^{-14}$  с и  $\alpha = 4,1 \cdot 10^{13}$  Гц.

Модель разряженной плазмы без учета столкновений электронов можно получить, полагая в пределе  $\alpha = 0$ .

Таким образом, простые модели диэлектриков, проводников и плазмы могут быть описаны следующими выражениями:

- диэлектрики  $\omega_0 \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ;
- проводники  $\omega_0 = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ;
- плазма (без учета столкновений)  $\omega_0 \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ .

Основная идея этой модели состоит в том, что прикладываемое электрическое поле приводит к поляризации атомов и молекул вещества (разделяет положительные и отрицательные заряды), и таким образом создает электрический

дипольный момент. Данная модель учитывает основные особенности различных типов поляризации материалов, таких, как ионная/молекулярная поляризация, являющаяся результатом разделения положительных и отрицательных ионов при воздействии поля, или полярных материалов, которые обладают постоянным дипольным моментом.

### 1.3.3.2. Диэлектрики

Прикладываемое электрическое поле  $E(t)$  в уравнении (1.23) может иметь любую временную зависимость. Если предположить, что поле имеет гармоническую зависимость с частотой  $\omega$ ,  $E(t) = Ee^{j\omega t}$ , то решением уравнения (1.23) будет  $X(t) = xe^{j\omega t}$ , где параметр  $x$  удовлетворяет уравнению

$$-\omega^2 x + j\omega\alpha x + \omega_0^2 = \frac{e}{m} E. \quad (1.24)$$

Уравнение движения для гармонического поля (1.24) получено из (1.23) путем замены  $\frac{dx}{dt} \rightarrow j\omega$ . Решая (1.24) относительно  $x$ , находим

$$x = \frac{\frac{e}{m} E}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (1.25)$$

Скорость движения электрона  $v = \frac{dx}{dt} = j\omega x$  характеризуется гармонической функцией  $V(t) = Ve^{j\omega t}$ , и с учетом (1.25) получим

$$V = j\omega t = \frac{j\omega \frac{e}{m} E}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (1.26)$$

Из соотношений (1.25) и (1.26) можем найти поляризацию в единице объема  $P$ . Предположим, что в единичном объеме содержится  $N$  элементарных диполей, каждый из которых характеризуется единичным электрическим дипольным моментом  $p = ex$ . Поэтому поляризация единицы объема материала диэлектрика составит

$$P = Np = Nex = \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha} E \equiv \varepsilon_0 \chi(\omega) E. \quad (1.27)$$

Электрическая индукция согласно (1.11) будет равна

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) E \equiv \varepsilon(\omega) E,$$

где  $\varepsilon(\omega)$  – эффективная диэлектрическая проницаемость, равная

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (1.28)$$

Введем параметр, называемый плазменной частотой материала:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}. \quad (1.29)$$

С учетом (1.29) выражение (1.28) представим в более удобной форме:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (1.30)$$

Учитывая, что для диэлектрика  $\omega_0 \neq 0$  и полагая в низкочастотном приближении  $\omega = 0$ , из уравнения (1.30) получим номинальную диэлектрическую проницаемость материала:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m\omega_0^2}. \quad (1.31)$$

Из (1.30) следует, что диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega), \quad (1.32)$$

действительная и мнимая части которой характеризуют соответственно преломляющие и поглощающие свойства материала:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, \quad (1.33)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 \omega \alpha}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}.$$

С действительной частью  $\varepsilon'(\omega)$  связан коэффициент преломления  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)/\varepsilon_0}$ , а с мнимой  $\varepsilon''(\omega)$  – так называемый тангенс угла электрических потерь материала:  $\operatorname{tg}\delta(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$ .

На рис.1.4, а, б представлены зависимости  $\varepsilon'(\omega)$  и  $\varepsilon''(\omega)$  соответственно, из которых видно, что в окрестности резонансной частоты  $\omega_0$   $\varepsilon'(\omega)$  имеет

аномальный характер (становится меньше, чем  $\epsilon_0$ ), и ЭМП испытывает сильное поглощение.

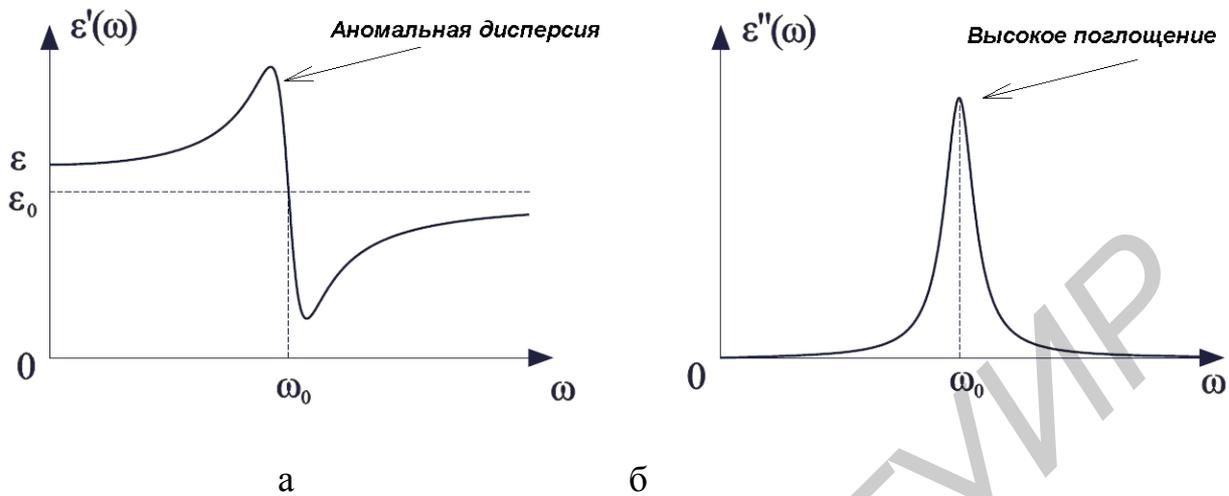


Рис. 1.4. Частотная зависимость диэлектрической проницаемости

Реальные диэлектрические материалы имеют несколько таких резонансных частот, соответствующих различным вибрационным модам и типам поляризации (например электронный, ионный, полярный), и диэлектрическая проницаемость является суммой нескольких составляющих, а именно:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \sum_i \frac{\epsilon_0 \omega_{ip}^2}{\omega_{i0}^2 - \omega^2 + j\omega\alpha_i}. \quad (1.34)$$

### 1.3.3.3. Проводники

Из проводниковых материалов – твердых тел, жидкостей и газов в электронике наиболее часто применяют металлы и сплавы.

Согласно классической теории Друде – Лоренца металлы можно рассматривать как кристаллический остов, состоящий из положительных ионов, погруженных в среду из свободных коллективизированных электронов, называемую «электронным газом» или «электронной жидкостью» (рис. 1.5). Наличие свободных делокализованных электронов обуславливает высокую пластичность, характерный блеск металлов, высокую электрическую проводимость и теплопроводность. Если к проводнику приложить внешнее напряжение, то свободные электроны, совершающие тепловые колебания со средней скоростью порядка 10<sup>5</sup> м/с, приобретают некоторую добавочную скорость направленного движения (несколько миллиметров в секунду), что вызывает протекание электрического тока.

Квантовомеханическое описание учитывает, что электрон обладает свойствами как частицы, так и волны, поэтому в идеальной периодической решетке электронные волны не рассеиваются. В реальных кристаллах строгая периодичность нарушается примесями, дефектами решетки и тепловыми колебаниями ионов.

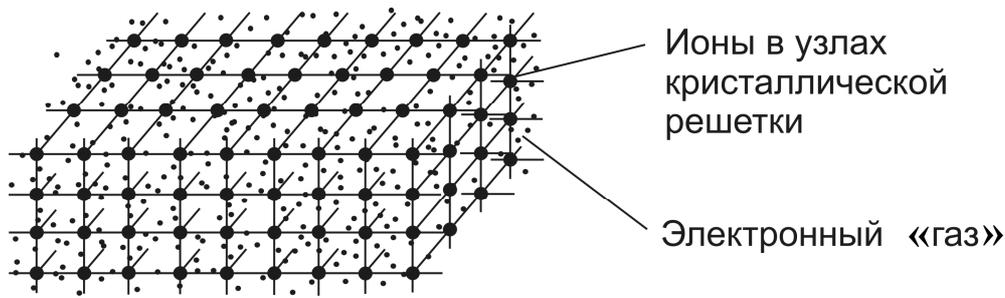


Рис. 1.5. Кристаллическая структура проводника

Свойства проводимости материалов описываются законом Ома. Для рассмотренной выше простой модели выразим плотность тока проводимости  $J = \rho v$  через объемную плотность заряда  $\rho = Ne$  и скорость движения электронов в проводнике с помощью (1.26):

$$J = \rho v = Nev = \frac{j\omega \frac{Ne^2}{m} E}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha} \equiv \sigma(\omega) E,$$

где  $\sigma(\omega)$  [См/м] – называется удельной электрической проводимостью материала и определяется соотношением

$$\sigma(\omega) = \frac{j\omega \frac{Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha} = \frac{j\omega \varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha}. \quad (1.35)$$

Отметим, что  $\sigma(\omega)/j\omega$  является по существу электрической восприимчивостью. Действительно, если  $J = Nev = Nenj\omega = j\omega P$ , то  $P = \frac{J}{j\omega} = \left( \frac{\sigma(\omega)}{j\omega} \right) E$ . Из этого следует, что  $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \sigma(\omega)/j\omega$ , и диэлектрическая проницаемость в проводнике определяется соотношением

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\alpha} = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{j\omega}. \quad (1.36)$$

Учитывая, что в металле проводимость осуществляется с помощью несвязанных зарядов, в уравнении (1.35) можно положить  $\omega_0 = 0$ , и после сокращения на  $j\omega$  получим

$$\sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\alpha + j\omega}. \quad (1.37)$$

Значение проводимости на постоянном токе ( $\omega = 0$ ) принято называть номинальной проводимостью материала

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\alpha} = \frac{Ne^2}{m\alpha}. \quad (1.38)$$

В качестве примера определим удельную электропроводность меди. Объемная плотность массы меди –  $8,9 \times 10^6 \text{ г/м}^3$ , а ее атомный вес –  $64,54 \text{ г/моль}$ . Полагая, что в атоме существует один электрон проводимости и учитывая, что число Авогадро  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ атом/моль}$ , найдем объемную плотность электронов  $N$ ,

$$N = \frac{6 \cdot 10^{23} \frac{\text{АТОМ}}{\text{МОЛЬ}}}{63,54 \frac{\text{ГР}}{\text{МОЛЬ}}} \left( 8,9 \cdot 10^6 \frac{\text{ГР}}{\text{М}^3} \right) \left( 1 \frac{\text{ЭЛЕКТРОН}}{\text{АТОМ}} \right) = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ электрон/м}^3.$$

Тогда с помощью (1.38) несложно определить удельную проводимость меди

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m\alpha} = \frac{(8,4 \cdot 10^{28})(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(9,1 \cdot 10^{-31})(4,1 \cdot 10^{13})} = 5,8 \cdot 10^7 \text{ См/м},$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ ,  $\alpha = 4,1 \cdot 10^{13}$  – заряд электрона и его масса соответственно, а с помощью соотношения (1.29) несложно определить плазменную частоту для меди

$$f = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} = 2,6 \cdot 10^{15} \text{ Гц},$$

значение которой лежит в ультрафиолетовом диапазоне. Для сигналов, частота которых удовлетворяет условию  $\omega \ll \alpha$ , проводимость (1.37) в первом приближении можно считать не зависящим от частоты параметром, значение которого можно принять равным его величине на постоянном токе (1.38). Частотный диапазон, используемый современными радиосредствами, далеко еще не достиг значения  $\alpha$ . Например, принимая  $\omega \leq 0,1\alpha$ , находим

$$f \leq 0,1\alpha \frac{1}{2\pi} = 653 \text{ ГГц}.$$

Для произвольной временной зависимости электрического поля  $E(t)$  закон Ома может быть получен с помощью преобразования Фурье:

$$J(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega) \Leftrightarrow J(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t-t')E(t')dt, \quad (1.39)$$

где

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 e^{-\alpha t} u(t) \quad (1.40)$$

является обратным преобразованием Фурье  $\sigma(\omega)$ , описываемым выражением

(1.37), и  $u(t)$  – единичная ступенчатая функция. Если электрическое поле скачкообразно изменяется от нуля до  $E$  в момент времени  $t = 0$  ( $E(t) = Eu(t)$ ), то временная характеристика плотности тока примет вид

$$J(t) = \int_0^t \varepsilon_0 \omega_p^2 e^{-\alpha(t-t')} E dt' = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\alpha} E (1 - e^{-\alpha t}) = \sigma E (1 - e^{-\alpha t}), \quad (1.41)$$

где  $\sigma = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \alpha$  является номинальной проводимостью материала, а  $\tau = 1/\alpha$  – постоянная времени, которая для хороших проводников составляет порядка  $10^{-14}$  с.

Следовательно, при скачкообразном изменении электрического поля плотность тока проводимости возрастает от нуля и в пределе достигает установившегося значения  $J = \sigma E$ . Другими словами, в начальный момент времени скорость движения электронов равна нулю, далее она возрастает и для больших  $t$  достигает установившегося значения  $v_\infty = (e/m\alpha)E$ . Это соотношение отражает баланс между ускоряющей силой электрического поля и тормозящей силой – силой трения:  $m\alpha v_\infty = eE$ . Величину  $e/m\alpha$  принято называть подвижностью носителей заряда.

Таким образом, в установившемся режиме плотность электрического тока представляет собой закон Ома:

$$J = Nev_\infty = \frac{Ne^2}{m\alpha} E = \sigma E. \quad (1.42)$$

#### 1.3.3.4. Реальные диэлектрики

Свойства материалов, обладающих диэлектрическими и проводящими свойствами, можно рассмотреть на основе двухкомпонентной модели диэлектрической проницаемости, одна из которых описывает свойства среды для связанных поляризованных зарядов, а другая – для свободных зарядов проводимости. В рамках рассмотренной выше модели диэлектрики и проводники характеризуются различными значениями параметров  $\{\omega_0, \omega_p, \alpha\}$ . Выразив эти значения помощью (1.30) и (1.37), полное значение диэлектрической проницаемости представим в виде

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_{dp}^2}{\omega_{d0}^2 - \omega^2 + j\omega\alpha_d} + \frac{\varepsilon_0 \omega_{cp}^2}{j\omega(\alpha_c + j\omega)}. \quad (1.43)$$

Обозначим в (1.43) первые два слагаемых как  $\varepsilon_d(\omega)$ , а третье – как  $\sigma_c(\omega)/j\omega$ . Тогда полная эффективная диэлектрическая проницаемость материала примет вид

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega}. \quad (1.44)$$

На низких частотах можно положить  $\omega = 0$ , и значения  $\varepsilon_d(0)$  и  $\sigma_c(0)$  являются номинальными значениями диэлектрической проницаемости и проводимости материала. Представим (1.44) в виде

$$j\omega\varepsilon(\omega) = \sigma_c(\omega) + j\omega\varepsilon_d(\omega). \quad (1.45)$$

Умножим левую и правую части (1.45) на  $E$  и в результате получим

$$j\omega\varepsilon(\omega)E = \sigma_c(\omega)E + j\omega\varepsilon_d(\omega)E. \quad (1.46)$$

В соответствии с (1.39) первое слагаемое в правой части (1.46) представляет собой плотность тока проводимости. Следовательно, второе слагаемое также имеет размерность плотности тока и зависит от частоты. Например, для гармонического поля эта величина определяется скоростью изменения электрической индукции в диэлектрике:  $J_{disp} = \frac{\partial D}{\partial t} = j\omega\varepsilon_d(\omega)E$  получила название тока смещения или тока поляризации вещества.

Таким образом, уравнение (1.46) представляет собой закон полного тока, который и может быть записан в виде

$$J_{tot} = J + \frac{\partial D}{\partial t} = J + j\omega D = \sigma_c(\omega)E + j\omega\varepsilon_d(\omega)E = j\omega\varepsilon(\omega)E. \quad (1.47)$$

Отношение плотности тока проводимости к плотности тока смещения равно

$$\left| \frac{J_{cond}}{J_{disp}} \right| = \frac{|\sigma_c(\omega)E|}{|j\omega\varepsilon_d(\omega)E|} = \frac{|\sigma_c(\omega)|}{\omega\varepsilon_d(\omega)}, \quad (1.48)$$

зависит от частоты поля и устанавливает границу между хорошим проводником и хорошим диэлектриком. Если на заданной частоте соотношение (1.48) значительно больше единицы, то материал ведет себя как хороший проводник; если отношение меньше единицы (обычно меньше чем 0,1), то материал характеризуется как хороший диэлектрик.

Рассмотрим соотношение (1.48) для трех типов материалов на частоте 1 ГГц:

$$\left| \frac{J_{cond}}{J_{disp}} \right| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \begin{cases} 10^9 & \text{для медного проводника с } \sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ См/м и } \varepsilon = \varepsilon_0; \\ 1 & \text{для морской воды с } \sigma = 4 \text{ См/м и } \varepsilon = 72\varepsilon_0; \\ 10^{-9} & \text{для органического стекла с } \sigma = 10^{-10} \text{ См/м и } \varepsilon = 2\varepsilon_0. \end{cases}$$

Представленные результаты показывают, что отношение плотности тока проводимости к плотности тока смещения в проводнике (медь) и диэлектрике (стекло) различается на 18 порядков. Морская вода при этом может рассматриваться как полупроводник, в котором токи проводимости и токи смещения имеют примерно одинаковую величину. Если частота поля уменьшается до 100 МГц, то все отношения увеличатся в 10 раз. В этом случае морская вода ведет себя как хороший проводник.

Для произвольной среды комплексную диэлектрическую проницаемость материала  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$  можно получить, если в (1.44) представить  $\varepsilon_d(\omega) = \varepsilon'_d(\omega) - j\varepsilon''_d(\omega)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\omega) &= \varepsilon'_d(\omega), \\ \varepsilon''(\omega) &= \varepsilon''_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega}.\end{aligned}\quad (1.49)$$

Как отмечалось выше, потери мощности в среде принято характеризовать с помощью тангенса угла электрических потерь:

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}.\quad (1.50)$$

С учетом (1.49) тангенс угла потерь (1.50) может быть представлен как сумма двух составляющих, одна из которых связана с проводимостью, а другая – с поляризацией вещества:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sigma_c(\omega) + \omega\varepsilon_d(\omega)}{\omega\varepsilon_d(\omega)} = \frac{\sigma_c(\omega)}{\omega\varepsilon_d(\omega)} + \frac{\varepsilon_d(\omega)}{\varepsilon_d(\omega)} = \operatorname{tg}\theta_c + \operatorname{tg}\theta_d.\quad (1.51)$$

### 1.3.3.5. Плазма

Плазма, как и любая другая среда, характеризуется проводимостью и диэлектрической проницаемостью.

Без учета столкновений проводимость плазмы, например ионосферы, может быть определена из (1.37), полагая  $\omega_0 = 0$  и  $\alpha = 0$ :

$$\sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{j\omega}.\quad (1.52)$$

При тех же условиях из (1.36) получаем эффективную диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{j\omega} = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),\quad (1.53)$$

где плазменная частота  $\omega_p^2 = Ne^2/m\varepsilon_0$  определяется соотношением (1.29). В ионосфере типовое значение электронной концентрации носителей заряда составляет  $N = 10^{12}$ . Поэтому плазменная частота  $f_p \approx 9$  МГц.

### 1.3.3.6. Сверхпроводящие материалы

#### 1.3.3.6.1. Критическое магнитное поле. Критический ток

Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 г. Камерлинг-Оннесом, обнаружившим, что ртуть, охлажденная до температуры жидкого гелия (4,4 К), полностью теряет электрическое сопротивление. Позднее было установлено, что сверхпроводимость возможна в олове, свинце и других металлах. К настоящему времени известно 35 металлов, более тысячи сплавов и химических соединений различных элементов, обладающих сверхпроводимостью.

Сверхпроводник представляет собой материал, который обладает нулевым характеристическим сопротивлением постоянному току при охлаждении ниже определенной температуры. Температура, при которой характеристическое сопротивление проводника испытывает резкое изменение, называется *критической температурой*, или *температурой перехода*, и обозначается как  $T_C$ . Для переменного тока сопротивление не стремится к нулю ниже  $T_C$ , но увеличивается с ростом частоты. Тем не менее в радиоволновом диапазоне частот сопротивление сверхпроводника может составлять одну тысячную от величины сопротивления наилучшего обычного проводника.

Возникновение сверхпроводящего состояния связывается с тем, что при температурах ниже точки перехода электрон локально искажает решетку, создавая область притяжения для другого электрона, при этом силы притяжения между ними будут превосходить силы отталкивания. Такие электронные пары будут находиться в одном квантовом состоянии. Результатом коллективного поведения пар является рассеяние отдельного электрона на примесях и переход в сверхпроводящее состояние. У чистых монокристаллов переход в сверхпроводящее состояние совершается очень резко, занимая интервал температур меньше одной тысячной градуса. Переход в сверхпроводящее состояние зависит от структуры кристаллической решетки. Например, белое олово обладает сверхпроводимостью, серое – нет. Среди чистых веществ сверхпроводимость наблюдается в алюминии, кадмии, индии, галии.

Сверхпроводящее состояние разрушается магнитным полем, когда магнитная индукция превосходит некоторое критическое значение, зависящее от материала сверхпроводника и температуры. Экспериментально обнаружено, что критическое поле  $H_C$  достаточно хорошо описывается зависимостью

$$H_C = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \right], \quad (1.54)$$

где  $H_0$  – критическое поле при абсолютном нуле,  $T_C$  – температура сверхпроводящего перехода.

Зависимость критического поля от температуры по сути представляет собой фазовую диаграмму сверхпроводника (рис. 1.6).

Поскольку суммарный импульс сверхпроводящих электронов не должен превышать некоторого определенного значения, то для любого сверхпроводни-

ка существует критическая плотность тока  $J_C$ , выше которой сверхпроводимость разрушается. Например, если через цилиндрический проводник радиусом  $r = a$  в отсутствие внешнего поля пропускать ток  $J$ , на ее поверхности возникает магнитное поле напряженностью  $H$ .

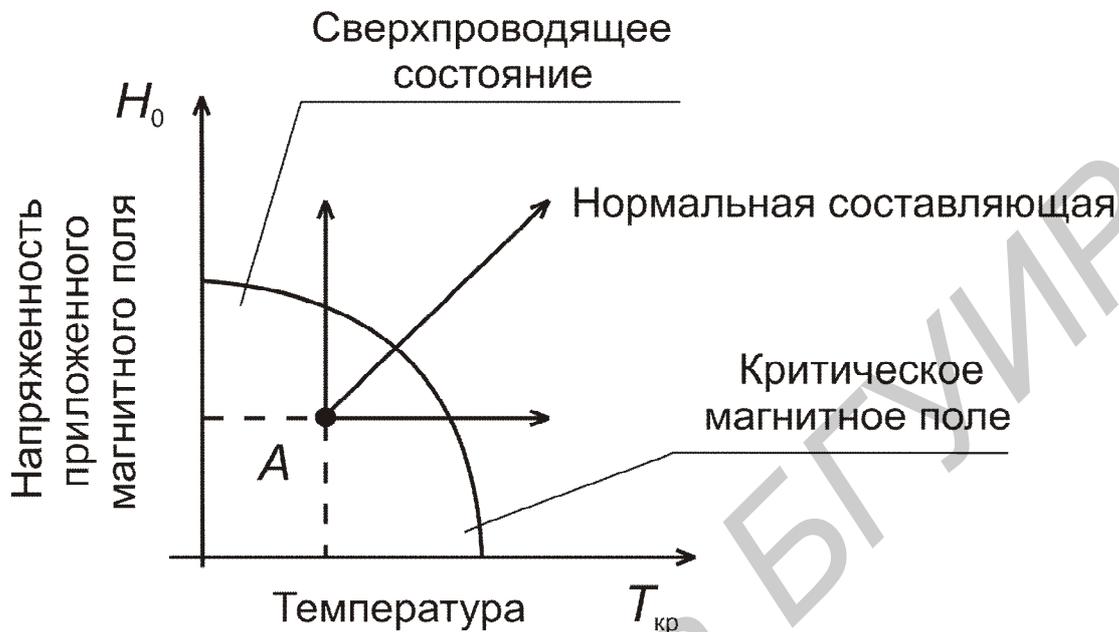


Рис. 1.6. Фазовая диаграмма сверхпроводника

На рис. 1.7 приведена зависимость критического тока  $J_C$  от напряженности магнитного поля  $H_C$  при продольном приложении поля к проводнику.

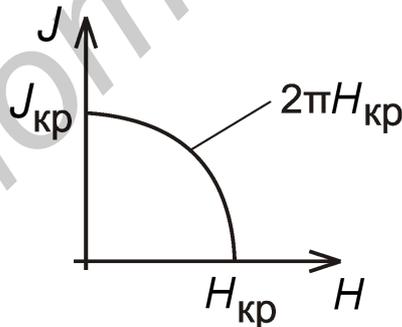


Рис. 1.7. Зависимость критического тока от напряженности магнитного поля

Поверхностный ток, занимая тонкий слой вблизи поверхности сверхпроводника, создает магнитное поле, уничтожающее внутри сверхпроводника внешнее магнитное поле. В этом состоит эффект Мейсснера, обнаруженный в 1933 г. и заключающийся в вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводящего тела или проводника.

### 1.3.3.6.2. Сверхпроводники первого, второго и третьего рода

**Сверхпроводники первого рода** – это чистые вещества, у которых наблюдается полный эффект Мейсснера ( $H < 10^5$  А / м).

**Сверхпроводники второго рода** – это вещества, в которых эффект Мейсснера проявляется частично ( $H > 10^7 \dots 10^8$  А / м). Магнитное поле в них распределено в виде отдельных нитей, а сопротивление равно нулю, как и у сверхпроводников 1-го рода.

К сверхпроводникам второго рода относятся в основном сплавы (из чистых металлов только ниобий, ванадий и технеций).

**Сверхпроводники третьего рода** – это «жесткие» сверхпроводники, в основном сплавы и химические соединения сверхпроводников 2-го рода, содержащие дефекты структуры, служащие местами закрепления вихрей (центров пиннинга). Вихрь – это область сверхпроводника, в которую проникает внешнее магнитное поле. Каждый вихрь – это элементарный квант магнитного потока. Вихри образуют симметричную решетку, которая при жестком закреплении обеспечивает у сверхпроводников 3-го рода возможность получения больших критических токов. Например, в проводнике из станнида ниобия ( $Nb_3Sn$ ) в полях с  $B = 10$  Тл плотность тока может быть более  $10^9$  А / м<sup>2</sup>.

Сверхпроводники 1-го рода могут существовать в сверхпроводящем или нормальном состоянии, а сверхпроводники 2-го рода – в одном из трех состояний – в сверхпроводящем, смешанном или нормальном.

### 1.3.3.6.3. Высокотемпературные сверхпроводники

Несмотря на то что явление сверхпроводимости было обнаружено в 1911 г., оно не находило практического применения в течение почти 75 лет после открытия, так как для всех известных сверхпроводников требовалась очень низкая температура перехода (30 К и менее).

Революционное событие в области сверхпроводимости произошло в 1986 г. и связано с открытием сверхпроводников с температурами перехода больше, чем точка кипения жидкого азота (77 К). Эти сверхпроводники получили название высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), или HTS (high-temperature superconductors).

Широкое применение ВТСП-технология находит во многих областях науки и техники, например в СВЧ-микроэлектронике и в частности для реализации высокочастотных микрополосковых линий передачи и устройств на их основе. Так, при производстве гибридных монолитных СВЧ-схем применяются встроенные узлы, выполненные на основе отрезков полосковых линий передачи, в которых в качестве токоведущих проводников используются пленки из ВТСП. В настоящее время известно несколько сотен разновидностей сверхпроводящих материалов с различными температурами переходов, однако на практике широко используются только два коммерчески доступных материала: иттрий-бариевая медная окись (yttrium barium copper oxide (YBCO)), и барий-

таллиево-кальциевая медная окись (thallium barium calcium copper oxide ТВССО)). Температуры переходов для этих материалов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Тип материала	Температура перехода, $T_C$ (К)
$YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO)	$\approx 92$
$Tl_2Ba_2Cu_2O_x$ (ТВССО)	$\approx 105$

Спаренные электроны движутся под влиянием электрического поля без диссипативных потерь. Кроме того, из-за тепловой энергии, присутствующей в твердом теле, некоторые электронные пары разделены, и поэтому небольшое количество свободных электронов всегда присутствует в нем при температуре выше абсолютного нуля. Таким образом, явление сверхпроводимости может быть объяснено с помощью так называемой двухкомпонентной или двухфлуидной модели сверхпроводника, в которой удельная электропроводность материала  $\sigma_{HTS} = \sigma_1 - j\sigma_2$  принимается за комплексную величину. На рис. 1.8 представлена упрощенная эквивалентная схема, которая иллюстрирует комплексную удельную электропроводность в сверхпроводнике.

Значение  $J$  обозначает суммарную плотность тока, а  $J_S$  и  $J_N$  – плотности токов, обусловленные спаренными и нормальными электронами соответственно. Общий ток в цепи можно условно разделить на реактивную составляющую, обусловленную наличием индуктивности, и активную составляющую, обусловленную активными потерями в пассивном сопротивлении. По мере понижения частоты поля реактивное сопротивление уменьшается, и ток приобретает все более реактивный характер (протекает через индуктивность). Наконец, при постоянном токе индуктивность полностью шунтирует активное сопротивление и ток характеризуется только реактивной составляющей.

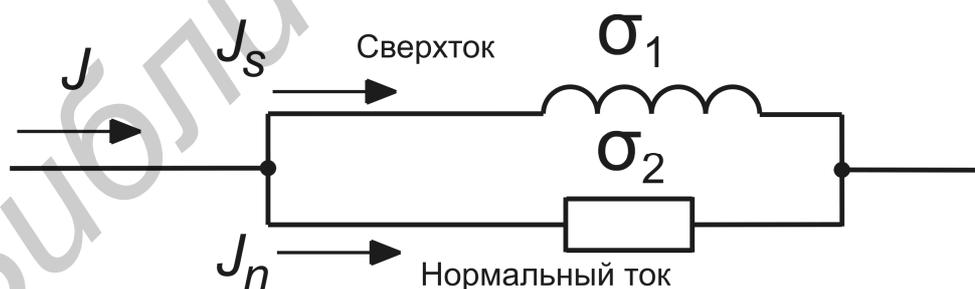


Рис. 1.8. Эквивалентная схема описания комплексной проводимости

В соответствии с двухфлуидной моделью комплексная проводимость может быть представлена в виде

$$\sigma_{HTS} = \sigma_1 - j\sigma_2 = \sigma_N \left( \frac{T}{T_C} \right)^4 - j \frac{1}{\omega \mu \delta_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^4 \right], \quad (1.55)$$

где  $\sigma_N$  – удельная электропроводность при  $T_C$  и  $\delta_0$  – постоянный параметр, характеризующий глубину проникновения поля в сверхпроводник при температуре, приближающейся к абсолютному нулю ( $T = T_0 = 0$ ) (см. подразд. 3.6). В зависимости от качества сверхпроводников типичная величина  $\delta_0$  составляет около 0,2 мкм.

Свойства ВТСП во многом зависят от технологии их изготовления. Наиболее простой способ состоит в размоле металлических оксидов, прессования смеси и отжиге в атмосфере кислорода при температуре 900 °С. Новое вещество образуется в результате химической реакции. Для устранения межгранулярных прослоек и получения более упорядоченной ориентации кристаллов полученное соединение подвергают плавке с последующим охлаждением. Исследуются и другие методы получения ВТСП.

Для широкого применения ВТСП требуется преодолеть ряд трудностей, к которым можно отнести необходимость получения больших плотностей тока, гибкости, прочности, способности выдерживать большие магнитные и центробежные нагрузки, легкость обработки, стабильность свойств и др.

В будущем может быть создан суперкомпьютер на ВТСП с быстродействием в 1000 раз большим, чем у компьютеров, проектируемых в настоящее время. Время переключения на переходах Джозефсона (два сверхпроводника, разделенных тонким слоем диэлектрика) составит не более  $10^{-13}$  с при  $T_C = 100$  К и  $10^{-14}$  с для материала с  $T_C = 10$  К.

### **1.3.4. Магнитные свойства материалов**

#### **1.3.4.1. Модель магнитного упорядочения в твердом теле**

Магнитное упорядочение (упорядоченное пространственное расположение магнитных моментов) наиболее изучено в твердых телах, обладающих дальним порядком в расположении атомов и кристаллической решеткой, в узлах которой периодически располагаются атомы с магнитными моментами. Физики и материаловеды интенсивно изучают также физические (в том числе и магнитные) свойства аморфных материалов, где существует только ближний порядок в расположении атомов. К ним относятся, в частности, металлические сплавы, получаемые быстрой закалкой из жидкого состояния (металлические стекла). Аморфная структура этих материалов характеризуется неупорядоченным расположением атомов, что приводит иногда к сильным изменениям их магнитных и других физических свойств по сравнению с их кристаллическими аналогами.

Простейшая интерпретация физических механизмов, ответственных за упорядоченное пространственное расположение магнитных атомных моментов в твердых телах, основывается на наличии у атомов собственных магнитных моментов, благодаря которым возможно образование спонтанного магнитного момента даже при отсутствии магнитного поля.

В магнетиках магнитные моменты локализованы на атомах и магнитный момент образца  $M$  складывается из магнитных моментов атомов. Дифференциальной характеристикой магнитных свойств материала является намагниченность, которая определяется как отношение суммарного магнитного момента образца к единице объема  $V$ :  $I = M/V$ .

Внешнее магнитное поле создает дополнительную намагниченность за счет ориентации магнитных моментов и индуцирования диамагнитного момента. Эта намагниченность складывается со спонтанной намагниченностью. Кроме того, магнитное поле может деформировать и даже разрушать магнитную структуру. В общем случае намагниченность образца не может быть получена как сумма магнитных моментов изолированных и невзаимодействующих ионов, поскольку в металлах и сплавах большую роль играет коллективизация электронов, которые образуют магнитный момент электронной подсистемы. В кристаллических и аморфных веществах сильное взаимодействие между электронами внешних (или валентных) оболочек соседних атомов приводит к образованию энергетической зоны делокализованных электронных состояний, которые вносят существенный вклад в результирующую намагниченность.

Однако для объяснения многих эффектов с позиции только одного магнитного взаимодействия магнитных моментов недостаточно. Так, невозможно объяснить эффект исчезновения магнитных свойств у ферромагнетиков при температуре Кюри.

Поэтому более сложная модель магнитного упорядочения вещества при определенной температуре должна учитывать не только наличие в нем атомных магнитных моментов, но и взаимодействие между ними за счет так называемого обменного взаимодействия.

Такое взаимодействие является частью электростатического взаимодействия, зависящего от ориентации спинов взаимодействующих электронов. Обменное взаимодействие приводит к появлению некоторого эффективного обменного поля, которое ниже определенной температуры  $T_K$  преодолевает дезориентирующее действие теплового движения. В результате при  $T < T_K$  возникает кооперативный эффект – магнитное упорядочение. Эту температуру  $T_K$  называют температурой магнитного упорядочения. Магнитное упорядочение характеризуется упорядоченным расположением магнитных моментов атомов, которое возникает при  $T < T_K$  даже при отсутствии внешнего магнитного поля. В этом состоит отличие кооперативного магнетизма от некооперативного (парамагнетизм и диамагнетизм), где магнитные моменты ионов ведут себя совершенно независимо.

На магнитный момент иона как в кристаллическом, так и в аморфном магнетике действует электростатическое поле, создаваемое окружающими ионами. Это поле называют локальным кристаллическим полем. Оно создает локальную ось легкого намагничивания, вдоль которой и располагается магнитный момент. В кристаллическом веществе ось легкого намагничивания совпадает с одним из кристаллографических направлений, в аморфном – локальные оси легкого на-

магничивания разбросаны по всем направлениям беспорядочно.

Энергию  $A$ , возникающую в результате обмена электронами родственных атомов, называют обменной энергией, или интегралом обменной энергии. При положительном интеграле обменной энергии  $A$  (рис. 1.9), что соответствует минимуму электростатической энергии, возникает параллельная ориентация спинов. При отрицательном знаке  $A$  энергетически выгодно антипараллельное расположение спинов. Численное значение и знак интеграла  $A$  зависит от степени перекрытия электронных оболочек, т. е. зависит от расстояния между атомами.

На рис. 1.9 показано изменение интеграла обменной энергии как функция отношения межатомного расстояния  $a$  к диаметру незаполненной электронной оболочки  $d$ . При  $a/d > 1,5$  происходит переход от антиферромагнитного состояния к ферромагнитному. Хотя максимум обменного взаимодействия в металлах носит более сложный характер, чем это следует из теории Френкеля–Гейзенберга, данная теория позволяет качественно объяснить причину самопроизвольной намагниченности, т. е. критерием ферромагнетизма является существование незаполненных внутренних электронных оболочек, радиус которых должен быть мал по сравнению с расстоянием между ядрами в решетке.



Рис. 1.9. Зависимость интеграла обменной энергии  $A$  от отношения межатомного расстояния  $a$  к диаметру незаполненной электронной оболочки  $d$

Наличие макроскопической намагниченности образца сильно увеличивает магнитостатическую энергию. Ее минимизация происходит тогда, когда образец разбивается на домены, внутри которых есть спонтанная намагниченность вдоль оси легкого намагничивания, которой является одна из кристаллических осей. Температурная зависимость спонтанной намагниченности  $I_S$  приведена на рис. 1.10, а, из которой видно, что величина  $I_S$  монотонно уменьшается с нагреванием и исчезает при  $T > T_K$ . При  $T > T_K$  имеет место парамагнитное состояние с хаотической ориентацией магнитных моментов при  $H = 0$ ; при  $T < T_K$  возникает ферромагнитное состояние с параллельной ориентацией маг-

нитных моментов (рис. 1.10, б).

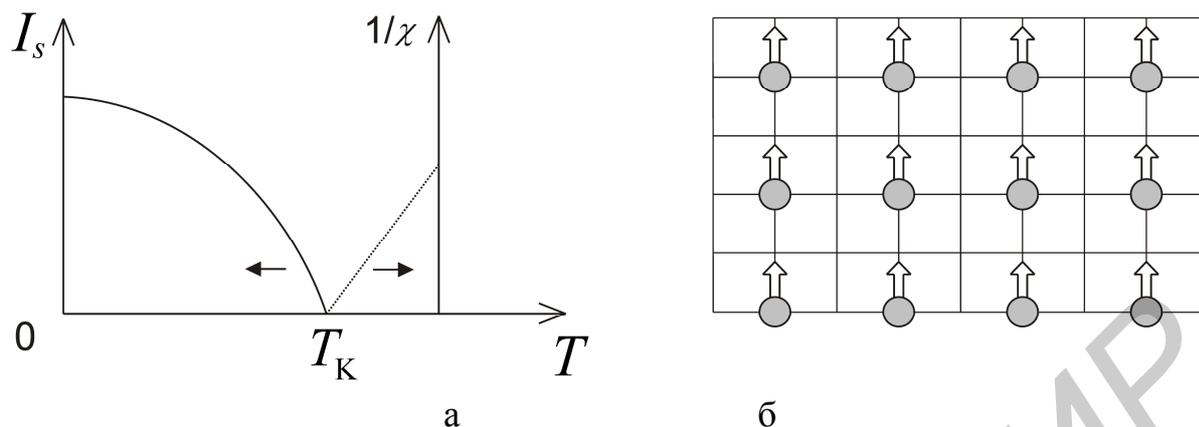


Рис. 1.10. Температурные зависимости спонтанной намагниченности  $I_S$  и обратной магнитной восприимчивости  $1/\chi$  ферромагнетика (а), ферромагнитная структура (б)

При увеличении магнитного поля  $H$  намагниченность образца возрастает за счет смещения границ доменов и процессов вращения спонтанной намагниченности. Первый процесс связан с ростом объема доменов, у которых направление  $I_S$  ориентировано наиболее выгодно энергетически по отношению к полю (угол между  $I_S$  и  $H$  – наименьший). Вторым процессом – вращением – обусловлен поворотом векторов  $I_S$  от оси легкого намагничивания к направлению приложенного магнитного поля. В парамагнитной области при  $T > T_K$  для магнитной восприимчивости выполняется закон Кюри–Вейсса:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T - \theta_p}{C}, \quad (1.56)$$

где  $\theta_p$  – парамагнитная точка Кюри, а  $C$  – постоянная Кюри–Вейсса. Из рисунка 1.10, а видно, что величина  $1/\chi$  для ферромагнетиков изменяется линейно с температурой. В изотропных однородных по составу ферромагнетиках с малой магнитной анизотропией  $T_K$  и  $\theta_p$  имеют близкие значения. В анизотропных ферромагнетиках величина  $\theta_p$  принимает разные значения для оси легкого намагничивания и оси трудного намагничивания, а также заметно отличается от температуры Кюри  $T_K$ .

### 1.3.4.2. Классификация материалов по магнитным свойствам

**Диамагнетики** – вещества, в которых в «чистом» виде проявляется диамагнитный эффект, являющийся в свою очередь результатом воздействия внешнего магнитного поля на молекулярные токи. Магнитный момент, возникающий при этом эффекте, направлен навстречу внешнему полю. Для диамаг-

нетиков относительная магнитная проницаемость  $\mu < 1$  и слабо зависит от температуры. Диамагнетизм присущ всем веществам, однако в большинстве случаев он маскируется другими типами магнитного состояния.

К диамагнетикам относятся все вещества с ковалентной химической связью, щелочно-галогидные кристаллы, неорганические стекла, полупроводниковые соединения  $A_3B_5$ ,  $A_2B_6$ , кремний, германий, бор и другие, а также ряд металлов: медь, серебро, золото, цинк, ртуть, галлий и другие, водород, азот, вода и др.

**Парамагнетики** – вещества с нескомпенсированными магнитными моментами, у которых отсутствует магнитный атомный порядок. Магнитный момент парамагнетика равен нулю. Под действием внешнего поля из-за преимущественной ориентации магнитных моментов в направлении поля появляется намагниченность. Для парамагнетиков  $\mu > 1$  и слабо зависит от температуры.

К парамагнетикам относятся щелочные и щелочно-земельные металлы, некоторые переходные металлы, соли железа, кобальта, никеля, редкоземельных металлов, кислород, окись азота, Al, Na, Mg, Ta, W, CaO, CoO и др.

**Ферромагнетики** – вещества, в которых (ниже температуры Кюри) обменное взаимодействие преобладает над другими видами взаимодействий, чувствительными к ориентации магнитных моментов, и преодолевает дезориентирующее действие теплового движения при  $T < T_K$ , вследствие чего магнитные моменты ориентируются параллельно в макроскопических областях – доменах.

**Домены** – это области самопроизвольной намагниченности, возникающие даже в отсутствие внешнего магнитного поля, в которых магнитные моменты атомов ориентированы параллельно.

В каждом домене самопроизвольная намагниченность однородна и направлена по одной из осей легкой намагниченности. Такое состояние энергетически выгодно и кристалл в целом не обладает магнитными свойствами, так как магнитные моменты доменов ориентированы в пространстве равновероятно. Между соседними доменами возникают граничные слои (стенки Блоха). Внутри доменных стенок векторы намагниченности плавно поворачиваются (рис. 1.11, а). Объем доменов может колебаться в широких пределах: от  $10^{-1}$  до  $10^{-6}$  см<sup>3</sup>.

Толщина границы зависит главным образом от соотношения энергий: обменной, магнитной анизотропии и магнитоупругой энергии. Размеры самих доменов зависят от неметаллических включений, границ зерен, скоплений дислокаций и других неоднородностей. Обычно домены имеют правильную форму. На рис. 1.11, б показана идеализированная доменная структура кристаллического ферромагнетика.

**Ферромагнетики** в основном кристаллизуются в трех типах решеток: кубической пространственной, кубической объемно-центрированной и гексагональной и обладают магнитоанизотропными свойствами.

Атомы или ионы приобретают магнитный момент, как правило, если они имеют нескомпенсированные спины электронов. Например, в атомах железа на внутренней  $3d$ -оболочке имеется четыре нескомпенсированных спина. В соот-

ветствии с теорией Френкеля–Гейзенберга главную роль в возникновении ферромагнитного состояния играют силы обменного взаимодействия между атомами, имеющие квантовый характер и по происхождению являющиеся электростатическими.

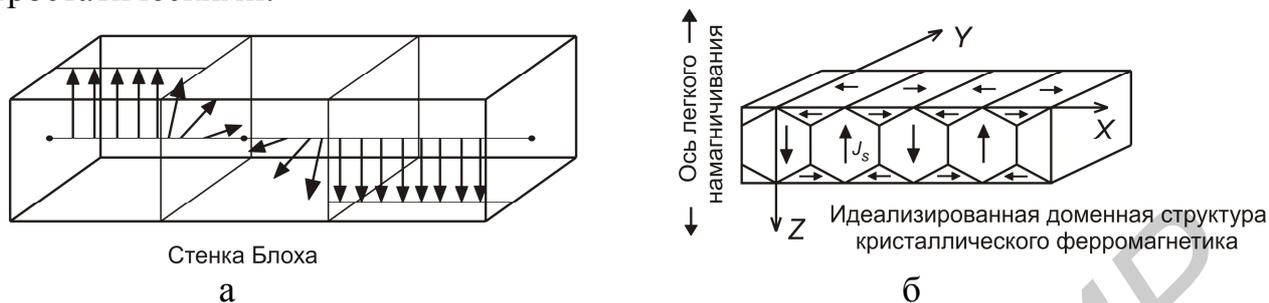


Рис. 1.11. Связь между доменами и доменная структура кристаллического ферромагнетика

Относительная магнитная проницаемость  $\mu \gg 1$  у ферромагнетиков достигает больших положительных значений и сильно зависит от напряженности магнитного поля и температуры.

В неметаллических ферромагнетиках, где магнитные моменты электронов локализованы на ионах, спонтанная намагничённость образца складывается из магнитных моментов изолированных ионов. Постоянная Кюри–Вейсса связана с эффективным магнитным моментом иона  $m_{eff}$  в ферромагнетиках с локализованными магнитными моментами:

$$C = \frac{m_{eff}^2}{3k_B}, \quad (1.57)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Для редкоземельных элементов хорошо выполняется соотношение

$$m_{eff} = m_B g_J \sqrt{J(J+1)}, \quad (1.58)$$

где  $J$  – квантовое число полного механического момента для данного иона,  $g_J$  – фактор Ландэ (определяется квантовыми числами, характеризующими энергетическое состояние иона),  $m_B = 0,927 \cdot 10^{-20}$  эрг/Гс – магнетон Бора (единица измерения атомных магнитных моментов и собственный магнитный момент электрона).

Из величины удельной намагничённости насыщения  $\sigma_s(0)$  при температурах, близких к  $T = 0$  К (обычно при  $T = 4,2$  К), можно найти магнитный момент  $M_0$ , приходящийся на атом ферромагнетика в магнитоупорядоченном состоянии:

$$M_0 = \frac{m_m m_s(0)}{N}, \quad (1.59)$$

где  $m_m$  – молекулярный вес вещества,  $N$  – число Авогадро

( $N = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>),  $m_S(0)$  – удельная намагниченность (на 1 г при  $T = 4,2$  К). Ферромагнетики находят широкое применение в технике. На их основе разработаны магнитные материалы: магнитомягкие (высокие значения магнитной проницаемости), магнитожесткие (высокие значения коэрцитивной силы и магнитной энергии), материалы для магнитной записи. Для ферромагнетиков на основе редкоземельных элементов с локализованными моментами  $4f$ -электронов магнитный момент определяется соотношением

$$M_0 = m_B g_J J, \quad (1.60)$$

где  $J = L + S$  ( $L$  и  $S$  – орбитальное и спиновое квантовые числа). Для немагнитных ферромагнетиков на основе  $3d$ -элементов, где орбитальный момент «заморожен» кристаллическим полем ( $L = 0$ ),

$$M_0 = m_B S. \quad (1.61)$$

В металлических ферромагнетиках, таких как железо, кобальт, никель и их сплавы, ферромагнетизм обусловлен коллективизированными электронами. Он возникает вследствие неодинаковой заселенности этими электронами двух энергетических зон: первая зона – со спинами электронов, ориентированными в одну сторону, и вторая зона – со спинами в противоположную сторону.

Различают сильный и слабый ферромагнетизм коллективизированных электронов. У первых магнитные электроны полностью заполняют одну из зон. У вторых магнитные электроны содержатся в обеих зонах. Величина спонтанной намагниченности и температура магнитного упорядочения – температура Кюри – определяются формой кривой плотности энергетических состояний электронов  $g(\epsilon)$  вблизи уровня Ферми. Плотность энергетических состояний  $g(\epsilon)$  – это число энергетических состояний на единичный интервал энергии зонных электронов. Спонтанный момент  $M$  пропорционален разности чисел электронов в зоне «+» и в зоне «-»:

$$M = m_B (N_+ - N_-). \quad (1.62)$$

Поскольку  $N_+$  и  $N_-$  различаются по величине, спонтанный момент не равен нулю. Он, как правило, не кратен магнетону Бора.

К ферромагнетикам относятся: железо, никель, кобальт, их соединения и сплавы, некоторые сплавы марганца, серебра, алюминия и др. При низких температурах ферромагнетиками становятся некоторые редкоземельные элементы – гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий, а также сплавы  $RCo_5$ , где  $R$  – редкоземельный элемент (Sm, Ce или Pr).

**Антиферромагнетики** – характеризуются антиферромагнитным атомным порядком, возникающим из-за антипараллельной ориентации одинаковых атомов или ионов кристаллической решетки.

В идеальном антиферромагнетике одинаковые магнитные ионы занимают

в кристаллической решетке кристаллографически эквивалентные позиции и образуют две взаимопроникающие ферромагнитные подрешетки, магнитные моменты которых ориентированы противоположно, в результате чего спонтанная намагниченность образца отсутствует. Антиферромагнетизм – это также и кооперативное явление, которое характеризуется дальним порядком в системе магнитных моментов. Каждый ион окружен ионами с магнитными моментами, ориентированными противоположно его магнитному моменту. Это обусловлено тем, что обменные интегралы  $A$  являются отрицательными ( $A < 0$ ) и превышают по абсолютной величине магнитокристаллические взаимодействия.

Магнитная восприимчивость  $\chi$  антиферромагнетика имеет максимум при температуре Нееля  $T_N$  (антиферромагнитная точка Кюри). При  $T > T_N$  тепловое движение разупорядочивает дальний антиферромагнитный порядок и вещество становится парамагнетиком. Магнитная восприимчивость при  $T > T_N$  удовлетворяет закону Кюри–Вейсса с отрицательным значением парамагнитной температуры Кюри  $\theta_p$ .

Для антиферромагнетиков  $\mu > 1$  и сильно зависит от температуры. При нагревании магнитная упорядоченность исчезает при температуре, соответствующей точке Нееля.

Наиболее простое магнитное поведение присуще антиферромагнитным окислам (MnO, CoO, FeO) и хлоридам Fe, Co и Ni. Некоторые  $3d$ -элементы (Cr,  $\alpha$ -Mn) и  $4f$ -элементы (Pr, Nd и др.) имеют более сложные антиферромагнитные структуры, для описания которых недостаточно модели двух подрешеток.

Недавно обнаружен антиферромагнетизм в полупроводниках (халькогениды Mn, Cr, Eu и Gd). В последнее время вызывают значительный интерес антиферромагнитные редкоземельные ферриты-гранаты, в которых ионы железа замещены алюминием и галлием ( $Dy_3Al_5O_{12}$  и  $Dy_3Ga_5O_{12}$ ). В них наблюдаются трансформации антиферромагнитной структуры при действии магнитного поля. Эти соединения представляют интерес в качестве магнитных хладоагентов для получения низких температур методом магнитного охлаждения в магнитных холодильных машинах.

В некоторых веществах комбинация обмена и спин-орбитального взаимодействия приводит к тому, что магнитные моменты подрешеток становятся не строго антипараллельны, вследствие чего возникает слабый ферромагнитный момент  $M$ . Такие магнетики называются слабыми ферромагнетиками. К их числу относятся редкоземельные ортоферриты ( $TbFeO_3$ ), гематит  $Fe_2O_3$ ,  $CoCO_3$  и др.

К антиферромагнетикам относятся: хром, марганец, цезий, неодим, самарий и др. Химические соединения на основе металлов переходной группы типа окислов, галогенидов, сульфидов, карбонатов и др.: MnSe,  $FeCl_2$ ,  $FeF_2$ ,  $CuCl_2$ , MnO, FeO, NiO.

**Ферримагнетики** – вещества с нескомпенсированным антиферромагнетизмом.

Ферримагнетик, так же как и антиферромагнетик, состоит из двух ферромагнитных подрешеток, магнитные моменты которых ориентированы навстречу

чу друг другу (рис. 1.12, а). Однако в отличие от антиферромагнетиков эти магнитные моменты не равны друг другу, в результате чего образуется результирующая спонтанная намагниченность, которая исчезает выше температуры Кюри  $T_K$ . Различие магнитных моментов подрешеток обусловлено тем, что подрешетки образуются из ионов разных элементов либо из ионов одного и того же элемента, но с разной валентностью. Следует отметить, что магнетит  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , первое сильномагнитное вещество, известное в глубокой древности, является ферримагнетиком. Одна подрешетка магнетита образована узлами кристаллической решетки с тетраэдрическим кристаллическим окружением, в которых располагаются ионы  $\text{Fe}^{3+}$ , другая подрешетка образована узлами с октаэдрическим окружением, занятыми в равной доле ионами  $\text{Fe}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$ . Таким образом, спонтанная намагниченность ферримагнетика равна разности намагниченностей подрешеток  $I_a$  и  $I_b$ :

$$I_S = I_b - I_a. \quad (1.63)$$

Для магнетита  $|I_b| > |I_a|$  и кривая температурной зависимости  $I_S(T)$  напоминает аналогичную кривую для ферромагнетика. Однако существуют ферримагнетики, в которых магнитные моменты ионов в разных подрешетках находятся в неодинаковых эффективных обменных полях, что приводит к сильно различающейся температурной зависимости намагниченностей подрешеток  $I_b(T)$  и  $I_a(T)$ . Например, в ферритах-гранатах с общей формулой  $\text{R}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  (для  $\text{R} = \text{Gd}, \text{Tb}, \text{Dy}, \text{Ho}, \text{Er}, \text{Tm}$ ) существует температура (ниже точки Кюри  $T_K$ ), где магнитные моменты подрешеток редкоземельных элементов  $I_R$  и железа  $I_{Fe}$  компенсируют друг друга, в результате чего спонтанная намагниченность обращается в ноль (рис. 1.12, б). Эта температура  $T_{comp}$  называется температурой магнитной компенсации.

В металлических ферримагнетиках обменное поле  $H_R$  существенно выше (в несколько раз), чем в ферримагнетиках-изоляторах и полупроводниках. Этот эффект обусловлен тем, что коллективизированные  $3d$ -электроны, подмагниченные собственным обменным взаимодействием, наводят сильную поляризацию в системе электронов проводимости. Эта поляризация сохраняется в металлах на сравнительно больших расстояниях от  $3d$ -атомов и создает сильные обменные поля  $H_R$ , что обеспечивает высокую степень магнитного упорядочения в редкоземельной подрешетке при высоких температурах. Благодаря такому обменному механизму уникальные свойства ионов редкоземельных элементов проявляются в практически важной области комнатных температур.

При  $T > T_K$  ферримагнетик превращается в парамагнетик, однако магнитная восприимчивость  $\chi$  изменяется с температурой по более сложному, чем в ферромагнетиках, закону Нееля. В этом случае кривая  $1/\chi = f(T)$  является нелинейной.

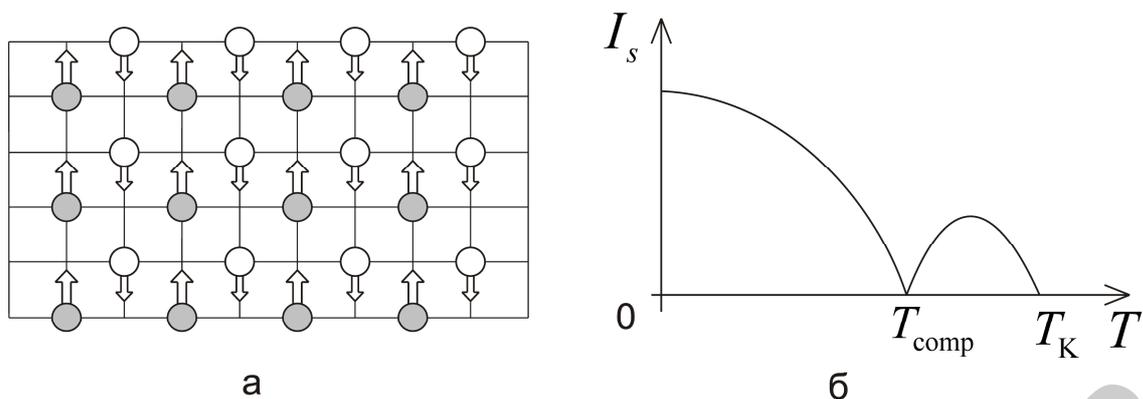


Рис. 1.12. Ферримагнитная структура (а); температурная зависимость спонтанной намагниченности  $I_s$  для ферримагнетика с температурой магнитной компенсации (б)

В последние годы были разработаны новые редкоземельные ферримагнитные металлические материалы – мощные постоянные магниты и материалы с гигантской магнитострикцией. Широко используются в современной технике ферримагнитные полупроводники ферриты-шпинели  $\text{MeOFe}_2\text{O}_3$  ( $\text{Me}^{2+} = \text{Mn}^{2+}$ ,  $\text{Co}^{2+}$ ,  $\text{Ni}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ ), ферриты-гранаты  $\text{R}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ , ферриты  $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$  и др. Благодаря низким потерям на высоких частотах ферриты применяются как сердечники магнитопроводов в дросселях, трансформаторах, магнитных антеннах, а также для управления электромагнитными колебаниями в устройствах сверхвысоких частот.

К ферримагнетикам относятся некоторые упорядоченные металлические и различные оксидные соединения, наибольший интерес среди которых представляют ферриты  $\text{MnOFe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{BaOFe}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $(\text{Ni} \cdot \text{ZnO})\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $(\text{Li}_2\text{O})\text{Fe}_2\text{O}_3$  и др.

Ферримагнетики так же, как ферромагнетики относятся к сильномагнитным материалам, у которых  $\mu \gg 1$ .

**Сперомагнетики** – кристаллические и аморфные материалы, в которых существует равновероятное распределение магнитных моментов в любом микроскопическом объеме (за пределами ближайших соседей), вследствие чего спонтанная намагниченность равна нулю.

В парамагнитном состоянии магнитный момент  $m$  каждого отдельно выбранного иона испытывает сильные флуктуации, поэтому среднее значение по времени для проекции  $m_f$  на любое направление равно нулю (при  $H = 0$ ). Представим себе, что мы охлаждаем парамагнетик, в котором имеются обменные интегралы  $A$  между соседними ионами, имеющие как положительные, так и отрицательные значения. За счет обменных полей тепловые флуктуации ниже некоторой температуры  $T_{\text{СП}}$  будут подавлены, однако магнитный момент  $m_f$  подвергается противодействию локальных микроскопических полей в отличие от ферро- и антиферромагнетиков. В результате образуется магнитное состояние, в котором локализованные магнитные моменты  $m$  испытывают сильные пространственные флуктуации. Проекция  $m_f$  отдельного иона на выбранное

направление (средняя по времени) имеет некоторое не равное нулю значение, как и в ферромагнетике, однако в целом по образцу ситуация меняется кардинально. В самом деле, проведем усреднение по микроскопическому объему, включающему ближайших соседей этого иона. Мы обнаружим, что в некоторых кристаллических и аморфных магнетиках существует равновероятное распределение магнитных моментов  $m_f$  в любом микроскопическом объеме (за пределами ближайших соседей), вследствие чего спонтанная намагниченность равна нулю (рис. 1.13, а). У них температура сперомагнитного упорядочения  $T_{СП}$  обнаруживается по размытому максимуму магнитной восприимчивости. При  $T > T_{СП}$  существует обычный парамагнетизм. Сперомагнетик обладает бесконечно большим числом различных расположений магнитных моментов, которые обладают спонтанной намагниченностью, равной нулю, и имеют одно и то же значение энергии. В них существуют громадное число равновероятных метастабильных состояний, переход между которыми приводит к термическому гистерезису намагниченности и временной нестабильности магнитных свойств. В этих метастабильных состояниях локальные распределения магнитных моментов ближайших ионов, окружающих данный ион, могут различаться. Такие состояния называются *фрустрированными*.

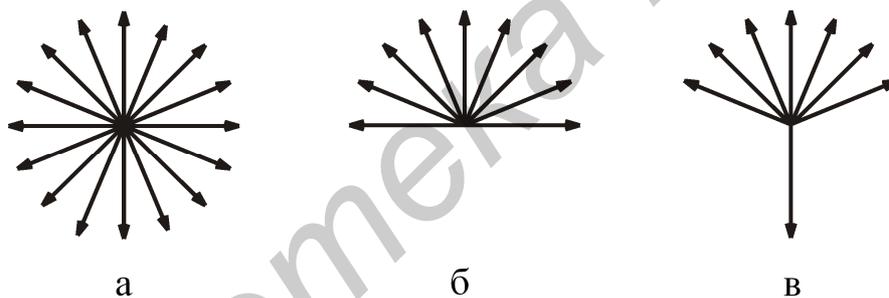


Рис. 1.13. Сперомагнитная (а), асперомагнитная (б) и сперимагнитная (в) структуры

Какие физические механизмы могут приводить к фрустрациям? В металлических магнетиках возникает обменное взаимодействие между электронами незаполненных  $4f$ - (или  $3d$ -) подоболочек атомов переходных элементов и электронами проводимости. Энергия этого  $s$ - $f$ -обменного взаимодействия может быть записана в виде

$$E_{sf} = -A_{sf} S_e S_{4f}, \quad (1.64)$$

где  $A_{sf}$  – интеграл  $s$ - $f$ -обменного взаимодействия,  $S_{4f}$  – спин незаполненной  $4f$ -подоболочки,  $S_e$  – спин электрона проводимости.

В результате  $s$ - $f$ -обменного взаимодействия электроны проводимости подмагничиваются и приобретают некоторую поляризацию, которая осциллирует с затухающей амплитудой с удалением от  $4f$ -иона. Окружающие ионы могут попасть в область как с положительной, так и с отрицательной поляризацией. Знак обменного интеграла определяется направлением поляризации электронов проводимости и расстоянием между ионами.

Наличие положительных и отрицательных обменных интегралов и приводит к сперомагнетизму в некоторых сплавах с невысокой концентрацией парамагнитных ионов, например,  $\text{CuMn}$ , а также в некоторых аморфных сплавах редкоземельных элементов с  $3d$ -переходными элементами. Знакопеременные значения обменного интеграла возникают иногда и при прямом перекрытии волновых функций  $3d$ -элементов, если расстояния между взаимодействующими ионами имеют некоторый разброс в своих значениях. В аморфных магнетиках и прямое, и косвенное (через электроны проводимости) обменные взаимодействия могут создать распределения значений  $A$  с положительным и отрицательным знаками. Сперомагнетизм также часто возникает в «спиновых» стеклах – системах, являющихся твердыми растворами с небольшой концентрацией магнитных ионов в матрице из «немагнитных» ионов.

Спиновые магнитные стекла – сильномагнитные вещества с ферромагнитным порядком, если магнитные свойства в них возникают в результате косвенных обменных взаимодействий через электроны проводимости, и с антиферромагнитным порядком, если возбуждение происходит через промежуточные немагнитные атомы.

Таковыми структурами могут быть также проводящие сплавы с малым содержанием переходных элементов.

В последние годы к спиновым стеклам проявляется значительный интерес как со стороны физиков-экспериментаторов, так и теоретиков. Для объяснения их необычных магнитных свойств требуется развитие принципиально новых теоретических моделей. В принципе они могут служить и в практическом отношении как среды с чрезвычайно высокой плотностью записи информации, в частности, благодаря тому, что в них отсутствует доменная структура.

**Асперомагнетики** – материалы, в которых локализованные магнитные моменты ниже некоторой температуры магнитного упорядочения  $T_{\text{АСП}}$  ориентируются в различных атомных позициях случайным образом, но с преимущественной ориентацией вдоль некоторого направления, вследствие чего возникает спонтанная намагниченность.

Асперомагнетизм довольно часто встречается в аморфных материалах – сплавах и соединениях  $4f$ - и  $3d$ -элементов. В ряде этих магнетиков флуктуации обменных полей выражены менее резко, поэтому в асперомагнетиках имеется некоторое преимущественное направление для магнитных моментов. Среднее значение интеграла обмена  $A$  превышает константу локальной магнитной анизотропии  $D$ :  $|\bar{A}| > |D|$ . Примером могут служить аморфные сплавы  $\text{Gd-Al}$ ,  $\text{Gd-Ag}$ . Другой механизм, приводящий к асперомагнетизму, возможен в материалах, где  $|D| > |\bar{A}|$ . В этом случае магнитные моменты стремятся ориентироваться в направлении локальных осей анизотропии, и, если бы не было обменных взаимодействий, это могло бы привести к сперомагнетизму. Однако обменное поле стягивает магнитные моменты в пределах полусферы (рис. 1.13, б). Асперомагнетизм такого типа встречается в аморфных сплавах типа  $\text{Tb-Ag}$ ,  $\text{Dy-Ni}$  и др.

**Сперимагнетики** – материалы, состоящие из двух (или более) магнитных подсистем, связанных между собой отрицательными обменными взаимодействиями, вследствие чего возникает спонтанная намагниченность.

Сперимагнитная структура до некоторой степени похожа на ферромагнитную структуру. В ней также магнитные моменты подрешеток (в кристаллических материалах) или подсистем (в аморфных материалах) направлены противоположно друг другу. Отличие заключается в том, что в сперимагнетике магнитные моменты в одной или обеих подсистемах ориентируются случайным образом в пределах некоторого пространственного конуса (рис. 1.13, в). Такая ситуация возникает как в кристаллических, так и в аморфных материалах, если ионы одного сорта обладают сильной локальной одноионной анизотропией  $D$ , которая несколько меньше интеграла  $A$  обменного взаимодействия между ионами из разных магнитных подсистем (например аморфные соединения, Tb-Fe, Tb-Co).

### 1.3.4.3. Спиральные и периодические магнитные структуры

Спиральный магнетизм характеризуется спиральным расположением магнитных моментов относительно некоторых кристаллических осей. Он является частным случаем более общего явления – магнитного упорядочения с периодическим изменением компонентов атомных магнитных моментов вдоль кристаллографических направлений.

Наиболее простой случай таких структур – антиферромагнитная спираль, или геликоид. Она встречается в редкоземельных металлах Eu, Tb, Dy, Ho, в соединении  $MnAu_2$  и некоторых окисных соединениях. Эту структуру можно представить как последовательность атомных плоскостей, перпендикулярных оси геликоида. Все атомы одной и той же плоскости имеют одинаково направленные магнитные моменты и образуют магнитный слой.

Компоненты магнитных моментов атомов по декартовым осям  $X$  и  $Y$ , проведенных в плоскости магнитного слоя, могут изменяться по гармоническому закону

$$\dot{M}_X = M_{0X} \sin kz \quad \text{или} \quad \dot{M}_Y = M_{0Y} \sin kz. \quad (1.65)$$

В то же время проекции магнитных моментов на ось геликоида – кристаллографическую ось, перпендикулярную плоскостям магнитных слоев, равны нулю. Результирующий магнитный момент геликоида – антиферромагнитной спирали равен нулю.

В случае если магнитный момент  $M_Z \neq 0$  изменяется по гармоническому закону

$$\dot{M}_Z = M_{0Z} \sin kz, \quad (1.66)$$

то образуется структура, называемая сложной магнитной спиралью.

Представляет интерес синусоидальная структура или статическая продольная спиновая волна, для которой компоненты  $\dot{M}_X = 0$  и  $\dot{M}_Y = 0$  отсутствуют, а компонента  $\dot{M}_Z$  изменяется в соответствии с (1.66). Такая структура

реализуется в некотором интервале температур ниже точки Нееля в металлических хроме и эрбии, непроводящих и полупроводниковых соединениях  $\text{MnSe}_2$ ,  $\text{TbMnO}_3$ ,  $\text{NpAs}$ .

Физические механизмы, приводящие к образованию периодических магнитных структур, весьма сложны и неодинаковы. В наиболее простом случае образование спиральных магнитных структур объясняют конкуренцией положительных (ферромагнитных) обменных взаимодействий ( $A_1 > 0$ ) между ближайшими магнитными слоями и отрицательных (антиферромагнитных) обменных взаимодействий ( $A_2 < 0$ ) между слоями, следующими за ближайшими слоями. В результате такой конкуренции и происходит поворот магнитных моментов на некоторый угол, величина которого определяется отношением  $|A_2 / A_1|$ .

В металлических спиральных магнетиках период этих структур часто не совпадает с периодом кристаллической решетки. Это объясняют тем, что в металлах спиральное магнитное упорядочение локализованных электронов (например  $4f$ -электронов) зависит от специфических особенностей энергетического спектра электронов проводимости ( $s$ -электроны), которые поляризуются за счет  $s$ - $f$ -обменного взаимодействия. Спиральное расположение магнитных моментов  $4f$ -электронов приводит к образованию плоскостей энергетических разрывов и энергетических щелей в энергетическом спектре электронов проводимости, что существенно модифицирует этот спектр.

В результате спиральное и периодическое расположение магнитных моментов становится энергетически более выгодным, чем простое ферромагнитное. В этом случае период магнитной структуры определяется предельным импульсом электронов проводимости – импульсом Ферми.

В последние годы в магнетиках было обнаружено большое число модулированных магнитных структур, период которых не связан с периодом кристаллической решетки (несоизмеримые структуры). Период модуляции может непрерывно изменяться с температурой, при этом его значения не совпадают с периодом кристаллической решетки. Однако при достижении некоторых значений, соизмеримых с периодом кристаллической решетки, период модулированной структуры в некотором интервале температур не изменяется. Другое новое явление, обнаруженное недавно, заключается в появлении в ряде магнетиков дополнительной модуляции периодической магнитной структуры (спин-слип-структуры). Здесь параллельные магнитные моменты соседних слоев как бы соединяются в небольшие блоки, а переход от одного блока к другому сопровождается поворотом магнитных моментов блоков на некоторый угол.

Вплоть до первой половины XX в. развивались теоретические представления о магнетизме и проводились экспериментальные исследования магнитоупорядоченных веществ с коллинеарным расположением магнитных моментов. К ним относятся прежде всего ферромагнетики с одинаковой параллельной ориентацией магнитных моментов ниже температуры Кюри. Это такие классические ферромагнетики, как железо, кобальт, никель и их многочисленные

сплавы, по которым и были выполнены основные исследования по магнетизму. Затем было обнаружено, что наряду с коллинеарными ферромагнетиками существуют такие, где магнитные моменты подрешеток атомов антипараллельны либо образуют небольшой угол. Важный прорыв в области исследования магнитного упорядочения стал возможен после появления нейтронографического метода. Благодаря тому что нейтрон обладает магнитным моментом, дифракция нейтронов позволила по магнитным дифракционным рефлексам идентифицировать сложные спиральные и периодические магнитные структуры в магнитоупорядоченных веществах. В настоящее время исследуется магнитное упорядочение различных сплавов, металлических и полупроводниковых соединений, изоляторов, кристаллических и аморфных веществ. Для объяснения необычных магнитных структур некоторых магнетиков необходимо дальнейшее развитие теории магнетизма.

#### 1.3.4.4. Комплексная магнитная проницаемость

В области электроники используется несколько десятков видов определенной магнитной проницаемости в зависимости от конкретных применений магнитного материала (абсолютная магнитная проницаемость, относительная проницаемость, начальная, максимальная и др.). Согласно материальным уравнениям относительная магнитная проницаемость может рассматриваться как коэффициент пропорциональности между магнитной индукцией  $B$  в материале и индукцией в вакууме  $B_0 = \mu_0 H$ :

$$\mu = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{B}{\mu_0 \cdot H}, \quad \mu = \frac{B \cdot \mu_{\max}}{\mu_0 \cdot H_{\mu \max}} \quad (1.67)$$

и в общем случае зависит от величины напряженности магнитного поля  $H$  (рис. 1.14).

Начальная  $\mu_{\text{нач}}$  и максимальная  $\mu_{\text{max}}$  магнитные проницаемости являются частными случаями нормальной относительной проницаемости (слово «нормальная» принято опускать).

При одновременном воздействии на магнитный материал постоянного  $H_0$  и переменного  $H$ ; магнитных полей и, как правило, при условии  $H \ll H_0$  вводят понятие дифференциальной относительной проницаемости  $\mu_{\text{диф}}$ :

$$\mu_{\text{диф}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dB}{dH}. \quad (1.68)$$

В переменных электромагнитных полях в магнитном материале возникают потери энергии за счет мощности потерь на гистерезис  $P_{\Gamma}$ , мощности потерь на вихревые токи  $P_{\text{В}}$  и дополнительные потери мощности  $P_{\text{Д}}$ . Дополнительные потери мощности или потери мощности на магнитную вязкость (магнитное последствие) обычно находят как разность между полной мощностью потерь и суммой мощностей потерь на гистерезис и вихревые токи:

$$P_D = P - (P_\Gamma + P_B). \quad (1.69)$$

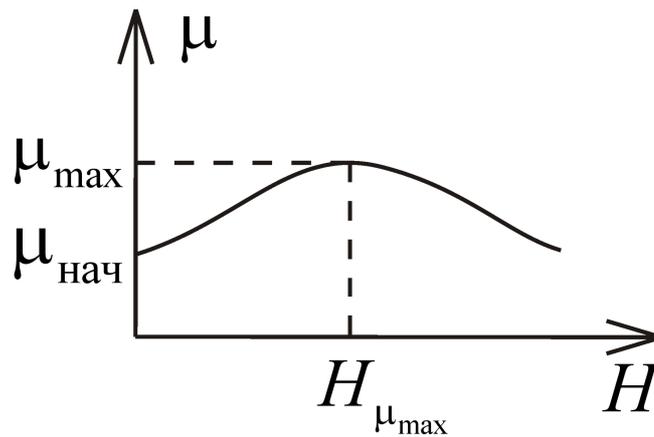


Рис. 1.14. Зависимость  $\mu$  от напряженности магнитного поля  $H$

Магнитная вязкость  $J_n = J_n(t)$  зависит от времени действия магнитного поля. При включении магнитного поля  $H$  быстро достигает значения  $J_S$ , а затем со временем возрастает по экспоненциальному закону, так что  $J_n(t)$  описывается зависимостью

$$J_n(t) = J_{n_0} [1 - \exp(-t/\tau)], \quad (1.70)$$

где  $J_{n_0}$  – намагниченность в момент  $t = \tau$ ,  $\tau$  – время магнитной релаксации.

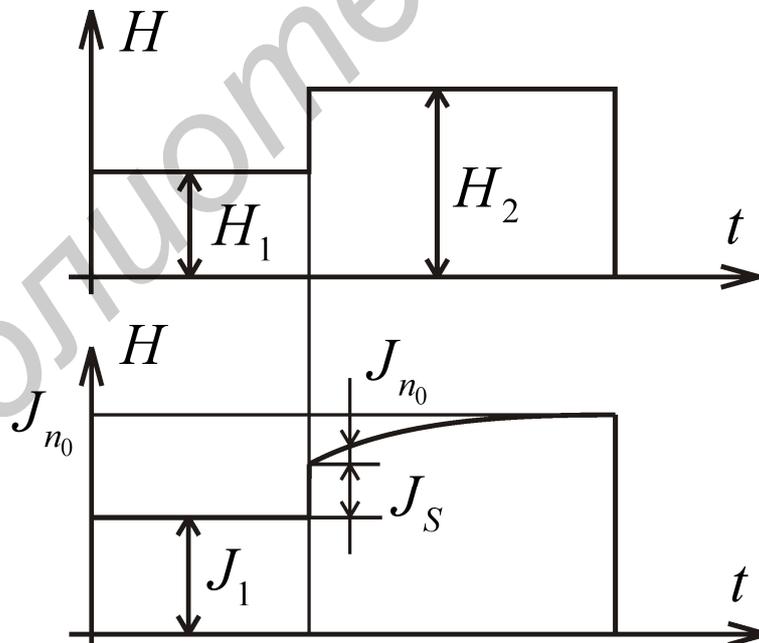


Рис. 1.15. Временная зависимость намагниченности  $J$  магнитного материала от времени действия магнитного поля

На рис. 1.15 показана типичная временная зависимость напряженности магнитного поля и намагниченности магнитного образца. В магнитотвердых магнитных материалах время магнитной релаксации  $\tau$  может достигать нескольких минут. Такое явление называют сверхвязкостью.

В электродинамических задачах потери энергии в магнитных материалах обычно учитываются по аналогии с электрическими потерями (см. п. 1.3.3.2) с помощью комплексной магнитной проницаемости

$$\dot{\mu}(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega). \quad (1.71)$$

С действительной частью  $\mu'(\omega)$  связан коэффициент магнитного преломления  $n_m(\omega) = \sqrt{\mu'(\omega)/\mu_0}$ , а с мнимой  $\mu''(\omega)$  – так называемый тангенс угла магнитных потерь материала  $\operatorname{tg} \delta_m(\omega) = \frac{\mu''(\omega)}{\mu'(\omega)}$ .

Величина, обратная  $\operatorname{tg} \delta_m(\omega)$ , называется добротностью магнитного материала.

#### 1.3.4.5. Электрические свойства магнитных материалов

Удельное электрическое сопротивление металлических магнитных материалов зависит от состава и направления намагниченности по отношению к направлению движения электронов проводимости.

В чистых монокристаллических образцах металлов наблюдается значительная анизотропия электрического сопротивления. Так, в монокристаллах кобальта в направлении оси  $C$   $r_C = 0,103$  мкОм·м, а в плоскости, перпендикулярной этой оси,  $r_P = 0,055$  мкОм·м.

В ферритах по сравнению с металлическими ферромагнетиками удельное электрическое сопротивление много выше, сопоставимо с сопротивлением полупроводников и может меняться в широких пределах в зависимости от состава, типа, элементов структуры, вида примесей и доходить до  $r = 10^7 \dots 10^8$  Ом·м при довольно высокой относительной диэлектрической проницаемости порядка  $\epsilon = 10 \dots 15$ . Так, для феррита иттрия удельное сопротивление  $r = 10^{10} \dots 10^{12}$  Ом·м, для феррита никеля  $r = 10^3 \dots 10^5$  Ом·м, для феррита лития  $r = 1 \dots 10$  Ом·м. Энергия активации проводимости ферритов находится в пределах 0,2 – 2 эВ. В ферритах часто наблюдается прыжковая проводимость, обусловленная перескоком локализованных электронов из одного состояния в другое.

## 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### 2.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

В основе разработанной в 1864 г. шотландским физиком и математиком Джеймсом Клерком Максвеллом (1831 – 1879) теории лежат законы Гаусса для электрического и магнитного полей, закон электромагнитной индукции Фарадея – Генри и закон Ампера для магнитных полей, к которому Максвелл добавил ток смещения. В современной трактовке результаты электромагнитной теории Максвелла, позволяющей определить векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , можно представить в виде четырех дифференциальных уравнений, именуемых системой уравнений Максвелла (УМ) в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - (\text{закон полного тока}), \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\text{закон электромагнитной индукции}), \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho - (\text{закон Гаусса}), \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 - (\text{закон Гаусса}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Для стационарных полей  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ;  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ . В этом случае система (2.1)

распадается на две независимые системы: а) систему уравнений электростатики, определяющую постоянные во времени поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , и б) систему уравнений магнитостатики, определяющую постоянные во времени поля  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ .

Для нестационарных электромагнитных полей из системы уравнений Максвелла (2.1) следует взаимосвязь изменения их электрических и магнитных полей. Наиболее просто в этом убедиться, если рассматривать зависящее от времени электромагнитное поле в среде, в которой нет сторонних зарядов, сторонних токов и отсутствует проводимость ( $\sigma = 0$ ).

Таким условиям соответствует электромагнитное поле в вакууме, в котором отсутствуют источники сторонних токов и зарядов. Очень близкими свойствами обладает сухой воздух, проводимостью которого в обычных условиях можно пренебречь.

В этом случае первые два уравнения системы (2.1) связывают между собой изменение в пространстве и времени электрического и магнитного полей. Отсюда следует основное свойство зависящих от времени электромагнитных полей, состоящее в согласованности изменения электрического и магнитного полей; при изменении во времени электрического поля возникает изменяющееся в пространстве переменное магнитное поле, которое приводит к появлению меняющегося в пространстве электрического поля. И, наоборот, при изменении во времени магнитного поля возникает изменяющееся в пространстве переменное электрическое поле, которое приводит к появлению меняющегося в пространстве магнитного поля.

Физическая причина такой взаимосвязи следует из закона электромагнитной индукции и объясняется наличием тока смещения, связывающего между собой электрическое и магнитное поля. Причём взаимосвязь электрических и магнитных полей имеет место даже в отсутствие сторонних токов и зарядов, являющихся источниками электромагнитного поля.

Источниками электромагнитных волн, как это следует из системы уравнений Максвелла (2.1), являются меняющиеся во времени сторонние токи и заряды. Процесс формирования электромагнитного поля для рамки с изменяющимся во времени током иллюстрирует рис. 2.1. Переменной ток порождает изменяющееся магнитное поле  $H$ ; изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле  $E$ ; изменяющееся электрическое поле порождает изменяющееся магнитное поле  $H$  и т. д.

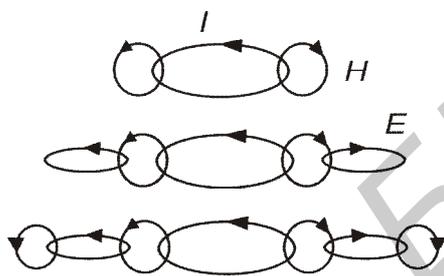


Рис. 2.1. Процесс формирования ЭМП

Уравнения (2.1) описывают поля в локальном масштабе или в данной точке и поэтому называются дифференциальными.

## 2.2. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Уравнения Максвелла в интегральной форме устанавливают взаимосвязь электромагнитных явлений в условиях конечного пространства, характеризуемого объемом  $V$  ограниченным замкнутой поверхностью  $S$ , на которую опирается замкнутый контур  $L$ . Уравнения Максвелла в интегральной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \oint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0, \end{aligned}$$

(2.2)

где  $d\vec{S}$  – векторный дифференциал, перпендикулярный поверхности  $S$ , имеющий размерность площади поверхности,  $d\vec{l}$  – векторный дифференциал длины, параллельный контуру  $L$ , и  $dV$  – единичный объем. Первые два уравнения в системе (2.2) получены из (2.1) с применением теоремы Стокса, а третье и четвертое – с использованием теоремы Остроградского – Гаусса.

Физическую сущность электромагнитной теории Максвелла можно кратко сформулировать в виде четырех постулатов:

1. Источником электрического поля являются электрические заряды.
2. Силовые линии магнитного поля замкнуты либо начинаются и оканчиваются на бесконечности (отсутствие магнитных зарядов).
3. Изменяющийся магнитный поток порождает электрическое поле.
4. Движущийся заряд и изменяющийся электрический ток порождает магнитное поле.

Уравнения Максвелла приняли бы симметричную форму относительно электрических и магнитных величин, если бы плотность магнитного заряда  $\rho_M$  [Вб/м<sup>3</sup>] и плотность магнитного тока  $\vec{J}_M$  [В/м<sup>2</sup>] были также введены в них. Однако экспериментальное доказательство их существования отсутствует.

Система уравнений Максвелла является основой радиотехники и современной радиоэлектроники. Эти уравнения не могут быть выведены из других законов; они основываются на эмпирических исследованиях. Их достоверность проявляется в их способности правильно предсказывать электромагнитные явления.

### 2.3. Граничные условия для векторов поля

В электромагнитных задачах электроники и радиотехники часто приходится сталкиваться с резким изменением свойств среды. В этом случае необходимо знать поведение полей на границах раздела, т. е. знать граничные условия. В связи с тем что свойства среды меняются скачкообразно, можно предположить, что векторы ЭМП будут терпеть разрыв на границе раздела двух сред. Это означает, что дифференциальные соотношения на границе теряют смысл и необходимо использовать уравнения Максвелла в интегральной форме.

При произвольной ориентации векторов относительно границы раздела следует проводить оценку тангенциальных (касательных) и нормальных (перпендикулярных) составляющих векторов поля на обеих сторонах границы раздела двух сред.

Рассмотрим общую границу раздела между двумя средами (рис. 2.2). Среда 1 характеризуется  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$ , а среда 2 –  $\epsilon_2$  и  $\mu_2$ . В дальнейшем поля, перпендикулярные поверхности (границе раздела), обозначены индексом  $n$ , а поля, тангенциальные к поверхности, – индексом  $\tau$ .

### 2.3.1. Тангенциальные составляющие поля

Рассмотрим замкнутый контур с размерами  $\Delta l$  и  $h$  (рис. 2.2). Если  $h \rightarrow 0$ , то из 2-го уравнения Максвелла системы (2.2) получаем

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1\tau} \Delta l - E_{2\tau} \Delta l = -j\omega \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.3)$$

Поток магнитной индукции через контур  $\Delta l h$  исчезает, так как  $h \rightarrow 0$ . Поэтому  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ , или

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{\tau} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0. \quad (2.4)$$

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля непрерывны при переходе границы раздела двух сред.

Для определения граничных условий для тангенциальных составляющих векторов напряженности магнитного поля воспользуемся первым уравнением системы Максвелла (2.2):

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau} \Delta l - E_{2\tau} \Delta l = \int_S (\vec{J} + j\omega \vec{D}) \cdot d\vec{S}. \quad (2.5)$$

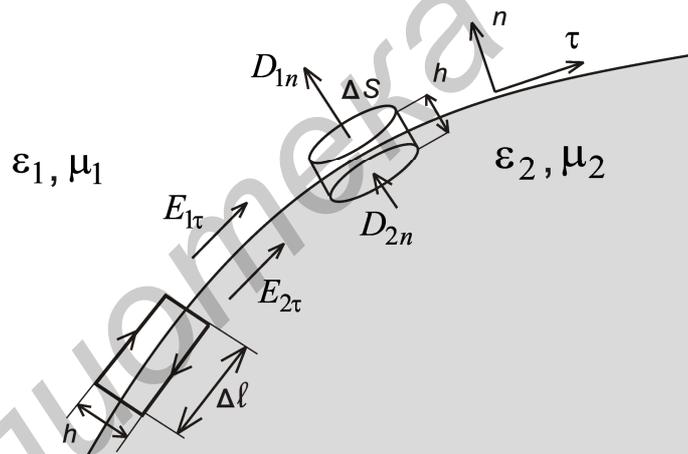


Рис. 2.2. Граница между двумя средами

Если  $h \rightarrow 0$ , то поток электрической индукции через контур стремится к нулю (второе слагаемое в правой части уравнения), тогда как первое слагаемое остается и характеризует возникающий на поверхности границы раздела сред ток проводимости  $\vec{I} = \vec{J}_S \Delta l$  ( $\vec{J}_S$  – плотность поверхностного тока). С учетом вышесказанного можно записать

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\tau} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S. \quad (2.6)$$

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля терпят разрыв, численно равный поверхностной плотности электрического тока.

### 2.3.2. Нормальные составляющие поля

Рассмотрим цилиндрический объем  $\Delta V$  с площадью основания  $\Delta S$  и высотой  $h$  в 1 и 2 средах (см. рис. 2.2). Объем будем считать элементарным со следующими признаками:

- 1) в пределах объема выделенная площадка считается плоской;
- 2) в пределах объема среды 1 и 2 являются однородными;
- 3) в пределах  $\Delta V$  поля в средах 1 и 2 не изменяются.

Воспользуемся третьим уравнением Максвелла в интегральной форме системы (2.2). Если  $h \rightarrow 0$ , получаем

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = \int_V \rho dV = \rho_S \Delta S, \quad (2.7)$$

где  $\rho_S$  – плотность поверхностного заряда на границе раздела. В результате получаем следующее граничное условие:

$$\vec{n}(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = D_{1n} - D_{2n} = \vec{n}(\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) = \epsilon_1 \vec{E}_{1n} - \epsilon_2 \vec{E}_{2n} = \rho_S. \quad (2.8)$$

Используя четвертое уравнение Максвелла системы (2.2), аналогично предыдущему случаю несложно получить граничные условия для векторов магнитной индукции  $\vec{B}$ :

$$\vec{n}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = B_{1n} - B_{2n} = \vec{n}(\mu_1 \vec{H}_1 - \mu_2 \vec{H}_2) = \mu_1 \vec{H}_{1n} - \mu_2 \vec{H}_{2n} = 0. \quad (2.9)$$

### 2.3.3. Система граничных условий на проводящей поверхности

На основании соотношений (2.4, 2.6) и (2.8, 2.9) полная система строгих граничных условий на границе раздела двух сред имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0, \\ \vec{n}(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= 0, \\ \vec{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= 0, \\ \vec{n}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эти уравнения показывают, что тангенциальные составляющие  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  так же, как и нормальные составляющие  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  равны по обе стороны границы раздела, а значит, они постоянны его на всей границе.

В радиотехнике часто рассматривается ситуация, когда имеется граница раздела с хорошим проводником. В хороший проводник поле проникает неглу-

боко, а в идеальный ( $\sigma = \infty$ ) вообще не проникает. При рассмотрении хороший проводник часто заменяют идеальным, так как он без потерь. На стыке идеального проводника и диэлектрика граничные условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{E} &= 0, \\ \vec{n} \times \vec{H} &= \vec{J}_S, \\ \vec{n} \vec{D} &= \rho, \\ \vec{n} \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Граница раздела двух сред, одна из которых является идеальным проводником, называется **электрической стенкой**. Наряду с электрической существует также магнитная стенка, на которой отсутствует тангенциальная составляющая  $\vec{H}$ .

## 2.4. Энергия и мощность электромагнитного поля

### 2.4.1. Удельная мощность сторонних источников поля

Как один из видов материи, ЭМП является носителем энергии. Электромагнитная энергия может преобразовываться в любой другой вид энергии: механическую (ускорение зарядов), тепловую, химическую, внутреннюю энергию кристалла, молекулы, атома и т. д. И, наоборот, все перечисленные виды энергии могут преобразовываться в электромагнитную энергию.

Рассмотрим произведение  $\vec{j}\vec{E} = p_{\Pi\sigma}$ , которое имеет размерность  $[\text{Вт}/\text{м}^3]$  и характеризует удельную мощность потерь в элементарном объеме  $\Delta V$  среды (в пределе  $\Delta V \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим тепловые (джоулевы) потери:  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ . Тогда

$$p_{\Pi\sigma} = \sigma\vec{E} \cdot \vec{E} = \sigma E^2.\tag{2.12}$$

Однако плотность тока  $\vec{j}$  может создаваться не только рассматриваемым полем, но и сторонними по отношению к этому полю силами, которые могут иметь и не электромагнитную природу.

Поэтому плотность тока  $\vec{j}$  можно представить в виде  $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}}$ , где  $\vec{j}_{\text{ст}}$  характеризует действие сторонних источников. Теперь полная удельная мощность в данном поле может быть записана как

$$p = \vec{j}\vec{E} = jE^2 + \vec{j}_{\text{ст}}\vec{E} = p_{\Pi\sigma} - p_{\text{ст}},\tag{2.13}$$

где  $p_{\text{ст}}$  – мощность сторонних источников, отдаваемая данному полю (этим

определяется знак  $p_{\text{ст}}$ ). Таким образом, мощность сторонних источников определяется как  $p_{\text{ст}} = -\vec{j}_{\text{ст}} \vec{E}$ .

### 2.4.2. Баланс энергии электромагнитного поля

Составим баланс энергии ЭМП. Для этого первое уравнение Максвелла в системе (2.1) умножим на  $(-\vec{E})$ , второе – на  $\vec{H}$ . Сложим полученные уравнения и с учетом тождества  $\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H}$  получим

$$\vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} = \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} - \vec{j} \vec{E}. \quad (2.14)$$

Перейдем к интегральной формулировке уравнения, интегрируя левую и правую части по объему  $V$  с граничной поверхностью  $S$  и применяя в левой части теорему Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = -\int_V \left\{ \vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} \right\} dV - \int_V \vec{j} \vec{E} dV = -\int_V \left\{ \vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} \right\} dV + P_{\text{cm}} - P_{\text{лс}} \quad (2.15)$$

В записанном уравнении нам известен смысл только последних двух членов справа – это мощность сторонних источников и омических потерь в объеме  $V$ . Для того чтобы установить физический смысл остальных членов, рассмотрим два следующих предельных случая.

Рассмотрим первый случай, для которого в объеме  $V$ , изолированном от внешнего пространства непрозрачной оболочкой  $S$  ( $p_{\text{ст}} = 0$ ), выполняется условие  $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = 0$ .

Тогда для мощности потерь в объеме  $V$  имеем

$$P_{\text{лс}} = -\int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV.$$

Мощность потерь в изолированном объеме  $V$  должна быть численно равна скорости убывания запасенной энергии  $P_{\text{лс}} = -\frac{dW}{dt}$ . Следовательно,

$$\int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV = \frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV,$$

где  $w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}}$  – удельная энергия ЭМП.

Таким образом,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w_{\text{Э}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{М}}}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Положим, что  $\varepsilon_a \neq f(t)$  и  $\mu_a \neq f(t)$  (диэлектрических и магнитных потерь нет). Тогда

$$\frac{\partial w_{\text{Э}}}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \varepsilon_a \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_a}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right).$$

Таким образом, удельная энергия электрического поля из УМ определяется как

$$w_{\text{Э}} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}. \quad (2.17)$$

Аналогичным путем находим формулу удельной энергии магнитного поля:

$$w_{\text{М}} = \frac{\mu_a H^2}{2}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим второй случай, когда оболочка  $S$  прозрачна для ЭМП в установившемся режиме:  $\frac{dW}{dt} = 0$  и  $P_{\text{ст}} \neq 0$ ,  $P_{\text{Пс}} = 0$ .

В этом случае имеем

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = P_{\text{ст}}. \quad (2.19)$$

С другой стороны, поскольку в рассматриваемом случае в объеме  $V$  нет потерь и нет накопления электромагнитной энергии,  $P_{\text{ст}} = P_{\Sigma}$ , где  $P_{\Sigma}$  – мощность излучения через граничную поверхность  $S$ . Следовательно,

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = P_{\Sigma} = \oint_S \vec{\Pi}_0 d\vec{S}, \quad (2.20)$$

где  $\vec{\Pi}_0 = [\vec{E}, \vec{H}]$ .

Величина  $\vec{\Pi}_0$  называется вектором Умова – Пойтинга. Данный вектор численно равен плотности потока мощности ЭМП и указывает направление ее перемещения в пространстве (перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы электрической и магнитной напряженностей поля (рис. 2.3).

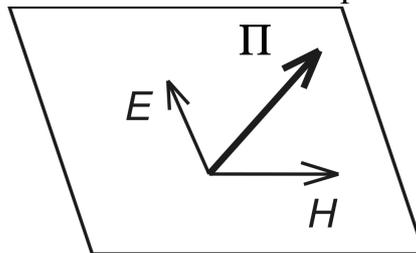


Рис. 2.3. Ориентация векторов поля в пространстве

На основании (2.15) с учетом (2.20) уравнение баланса энергии ЭМП в интегральной форме примет вид

$$\oint_S \vec{\Pi}_0 d\vec{S} + P_{\Pi\sigma} + \frac{dW}{dt} = P_{cm} . \quad (2.21)$$

В дифференциальной форме уравнение баланса энергии выражается в виде

$$\operatorname{div} \vec{\Pi}_0 + p_{\Pi\sigma} + \frac{\partial w}{\partial t} = p_{cm} . \quad (2.22)$$

Уравнения (2.21) и (2.22) именуется теоремами Умова – Пойтинга в интегральной и дифференциальной формах соответственно.

## 2.5. Волновые уравнения

Во многих случаях нет необходимости определять все параметры, входящие в уравнения Максвелла. При заданных значениях токов необходимо найти хотя бы один из параметров поля ( $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ ), по которому может быть определен второй.

Обратимся к двум первым уравнениям Максвелла из системы (2.1), предварительно разделив обе части первого на  $\varepsilon$ , а второе – на  $\mu$ :

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{rot} \vec{H}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} / \varepsilon, \\ \frac{\operatorname{rot} \vec{E}}{\mu} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Применим операцию  $\operatorname{rot}$  к левой и правой частям полученной системы (2.23):

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}}{\varepsilon} = \operatorname{rot} \left( \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} / \varepsilon \right), \\ \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}}{\mu} = -\mu_0 \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{H})}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}}{\varepsilon} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{rot}(\vec{J} / \varepsilon), \\ \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}}{\mu} = -\mu_0 \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{H})}{\partial t}. \end{cases}$$

В левых частях полученной системы воспользуемся тождествами  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$ ;  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ , а в правых вместо пространственных производных подставим их значения, определяемые правыми частями второго, третьего и первого УМ соответственно, и после несложных преобразований получим

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\text{grad} \rho}{\varepsilon_a} + \mu_a \frac{d\vec{J}}{dt}, \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \text{rot} \vec{J}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Полученные уравнения относятся к классу неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка (неоднородные уравнения Даламбера) для векторов напряженности электрического и магнитного полей, которые именуются неоднородными волновыми уравнениями.

Параметр  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8$  м/с характеризует скорость распространения

электромагнитных процессов в вакууме. Тогда величина  $\frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{n^2}{c^2}$  ( $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – коэффициент преломления среды), стоящая перед второй производной по времени (2.24), учитывает конечную скорость распространения электромагнитных процессов в среде с параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

## 2.6. Электродинамические потенциалы

В ряде случаев с целью упрощения решения электродинамических задач вместо напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$  используют вспомогательные функции, именуемые электродинамическими потенциалами:  $\vec{A}$  и  $\varphi$ . Так как магнитное поле имеет вихревой характер, векторный потенциал  $\vec{A}$  связан с магнитной индукцией

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (2.25)$$

и для него должно выполняться условие  $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$ . Подстановка (2.25) во второе УМ дает

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Полученное условие означает, что функция, стоящая в скобках (2.26), является потенциальной и ее можно выразить через скалярный потенциал  $\varphi$ , причем  $\text{rot} \text{grad} \varphi = 0$  и, следовательно,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi. \quad (2.27)$$

Сформулируем теперь уравнения, определяющие электродинамические потенциалы  $\vec{A}$ ,  $\varphi$ . Для этого представим первое и третье уравнения Максвелла в виде

$$\frac{1}{\dot{\mu}_a} \operatorname{rot} \vec{B} = \dot{\epsilon}_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (2.28)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.29)$$

Используя (2.25) и (2.27) в (2.28) и (2.29), получим уравнения ЭМП для электродинамических потенциалов  $\vec{A}$ ,  $\varphi$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + \dot{\mu}_a \vec{j}, \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\rho}{\dot{\epsilon}_a}. \quad (2.31)$$

Наиболее простой вид уравнения (2.30), (2.31) принимают, если использовать калибровку Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

и тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ :

$$\nabla^2 \vec{A} - \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\dot{\mu}_a \vec{j}; \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 \varphi - \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\dot{\epsilon}_a}. \quad (2.34)$$

Для описания электростатического поля (поля неподвижных и неизменяющихся во времени зарядов  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ ) из (2.31) получим волновое уравнение электростатики

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (2.35)$$

а для стационарного поля (поля неизменного во времени тока) из (2.33) волновое уравнение для поля постоянного тока  $\left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$  примет вид

$$\nabla^2 \vec{A} = -\dot{\mu}_a \vec{j}. \quad (2.36)$$

Волновые уравнения вида (2.35) и (2.36) получили названия волновых уравнений Пуассона. Уравнения Пуассона можно записать для силовых характеристик поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Для этого в (2.35) в обеих частях применим

операцию *grad* и, учитывая (2.27), получим

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\text{grad } \rho}{\varepsilon_a}. \quad (2.37)$$

Применим операции *rot* в (2.36), и с учетом (2.25) для стационарного поля уравнение Пуассона примет вид

$$\nabla^2 \vec{H} = \text{rot } \vec{J}. \quad (2.38)$$

Если рассматриваемые области пространства не содержат источников поля ( $\rho=0$  и  $\vec{J}=0$ ), уравнения (2.24) преобразуются в однородные волновые уравнения относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\dot{\varepsilon} \dot{\mu}}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\dot{\varepsilon} \dot{\mu}}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.40)$$

а уравнения (2.33), (2.34) – относительно векторов  $\vec{A}$  и  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \vec{A} - \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0; \quad (2.41)$$

$$\nabla^2 \varphi - \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.42)$$

Для электростатического поля уравнение (2.39) и (2.42) преобразуются в уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= 0, \\ \nabla^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

## 2.7. Вектор Герца

Определим векторный потенциал через электрический вектор Герца  $\vec{\Pi}^e$  следующим образом:

$$\vec{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}.$$

Скалярный потенциал  $\varphi$  определим через  $\vec{\Pi}^e$  так, чтобы выполнялось условие калибровки Лоренца (2.32):

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\Pi}^e,$$

тогда  $\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}^e$ .

Указанные определения возможны только при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ , т. е. для переменных полей. В общем случае для определения статических и стационарных компонент ЭМП необходимо определять четыре составляющие потенциалов  $\vec{A}$  и  $\varphi$ , а при введении  $\vec{\Pi}^e$  векторы поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  определяются только через один вектор  $\vec{\Pi}^e$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A} = \varepsilon_a \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right), \quad (2.44)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^e. \quad (2.45)$$

Выясним физический смысл  $\vec{\Pi}^e$ . Для этого установим его источник. Обратимся к понятию поляризации среды и вектору поляризации  $\vec{p}$ .

$$\oint_S \vec{p} d\vec{S} = -q^{\text{связ}} = -\int_V \rho^{\text{связ}} dV. \quad (2.46)$$

Здесь  $q^{\text{связ}}$  – связанный заряд, пересекающий поверхность  $S$  при поляризации. Уравнение (2.46) можно переписать, используя теорему Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{p} dV = -\int_V \rho^{\text{связ}} dV.$$

Ввиду произвольности объема  $V$  получаем дифференциальный эквивалент (2.46):

$$\operatorname{div} \vec{p}_{\text{ст}} = -\rho^{\text{связ}}. \quad (2.47)$$

Если действуют сторонние источники, создающие  $\vec{p}_{\text{ст}}$  и  $\rho^{\text{ст}}$ , то между ними, очевидно, должна существовать идентичная связь:

$$\operatorname{div} \vec{p}_{\text{ст}} = -\rho^{\text{ст}}. \quad (2.48)$$

Дифференцируя по времени (2.48) и используя уравнение непрерывности (1.3), получим

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho^{\text{ст}}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{ст}}. \quad (2.49)$$

Из уравнения (2.49) с учетом тождества  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$  получим

$$\vec{j}_{\text{ст}} = \frac{\partial \vec{p}_{\text{ст}}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{j}_{\text{ст}}^{\text{P}} + \vec{j}_{\text{ст}}^{\text{З}}.$$

Здесь  $\vec{j}_{\text{CT}}^{\text{P}} = \frac{\partial \vec{p}^{\text{CT}}}{\partial t}$  – разомкнутая плотность тока, связанная с  $c^{\text{CT}}$ , а  $\vec{j}_{\text{CT}}^3$  – замкнутая, вихревая плотность тока, для которой  $\text{div} \vec{j}_{\text{CT}}^3 = 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $\vec{j}_{\text{CT}}^3 = 0$  (процессы зависят только от  $\vec{j}_{\text{CT}}^{\text{P}}$ ). Рассматриваемый случай может соответствовать, например, возбуждению ЭМП с помощью системы диполей, образованных разомкнутыми проводниками. Тогда УМ принимают вид

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_{\text{CT}}}{\partial t}, \quad (2.50)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (2.51)$$

Подставим в (2.50) выражения для  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ , определяемые с помощью (2.44) и (2.45):

$$\varepsilon_a \text{rot rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left( -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + \text{grad div} \vec{\Pi}^e \right) + \frac{\partial \vec{p}^{\text{CT}}}{\partial t}.$$

Используя в левой части записанного уравнения тождество  $\text{rot rot} \vec{\Pi}^e = \text{grad div} \vec{\Pi}^e - \nabla^2 \vec{\Pi}^e$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\nabla^2 \vec{\Pi}^e + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} - \frac{\vec{p}^{\text{CT}}}{\varepsilon_a} \right\} = 0.$$

Откуда для нетривиального случая  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  окончательно имеем

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = -\frac{\vec{p}^{\text{CT}}}{\varepsilon_a}. \quad (2.52)$$

Волновое уравнение для  $\vec{\Pi}^e$  (2.52) по структуре не отличается от волновых уравнений вида (2.24) и (2.33), (2.34). Источником же  $\vec{\Pi}^e$ , как следует из (2.52), является сторонняя поляризация  $\vec{p}^{\text{CT}}$ , откуда и название этого вектора – поляризационный потенциал. Простая связь  $\vec{\Pi}^e$  и  $\vec{p}^{\text{CT}}$  весьма полезна при решении конкретных задач. Например, если  $\vec{p}^{\text{CT}} = \vec{z}_0 p^{\text{CT}}$  (т. е.  $\vec{p}^{\text{CT}}$  имеет только  $z$ -компоненту), из (2.52) очевидно, что для описания возбуждаемого ЭМП достаточно использовать только один компонент  $\vec{\Pi}^e = \vec{z}_0 \vec{\Pi}^e = \Pi_z^e$ . В этом случае ЭМП имеет только пять компонент (вектор  $\vec{H}$  не содержит продольной компоненты  $H_z$ ). Такое поле принято называть поперечно-магнитным (ПМ) или электрическим ( $E$ ) полем.

## 2.8. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла

Обратимся теперь к замкнутым токам. Как известно из решения задач магнитостатики, магнитное поле рамки с током  $i$  соответствует полю магнитного диполя, т. е. магнитный момент  $\vec{M}$  замкнутого тока определяется как

$$\vec{M} = i\mu_a S\vec{n},$$

где  $S\vec{n}$  – вектор-площадка, охватываемая током  $i$ . С другой стороны, можно представить посредством фиктивных магнитных зарядов  $q_m$ , сосредоточенных в диполе длиной  $\vec{\ell}$ :

$$\vec{M} = i\mu_a S\vec{n} = \vec{\ell}q_m.$$

В свою очередь  $i_m = \frac{dq_m}{dt}$ , где  $i_m$  – разомкнутый магнитный ток.

Таким образом, замкнутый ток  $i$  создает поле, подобное тому, которое возбуждает разомкнутый магнитный ток  $i_m$ . Такие эквивалентные  $q_m$  и  $i_m$  называются фиктивными магнитными зарядами и токами. В ряде случаев такая замена эффективна, поскольку позволяет не решать непосредственно поставленную задачу, а воспользоваться уже решенной с соответствующими переобозначениями.

При отсутствии электрических зарядов и введении фиктивных магнитных токов и зарядов УМ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^m; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= -\rho^m. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Очевидно, что от системы (2.53) можно перейти к исходным УМ (2.1) путем следующей замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \varepsilon_a \leftrightarrow \mu_a, \quad \vec{j}^m \rightarrow -\vec{J}, \quad \vec{J} \rightarrow \vec{j}^m, \quad \rho^m \rightarrow -\rho, \quad \rho \rightarrow \rho^m.$$

Это свойство называется перестановочной двойственностью УМ, что позволяет, как ранее указывалось, не решать ряд задач непосредственно, а воспользоваться переобозначениями в решении, относящемся к «двойственной» задаче. В частности, очевидно, что задачу возбуждения ЭМП замкнутыми токами решать как самостоятельную бессмысленно, так как она формулируется как задача возбуждения ЭМП разомкнутыми магнитными токами, т. е. в виде двойственной уже решенной задачи возбуждения ЭМП разомкнутыми электрическими токами.

Для разомкнутых магнитных токов, как и в электрическом случае, имеет

МЕСТО СВЯЗЬ

$$\vec{j}_m = \frac{\partial \vec{M}^{\text{ст}}}{\partial t},$$

где  $\vec{M}^{\text{ст}}$  – намагниченность среды, создаваемая  $\vec{j}^m$ .

Второе УМ при этом записывается в виде

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{M}^{\text{ст}}}{\partial t}. \quad (2.54)$$

По аналогии с «электрической» задачей введем магнитный вектор Герца  $\vec{\Pi}^m$ :

$$\vec{E} = -\mu_a \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t} \right), \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55), (2.56) во второе уравнение системы (2.53), получаем при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  следующее волновое уравнение относительно  $\vec{\Pi}^m$ :

$$\vec{H} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} + \text{grad div } \vec{\Pi}^m. \quad (2.56)$$

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^m - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial \tau^2} = \frac{\vec{M}^{\text{ст}}}{\mu_a}. \quad (2.57)$$

Структура уравнения полностью идентична (2.52), что непосредственно может быть использовано при решении двойственных задач путем переобозначений.

Следует отметить, что если специфика задачи такова, что при  $\vec{M}_{\text{ст}} = \vec{z}_0 M_{\text{ст}}$ , то достаточно использовать только одну компоненту  $\vec{\Pi}^m = \vec{z}_0 \vec{\Pi}^m = \Pi_z^m$ . Компонентой  $\Pi_z^m$  определяются в соответствии с (2.57) ЭМП, в которых отсутствует компонента  $E_z$ . Такие поля называются поперечно-электрическими или магнитными.

## 2.9. Уравнения электродинамики для монохроматического поля

### 2.9.1. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Любая функция во временной области может быть представлена в частотной области виде ряда гармонических составляющих, характеризуемых амплитудным значением  $A_N$ , частотой  $\omega_n$  и начальной фазой  $\varphi_n$  для каждой гармонической составляющей:

$$\dot{A}(t) = \sum_{i=0}^N A_N \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Для узкополосного процесса характеристики поля могут быть исследованы в предположении, что ЭМП имеет монохроматический характер, т. е. для одной спектральной составляющей  $\omega$ . В этом случае характеристики поля и возбуждающие их источники, полагая начальную фазу  $\varphi_n = 0$ , представляются в виде комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \vec{E}_m e^{j\omega t}; & \dot{\vec{D}} &= \vec{D}_m e^{j\omega t}; & \dot{\vec{H}} &= \vec{H}_m e^{j\omega t}; & \dot{\vec{B}} &= \vec{B}_m e^{j\omega t}; \\ \dot{\vec{J}} &= \vec{J}_m e^{j\omega t}; & \dot{\rho} &= \rho_m e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Подстановка (2.58) в систему УМ (2.1) (операция дифференцирования во временной области  $\frac{\partial}{\partial t}$  экспоненциальных функций типа (2.58) эквивалентна операции умножения на  $j\omega$  в спектральной области) дает

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}_m = j_m \omega \vec{D}_m + \vec{J}_m; \\ \text{rot } \vec{E}_m = -j\omega \vec{B}_m; \\ \text{div } \vec{D}_m = \rho_m; \\ \text{div } \vec{B}_m = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Система уравнений (2.59) именуется системой уравнений Максвелла в комплексной форме.

### 2.9.2. Волновые уравнения в комплексной форме

Для гармонического поля волновые уравнения для векторов поля можно получить из (2.24), если учесть, что операция  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  во временной области эквивалентна умножению на  $(j\omega)^2 = -\omega^2$  в спектральной:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \vec{H}_m &= -\text{rot } \vec{J}_m^{\text{ст}}, \\ \nabla^2 \vec{E}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \vec{E}_m &= \frac{\text{grad } \rho_m}{\epsilon \epsilon_0} - j\omega \mu \mu_0 \vec{J}_m^{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Аналогичные волновые уравнения для гармонических зависимостей можно записать для векторного  $\vec{A} = \vec{A}_m e^{j\omega t}$  и скалярного потенциалов

$$\varphi = \varphi_m e^{j\omega t} :$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A}_m - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \vec{A}_m &= -\mu_a \vec{J}_m; \\ \nabla^2 \varphi_m - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \varphi_m &= -\frac{\rho_m}{\epsilon_a}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

а также для электрического  $\vec{\Pi}^e = \vec{\Pi}_m^e e^{j\omega t}$  и магнитного  $\vec{\Pi}^m = \vec{\Pi}_m^m e^{j\omega t}$  векторов Герца.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\Pi}_m^e - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \vec{\Pi}_m^e &= -\frac{\vec{p}_m^{\text{сг}}}{\epsilon_a}; \\ \nabla^2 \vec{\Pi}_m^m - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \vec{\Pi}_m^m &= \frac{\vec{M}_m^{\text{сг}}}{\mu_a}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Волновые уравнения электродинамики в комплексной форме для гармонических полей вида (2.60) – (2.62) получили наименование неоднородных уравнений Гельмгольца.

Если в системах уравнений сторонние токи и заряды отсутствуют, то данные неоднородные уравнения переходят в однородные уравнения Гельмгольца относительно напряженностей ЭМП:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H}_m + k^2 \vec{H}_m &= 0; \\ \nabla^2 \vec{E}_m + k^2 \vec{E}_m &= 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

векторного и скалярного потенциалов:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A}_m - k^2 \vec{A}_m &= 0; \\ \nabla^2 \varphi_m - k^2 \varphi_m &= 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

и относительно электрического и магнитного векторов Герца:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\Pi}_m^e - k^2 \vec{\Pi}_m^e &= 0; \\ \nabla^2 \vec{\Pi}_m^m - k^2 \vec{\Pi}_m^m &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

В уравнениях (2.63) – (2.65) используется новый параметр, именуемый постоянной распространения в среде с комплексными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon\mu} = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu} = k_0 \sqrt{n}, \quad (2.66)$$

где  $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$  – скорость света в вакууме,  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота поля,  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число в вакууме и  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – коэффициент преломления среды (см. подразд. 1.3.3).

### 2.9.3. Теоремы об активной и реактивной мощности

Составим баланс энергии в комплексной форме. Для этого умножим первое комплексно сопряженное УМ в системе (2.59) на  $(-\dot{\vec{E}}_m)$ , второе – на  $\dot{\vec{H}}_m^*$  и сложим. В результате получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] &= -j\omega \left\{ \dot{\mu}'_a H_m^2 - \dot{\varepsilon}'_a E_m^2 \right\} - \dot{\vec{E}}_m \dot{j}_m^{*ст} = \\ &= -j\omega \left\{ \mu'_a H_m^2 - \varepsilon'_a E_m^2 \right\} - \omega \left\{ \mu''_a H_m^2 + \varepsilon''_a E_m^2 \right\} - \dot{j}_m^{*ст} \dot{\vec{E}}_m. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Усреднение за период  $T$  составляющих ЭМП с учетом тождества  $\overline{\vec{V}_1(\omega t) \vec{V}_2(\omega t)^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{V}}_1 \dot{\vec{V}}_2^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{V}}_1^* \dot{\vec{V}}_2)$  позволяет представить компоненты (2.67) в виде

$$\overline{\Pi_0^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] = \operatorname{Re} \dot{\Pi}_0, \quad \dot{\Pi}_0 = \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right], \quad (2.68)$$

$$\overline{w_{\mathcal{E}}^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\dot{\varepsilon}'_a \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^*}{2} \right) = \frac{\varepsilon'_a E_m^2}{4}, \quad (2.69)$$

$$\overline{w_{\mathcal{H}}^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\dot{\mu}'_a \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^*}{2} \right) = \frac{\mu'_a H_m^2}{4}, \quad (2.70)$$

$$\overline{p_{ст}^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( -\dot{j}_m^* \dot{\vec{E}}_m \right) = \frac{\omega}{2} \left\{ \mu''_a H_m^2 + \varepsilon''_a E_m^2 \right\}, \quad (2.71)$$

$$p_{ст} = -\frac{\dot{j}_m^{*ст} \dot{\vec{E}}_m}{2} = p_a + jp_r. \quad (2.72)$$

С учетом (2.68) – (2.72) уравнение баланса энергии в дифференциальной форме (2.67) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\Pi}}_0 + \bar{P}_{\Pi}^T + 2j\omega \{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_{\Xi}^T \} = P_{\text{ст}}. \quad (2.73)$$

Распространяя (2.73) на конечный объем  $V$  околнуренный поверхностью  $S$  и используя теорему Остроградского – Гаусса, баланс энергии можно представить в интегральной форме:

$$\oint_S \dot{\vec{\Pi}}_0 d\vec{S} + \bar{P}^T + j2\omega \{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_{\Xi}^T \} = P_{\text{ст}}, \quad (2.74)$$

где

$$\bar{P}_{\text{ст}}^T = \frac{\omega}{2} \int_V \{ \mu_a'' H_m^2 + \varepsilon_a'' E_m^2 \} dV,$$

$$\bar{W}_{\Xi}^T = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_V \varepsilon_r' E_m \cdot E_m^* dV = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_V \varepsilon_r' |E_m|^2 dV,$$

$$\bar{W}_M^T = \frac{\mu_0}{4} \int_V \mu_r' H_m \cdot H_m^* dV = \frac{\mu_0}{4} \int_V \mu_r' |H_m|^2 dV,$$

$$P_{\text{ст}} = \int_V (p_a + jp_r) dV = P_a + jP_r.$$

Разделяя действительную и мнимую части уравнения (2.74), получаем теорему об активной мощности, которая гласит:

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\vec{\Pi}}_0 d\vec{S} + \bar{P}_{\Pi}^T = \operatorname{Re} \oint_S \dot{\vec{\Pi}}_0 d\vec{S} + \frac{\omega}{2} \int_V \{ \mu_a'' H_m^2 + \varepsilon_a'' E_m^2 \} dV = P_a, \quad (2.75)$$

активная мощность  $P_a$ , развиваемая в объеме  $V$ , расходуется на потери в объеме  $V$  и активную мощность излучения через граничную поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , и теорему о реактивной мощности:

$$j \oint_S \dot{\vec{\Pi}}_0 d\vec{S} + 2\omega \{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_{\Xi}^T \} = P_r \quad (2.76)$$

Для выяснения смысла теоремы о реактивной мощности рассмотрим случай, когда поток реактивной мощности через граничную поверхность  $S$  отсутствует. Тогда

$$2\omega \{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_{\Xi}^T \} = P_r.$$

Если частота источника  $\omega$  соответствует одной из резонансных частот объема  $V - \omega_{oi}$ , то  $\bar{W}_M^T = \bar{W}_{\Xi}^T$  и реактивная мощность  $P_r = 0$ .

При  $\omega < \omega_{oi}$  и  $\bar{W}_M^T = \bar{W}_{\Xi}^T$  необходим сторонний накопитель электрической энергии, которым становится источник питания данного объема (причем обмен энергии происходит дважды за период). Таким образом, реактивная мощность  $P_r$  количественно описывает колебания энергии между источником и нагрузкой при  $\omega \neq \omega_{oi}$ .

## 2.10. Решения уравнений электродинамики в комплексной форме

### 2.10.1. Единственность решений уравнений Максвелла

Пусть в некотором объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , заданы плотности сторонних токов  $\vec{J}_{m1}^{ct}$  и  $\vec{J}_{m2}^{ct}$  (рис. 2.4), для которых выполняются уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_{1m} = -j\omega\mu\mu_0\vec{H}_{1m}, \\ \text{rot } \vec{H}_{1m} = j\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_{1m} + \vec{J}_{m1}^{ct}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E}_{2m} = -j\omega\mu\mu_0\vec{H}_{2m}, \\ \text{rot } \vec{H}_{2m} = j\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_{2m} + \vec{J}_{m2}^{ct}. \end{cases}$$

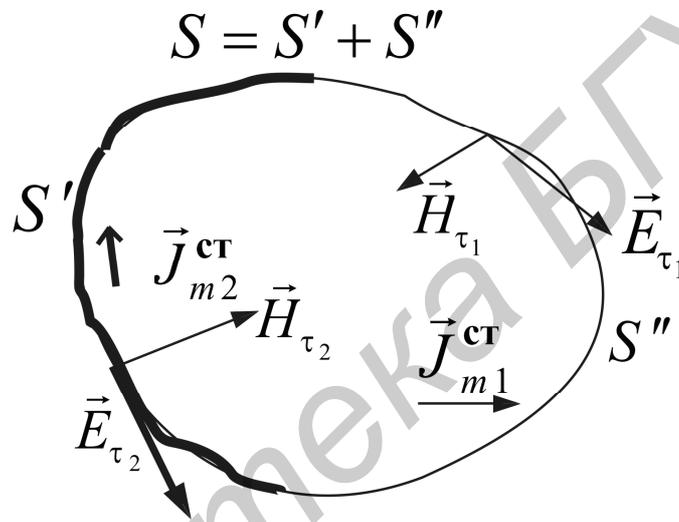


Рис. 2.4. Сторонние токи в ограниченном объеме

Если  $\vec{J}_m^{ct} = \vec{J}_{m1}^{ct} = \vec{J}_{m2}^{ct}$ , то, вычитая из первой пары уравнений вторую, можно получить разностные уравнения

$$\begin{cases} \text{rot } \Delta\vec{E}_m = -j\omega\mu\mu_0\Delta\vec{H}_m; \\ \text{rot } \Delta\vec{H}_m = j\omega\varepsilon\varepsilon_0\Delta\vec{E}_m, \end{cases} \quad (2.77)$$

где 
$$\begin{cases} \Delta\vec{E}_m = \vec{E}_{1m} - \vec{E}_{2m}, \\ \Delta\vec{H}_m = \vec{H}_{1m} - \vec{H}_{2m}. \end{cases}$$

На основании баланса энергии (2.75) для системы (2.77) можно записать

$$\oint_S [\Delta\vec{E}_m, \Delta\vec{H}_m] d\vec{S} = \frac{\omega}{2} \int_V [\varepsilon''\varepsilon_0\Delta\vec{E}_m\Delta\vec{E}_m^* + \mu''\mu_0\Delta\vec{H}_m\Delta\vec{H}_m^*] dV, \quad (2.78)$$

где  $\varepsilon''$  и  $\mu''$  – мнимые части комплексной диэлектрической и относительной магнитной проницаемостей. Для любой физической среды  $\varepsilon''$  и  $\mu'' > 0$ . Поэтому, распространяя пределы интегрирования на бесконечность ( $S \rightarrow \infty$ ), интеграл по объему будет стремиться к нулю. Это возможно, когда  $\Delta \vec{E}_m, \Delta \vec{H}_m \rightarrow 0$ , а следовательно, если существуют различные решения для  $\Delta H_{mi}$  и  $E_{mi}$ , то они равны.

Поверхностный интеграл обращается в ноль, если заданы тангенциальные составляющие  $E_\tau$  или  $H_\tau$  на всей поверхности  $S$ , или  $E_{\tau 1}$  на  $S'$  и  $H_{\tau 1}$  на  $S''$  ( $H_{\tau 2}$  на  $S''$  и  $E_{\tau 2}$  на  $S''$ , так что  $S = S' + S''$ ), – так называемая внутренняя задача электродинамики. Для внешней задачи, если поле определяется вне объема  $V$ , дополнительным условием является требование, чтобы  $\vec{\Pi}$  убывал с расстоянием от источника поля не медленнее чем  $\frac{1}{r^2}$ , а  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  – не медленнее  $\frac{1}{r}$ .

### 2.10.2. Лемма Лоренца и принцип взаимности

Запишем первых два уравнения Максвелла. Умножим первую пару уравнений на  $\vec{J}_{m1}^{ct}$ , а вторую – на  $\vec{J}_{m2}^{ct}$ . Первое уравнение первой пары умножим на  $\vec{E}_{m2}$ , второе – на  $\vec{H}_{m1}$ . Первое уравнение полученной второй пары умножим на  $\vec{E}_{m1}$ , а второе – на  $\vec{H}_{m2}$ . В полученной системе уравнений вычтем из третьего уравнения первое, а из четвертого – второе. Таким образом, получим систему, состоящую из новых уравнений. Вычитая из полученного второго уравнения первое и применяя в правой части полученного равенства тождество  $\vec{F} \text{rot } \vec{V} - \vec{V} \text{rot } \vec{F} = \text{div}[\vec{F}, \vec{V}]$ , на основании теоремы Остроградского – Гаусса можем окончательно записать

$$\oint_S \left\{ [\vec{E}_{m2}, \vec{H}_{m1}] - [\vec{E}_{m1}, \vec{H}_{m2}] \right\} d\vec{S} = \int_V \left( \vec{J}_{m2}^{cm} \vec{E}_{m1} - \vec{J}_{m1}^{cm} \vec{E}_{m2} \right) dV. \quad (2.79)$$

Соотношение (2.79) называется леммой Лоренца и устанавливает связь между соотношением значений полей, созданных двумя различными источниками  $\vec{J}_{m1}^{ct}$  и  $\vec{J}_{m2}^{ct}$  в одной и той же изотропной среде.

Устремляя пределы интегрирования в (2.79) на бесконечность ( $S \rightarrow \infty$ ), получим следующее уравнение:

$$\int_V \vec{J}_{m2}^{ct} \vec{E}_{m1} dV = \int_V \vec{J}_{m1}^{ct} \vec{E}_{m2} dV. \quad (2.80)$$

Уравнение (2.80) является интегральной формулировкой принципа взаимности для двух различных источников поля, расположенных в объеме одной и той же изотропной среды.

### 2.10.3. Простейшее решение уравнений электродинамики

Для области без сторонних источников поля решение волновых уравнений Гельмгольца, например вида (2.63), в общем случае представляется в виде суммы двух векторных гармонических полей:

$$\begin{aligned}\vec{E}_m &= \vec{E}_m^+ + \vec{E}_m^- \\ \vec{H}_m &= \vec{H}_m^+ + \vec{H}_m^-\end{aligned}\quad (2.81)$$

где  $\vec{E}_m^+$ ,  $\vec{H}_m^+$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей, уходящих на бесконечность, а  $\vec{E}_m^-$ ,  $\vec{H}_m^-$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей приходящих в точку наблюдения из бесконечности. Полагая в системе (2.59)  $\vec{j}_m = 0$ , первые два УМ примут вид

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}_m^\pm = j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E}_m^\pm \\ \text{rot } \vec{E}_m^\pm = -j\omega\mu\mu_0 \vec{H}_m^\pm \end{cases}, \quad (2.82)$$

из которых несложно определить связь электрического и магнитного полей:

$$\vec{E}_m^\pm = -j \frac{1}{\omega\epsilon\epsilon_0} \text{rot } \vec{H}_m^\pm = -j \frac{1}{\omega\epsilon\epsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \pm jk \\ H_{xm}^\pm & H_{ym}^\pm & H_{zm}^\pm \end{vmatrix} = \pm \dot{W}_C \left[ \vec{H}_m^\pm, \vec{e}_z \right] \quad (2.83)$$

и напряженности магнитного поля с напряженностью электрического поля

$$\vec{H}_m^\pm = j \frac{1}{\omega\mu\mu_0} \text{rot } \vec{E}_m^\pm = j \frac{1}{\omega\mu\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \pm jk \\ E_{xm}^\pm & E_{ym}^\pm & E_{zm}^\pm \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\dot{W}_C} \left[ \vec{E}_m^\pm, \vec{e}_z \right], \quad (2.84)$$

где

$$\dot{W}_C = \frac{\dot{E}_{\perp m}^\pm}{\dot{H}_{\perp m}^\pm} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\epsilon}}} = W_0 \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\epsilon}}} = |\dot{W}_C| e^{j\phi_W} - \quad (2.85)$$

волновое или характеристическое сопротивление среды,

$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377$  [Ом] – характеристическое сопротивление вакуума.

Соотношения (2.83) и (2.84) устанавливают поперечный характер электромагнитного поля, т. е. векторы напряженности электрического и магнитного полей взаимно ортогональны друг к другу и направлению распространения ЭМП в пространстве. Такое ЭМП называется поперечным, или Т-типом (Transvers – поперечный), или ТЕМ (Transvers ElectroMagnetic – поперечно-электромагнитным)-полем.

Библиотека БГУИР

### 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

#### 3.1. Виды электромагнитных волн

Процесс согласованного изменения электрического  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и магнитного  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  полей в пространстве и времени при распространении электромагнитного возмущения из одной точки пространства в другую получил название **электромагнитной волны** (ЭМВ).

Волновой характер ЭМП непосредственно следует из волновых уравнений (2.24), (2.63), (2.66) и их решений для гармонического поля (2.83) и (2.84).

Для гармонической ЭМВ вектор напряжённости электрического поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  определяется следующим выражением:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi(r) - \varphi_0), \quad (3.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения с координатами  $x, y, z$ ;  $\omega = 2\pi/T$  – круговая частота колебаний [рад/с], определяемая периодом колебаний  $T$ ;  $\vec{E}'_0(\vec{r})$  – амплитуда колебаний электрического поля, зависящая от положения точки наблюдения.

**Полной фазой колебаний волны** называется аргумент функции косинуса в выражении (3.1):

$$\varphi_S = \omega t - \varphi(\vec{r}) - \varphi_0.$$

Значение начальной фазы  $\varphi_0$  колебаний зависит от выбора начала отсчёта времени и/или положения центра декартовой системы координат. Для простоты дальнейших рассуждений положим  $\varphi_0 = 0$ .

Из выражения (3.1) следует, что полная фаза гармонической волны имеет две составляющие:

а) временную составляющую фазы  $\omega t$ , линейно изменяющуюся во времени со скоростью изменения, равной круговой частоте колебаний  $\omega$ ;

б) пространственную составляющую фазы  $\varphi(\vec{r})$ , характер зависимости которой от положения точки наблюдения  $\vec{r}$  определяется расстоянием  $r$ , пройденным волной от источника до точки наблюдения. С учетом (2.66) пространственную фазу при распространении ЭМВ в вакууме представим в виде

$$\varphi(\vec{r}) = k_0 r,$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число в вакууме.

Отсюда видно, что пространственная составляющая полной фазы является линейно изменяющейся функцией от расстояния, пройденного волной.

Физический смысл полной фазы  $\varphi_{\text{полн}}$  состоит в том, что с её помощью можно определить перемещение волнового фронта волны из исходной точки  $z$  за время, равное  $t$ .

Определим скорость изменения фазы волны как функцию пройденного волной расстояния. В соответствии с этим определением скорость изменения

фазы волны в зависимости от пройденного волной расстояния равна волновому числу  $k = \omega/c$ . По аналогии с круговой частотой  $\omega$  волновое число  $k$  называют пространственной частотой. Размерностью волнового числа (пространственной частоты) в системе СИ является  $\text{м}^{-1}$ . В оптике используется внесистемная единица измерения волнового числа, имеющая размерность  $\text{мм}^{-1}$  и называемая числом линий на мм.

Особенностью гармонической электромагнитной волны (3.1) является зависимость полной фазы её колебаний  $\varphi_S = \omega t - \varphi(\vec{r}) - \varphi_0$  как от времени, так и от положения точки наблюдения в пространстве.

Гармоническая ЭМВ с постоянной амплитудой колебаний в любой точке наблюдения называется **плоской**.

Для плоской гармонической ЭМВ, распространяющейся вдоль одной из координатных осей декартовой системы координат, например, вдоль оси  $OZ$ , выражения для векторов электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - k_0 z - \varphi_0); \\ \vec{H}(z,t) &= \vec{H}_{0y} \cos(\omega t - k_0 z - \varphi_0),\end{aligned}\tag{3.2}$$

где  $\vec{E}_{0x}$  и  $\vec{H}_{0y}$  – амплитуды колебаний векторов напряженностей электрического и магнитного полей, постоянных во всех точках пространства;  $k_0 z$  – пространственная составляющая полной фазы волны, которая имеет постоянное значение в любой плоскости, параллельной плоскости  $XOY$  (рис. 3.1).

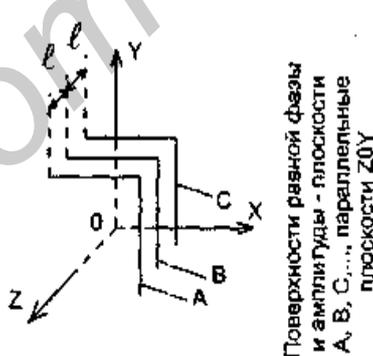


Рис. 3.1. Расположение в пространстве поверхностей равной фазы

Кроме плоских гармонических волн известен достаточно широкий класс ЭМВ, у которых амплитуда изменяется с расстоянием. Наиболее простыми из них являются цилиндрические и сферические волны. Амплитуда и фаза колебаний четверки векторов цилиндрической волны имеет постоянное значение на концентрических поверхностях (рис. 3.2), вдоль оси симметрии которых расположены источники колебаний. На достаточно большом расстоянии  $r$  до точки наблюдения от источника колебаний амплитуда, создаваемой им цилиндриче-

ской волны, убывает обратно пропорционально  $\sqrt{r}$ .

Амплитуда и фаза колебаний четвёрки векторов сферической волны имеет постоянное значение на концентрических сферических поверхностях (рис. 3.3), в центре симметрии которых расположены источники колебаний. На достаточно большом расстоянии  $r$  точки наблюдения от источника колебаний амплитуда создаваемой им сферической волны убывает обратно пропорционально  $r$ .

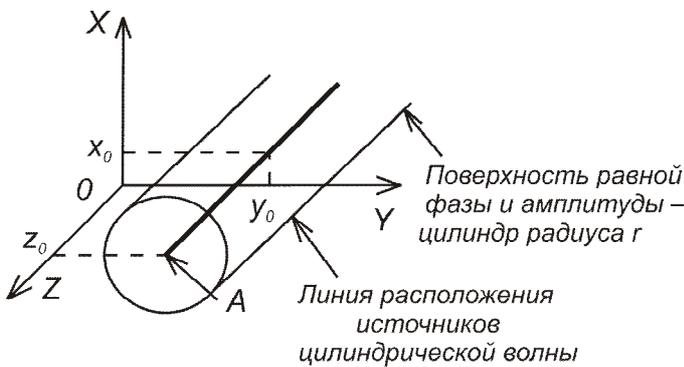


Рис. 3.2. Цилиндрический фронт

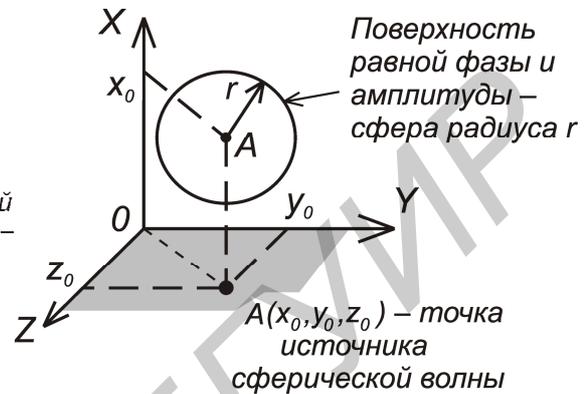


Рис. 3.3. Сферический фронт

Множество точек в пространстве, в которых фаза волны имеет постоянное значение, называется **волновым фронтом волны**. Для рассматриваемого случая плоской волны (3.2) волновым фронтом является любая плоскость, параллельная плоскости  $XOY$ .

### 3.2. Поляризация плоских волн

Электромагнитные волны обычно имеют четкую пространственную структуру, они определенным образом поляризованы (в отличие, например, от солнечного света). Ориентация векторов поля относительно направления распространения энергии, а также изменение ориентации векторов во времени и пространстве для фиксированной точки наблюдения характеризуют поляризацию волны. Под **поляризацией** ЭМВ следует понимать ориентацию вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  относительно плоскости падения волны. Если векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  распространяющейся волны не изменяют своего положения в пространстве, то такая волна называется *линейно поляризованной*. Для простейшей линейно поляризованной волны (например в плоскости  $XOZ$ ) векторы напряженности электрического и магнитного поля описываются соотношениями:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{e}_x \dot{E}_{mx} \exp j(\omega t - kz); \quad \dot{\vec{H}} = \vec{e}_y \dot{H}_{my} \exp j(\omega t - kz), \quad (3.3)$$

где  $\dot{E}_{mx}$ ,  $\dot{H}_{my}$  – амплитуды векторов поля,  $k = \omega(\epsilon_a \mu_a)^{1/2}$  – волновое число

или постоянная распространения в среде с параметрами  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$  и  $\mu_a = \mu_0 \mu$ ;  $\omega = 2\pi a$  – круговая частота.

В случае формирования плоской волны системой ортогональных линейно поляризованных излучателей с токами  $i_1$  и  $i_2$  между составляющими векторов электрического поля могут наблюдаться фазовый сдвиг и неравенство амплитуд (рис. 3.4):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_{mx} \exp j(\omega k - kz + \varphi_1), \\ \dot{E}_y &= E_{my} \exp j(\omega k - kz + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Суммарный вектор напряженности электрического поля

$$\vec{E}(t) = \text{Re } \dot{\vec{E}}_{\Sigma} = \vec{e}_x E_{mx} \cos \alpha + \vec{e}_y E_{my} (\cos \alpha \cdot \cos \Delta \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \Delta \varphi) \quad (3.5)$$

в фиксированной точке  $A$  безграничного пространства (рис. 3.4) будет смещен относительно оси  $X$  на угол  $\theta$ , определяемый выражением

$$\theta = \arctg \left[ (\cos \Delta \varphi - \text{tg} \alpha \cdot \sin \Delta \varphi) \frac{E_{my}}{E_{mx}} \right], \quad (3.6)$$

где  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\alpha = \omega t - kz + \varphi_2$ .

Производя нормировку выражений (3.5):  $\frac{E_x}{E_{mx}} = \cos(\alpha + \Delta \varphi)$ ,

$\frac{E_y}{E_{my}} = \cos \alpha$ , после несложных преобразований по исключению параметра  $\alpha$

получим уравнение кривой, которую описывает конец вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$  в сечении  $XOY$ :

$$\left( \frac{E_x}{E_{mx}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x E_y}{E_{mx} E_{my}} \right) \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi. \quad (3.7)$$

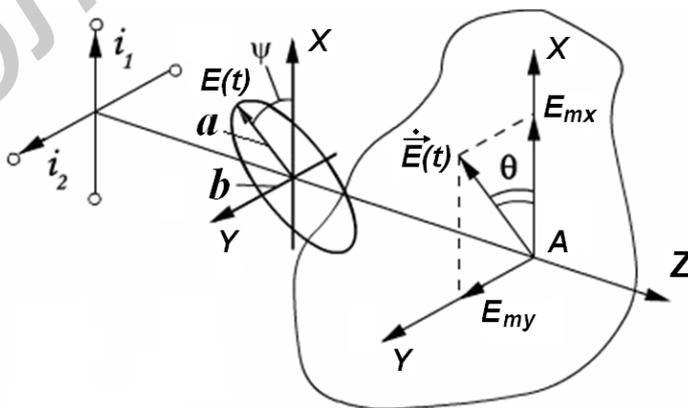


Рис. 3.4 Формирование поляризации волны

Выражение (3.7) представляет собой каноническое уравнение эллипса со

смещенной на угол  $\psi$  относительно оси  $X$  большой осью  $a$ . Если заданы амплитуды векторов  $E_{mx}$  и  $E_{my}$ , а также разность фаз  $\Delta\varphi$  между ними, главные полуоси эллипса поляризации  $a+b$  и угол наклона  $\psi$  находятся из выражений

$$a + b = E_{mx}^2 + E_{my}^2; \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \cos \Delta\varphi \operatorname{tg} \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{E_{my}}{E_{mx}} \right). \quad (3.9)$$

Из выражений (3.5) – (3.9) видно, что характер изменения ориентации вектора  $\dot{\vec{E}}(t)$  в пространстве (вид поляризации волны) зависит от соотношений амплитуд  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$  и их начальных фаз  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ :

– при  $\Delta\varphi = n\pi$  вектор  $\dot{\vec{E}}(t)$  перемещается вдоль отрезка прямой линии, смещенной относительно оси  $X$  на угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{E_{my}}{E_{mx}} \right)$ , что присуще волне с линейной поляризацией (рис. 3.5, а);

– при  $\Delta\varphi = (1+4n)\pi/2$  и равенстве амплитуд  $E_{mx} = E_{my}$  конец вектора  $\dot{\vec{E}}$  описывает окружность, вращаясь по часовой стрелке:  $\theta = -\alpha$ ,  $-\alpha = -(\omega t - kz + \varphi)$ , что соответствует правой круговой поляризации волны (рис. 3.5, б);

– при  $\Delta\varphi = -(1+4n)\pi/2$  и  $E_{mx} = E_{my}$  угол  $\theta = \omega t - kz + \varphi$  смещается против часовой стрелки, и волна имеет левую круговую поляризацию.

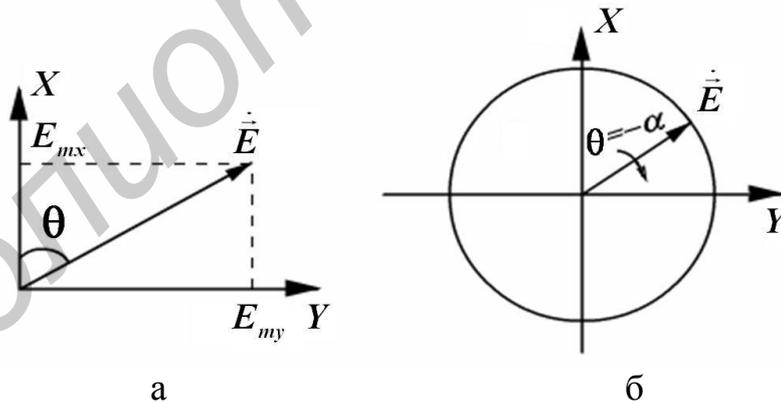


Рис. 3.5. Положение вектора напряженности электрического поля при круговой поляризации

Рассмотренные виды поляризации представляют собой предельно выраженные режимы эллиптически поляризованной плоской волны и свидетельствуют о том, что в линейной однородной изотропной среде волна с вращающейся поляризацией может быть представлена суперпозицией линейно поляризованных волн и наоборот – в соответствии с принципом взаимности линейно по-

ляризованную волну можно представить в виде ортогонально поляризованных по кругу волн.

Параметрами эллиптической поляризации являются коэффициент эллиптичности поляризации волны, представляющий собой отношение полуосей эллипса, по которому в пространстве движется конец вектора суммарного колебания, и угол наклона оси эллипса, определяемый разностью начальных фаз составляющих колебаний.

### 3.3. Разные оценки скорости электромагнитных волн

Фазовая скорость  $V_{\Phi}$  определяется как скорость перемещения фронта ЭМВ. Для фронта распространяющейся волны (поверхность равных фаз) полная фаза колебания  $\varphi_S = \omega t - \varphi(\vec{r}) - \varphi_0 = \text{const}$  и случая плоской волны (3.4) можно записать

$$\varphi_S = \omega k - kz + \varphi_1 = \text{const}. \quad (3.10)$$

Вычисление производной по времени от полной фазы при неизменности ее величины для различных моментов времени и расстояний  $\omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z) = \omega t - kz$  с учетом (2.66) производим по формуле

$$V_{\Phi} = \frac{\partial z}{\partial t} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{f\lambda_0}{n} = \frac{c}{n}, \quad (3.11)$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме,  $n$  – коэффициент преломления среды.

Из формулы (3.11) следует, что в вакууме при  $\varepsilon=1$ ,  $\mu=1$  фазовая скорость распространения ЭМВ равна скорости света  $c$  в вакууме. Это свойство ЭМВ является одним из доказательств электромагнитной природы света.

В любой среде, где  $\varepsilon > 1$ ,  $\mu > 1$ , скорость распространения электромагнитной волны в  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  раз меньше, чем скорость света в вакууме.

Величина  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , определяющая изменение скорости света в среде по сравнению с вакуумом, называется **абсолютным показателем преломления среды**, или **оптической плотностью среды**.

Выражение (3.11) известно как соотношение Максвелла, впервые установившего зависимость скорости ЭМВ от параметров среды их распространения.

Длина волны  $\lambda$  есть кратчайшее расстояние вдоль направления распространения между точками с одинаковой фазой поля (перемещение фронта волны за период колебаний  $T$ ):  $\omega t - kz = \omega(t + T) - k(z + \lambda)$ , откуда с учетом (2.66) можем записать

$$\lambda = \frac{\omega T}{k} = V_{\Phi} T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (3.12)$$

Электромагнитная волна, прошедшая некоторое расстояние  $l$ , в среде с оптической плотностью  $n > 1$  получит приращение своей фазы в  $n$  раз большее, чем при распространении в вакууме на то же расстояние.

Скорость переноса энергии монохроматической волны

$$\vec{V}_3 = \frac{\vec{\Pi}}{w} = \vec{e}_z \frac{0,5E_m^2 / W}{0,5E_m^2 \epsilon_a} = \vec{e}_z \frac{0,5WH_m^2}{0,5\mu_a H_m^2} = \vec{e}_z (\epsilon_a \mu_a)^{-1/2}, \quad (3.13)$$

где  $w = w_3 = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = w_M = \frac{\mu_a H^2}{2}$  – объемная плотность энергии ЭМП.

Групповая скорость передачи немонахроматической ЭМВ  $V_{гр}$  определяется как скорость движения максимума группы волн, составляющих спектр передаваемого сигнала. Для небольшой полосы частот  $\Delta\omega \ll \omega_0$  и в приближении линейной зависимости фазовой постоянной от частоты можно записать условие постоянства фазы при перемещении группового сигнала в виде

$$(\omega_0 + \Delta\omega)(t + \Delta t) - (k_0 + \Delta k)(z + \Delta z) = (\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)z. \quad (3.14)$$

$$\text{Откуда } V_{гр} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \text{ или } V_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k},$$

где  $\frac{\partial\omega}{\partial k} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  – производная при  $\omega = \omega_0$  и  $k = k_0$ .

Групповую скорость можно рассматривать как скорость перемещения огибающей сигнала, но при условии, что зависимость фазовой скорости от частоты достаточно мала. В противном случае частотные составляющие сигнала будут иметь различные фазовые скорости, что приведет к изменению формы результирующего колебания. В этом случае проследить за перемещением какой-либо точки на огибающей сигнала невозможно, и групповая скорость  $V_{гр}$  теряет физический смысл.

При отсутствии потерь в среде  $V_{гр}$  совпадает со скоростью переноса энергии сигнала. Это же условие справедливо для сред с малыми потерями, а также в случае, если потери в среде слабо зависят от частоты сигнала. Если же потери велики, то  $V_{гр}$  отлично от  $V_3$  и может иногда превышать скорость света, что также лишено смысла.

Фазовая и групповая скорости связаны друг с другом формулой Релея:

$$V_{гр} = V_{\Phi} - \lambda \frac{dV_{\Phi}}{d\lambda}. \quad (3.15)$$

Из данной формулы следует, что  $V_{\Phi}$  и  $V_{гр}$  могут быть различны как по значению, так и по направлению. Если направления  $V_{\Phi}$  и  $V_{гр}$  совпадают, то дисперсию называют положительной. Если они противоположны – отрицательной. В зависимости от знака производной различают *нормальную* дисперсию,

если  $\lambda \frac{dV_{\Phi}}{d\lambda} > 0$ , и аномальную, если  $\lambda \frac{dV_{\Phi}}{d\lambda} < 0$ . Из (3.15) следует, что отрицательная аномальная дисперсия невозможна.

С другой стороны, произведение фазовой и групповой скорости в материальных средах есть величина постоянная

$$V_{\Phi}V_{\text{гр}} = c^2. \quad (3.16)$$

Из выражений (3.13) и (3.15) следует, что в среде без потерь скорости передачи энергии фазовая и групповая скорости равны между собой  $V_{\Phi} = V_{\text{гр}} = V_{\text{э}} = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ .

### 3.4. Плоская электромагнитная волна в однородной среде

#### 3.4.1. Распространение электромагнитных волн в среде без потерь

Электрические и магнитные параметры  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  среды без потерь являются вещественными и волновое сопротивление, определяемое соотношением (2.85), также является действительной величиной. Мгновенное значение вектора Пойтинга  $\vec{\Pi}(t)$  и среднее за период  $\vec{\Pi}_{\text{ср}}$  значение вектора плотности потока мощности определяются соотношениями

$$\vec{\Pi}(t) = [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{e}_z E_m H_m \cos^2(\omega t - kz + \varphi); \quad (3.17)$$

$$\vec{\Pi}_{\text{ср}} = \vec{e}_z \Pi_{\text{ср}}, \quad (3.18)$$

где

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(t) dt = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{W}{2} H_m^2 = \frac{1}{2W_C} E_m^2, \quad (3.19)$$

где  $W_C$  – волновое сопротивление среды (см. (2.85)).

В свободном пространстве  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$  ( $W_0 = 120\pi$  (см.2.85)).

Поэтому

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{E_m^2}{(240\pi)} = \frac{E_{\text{д}}^2}{120\pi}, \quad (3.20)$$

где  $E_{\text{д}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$  – действующее (среднеквадратичное) значение напряженности электрического поля.

#### 3.4.2. Распространение электромагнитных волн в среде с потерями

В среде с конечной проводимостью часть энергии ЭМП превращается в тепловую из-за возникающих токов проводимости. Диэлектрическая проницае-

мость среды имеет комплексный характер  $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right) = \epsilon_0 (\epsilon_r - j 60 \lambda_0 \sigma)$ ,

а волновое число состоит из вещественной и мнимой частей:

$$\dot{k} = \omega (\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a)^{1/2} = \beta - j\alpha, \quad (3.21)$$

где  $\beta = \omega \left[ 0,5 \mu_a \epsilon_a \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}$  – фазовая постоянная;

$\alpha = \omega \left[ 0,5 \mu_a \epsilon_a \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}$  – коэффициент затухания,

где  $\sigma$  – удельная электропроводность среды.

По мере своего распространения в глубь среды с потерями амплитуды электрического и магнитного полей линейно поляризованной ЭМВ (поляризованной, например, в плоскости  $XOZ$ ) затухают по экспоненциальному закону:

$$\vec{E}_x = \vec{e}_x E_{m0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0) e^{-\alpha z}, \quad (3.22)$$

$$\vec{H}_y = \vec{e}_y \frac{E_{m0}}{|\dot{W}_C|} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0 - \varphi_W) e^{-\alpha z}, \quad (3.23)$$

где  $\dot{W}_C = \left( \frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a} \right)^{1/2} = |\dot{W}_C| \exp(j\varphi_W)$  – волновое сопротивление среды, определяется согласно (2.85), является комплексной величиной.

Из сравнения (3.22) и (3.23) видно, что между мгновенными значениями векторов напряженности поля наблюдается фазовый сдвиг  $\varphi_W$ , а также экспоненциальное затухание амплитуд напряженностей по мере заглубления в среду (рис. 3.6). Это означает, что ЭМП проникает в среду с потерями на конечную глубину, а степень затухания зависит от мнимой части волнового числа  $\alpha$  в данной среде. Расстояние  $\delta = \alpha^{-1}$ , на котором амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей ослабевают в  $e$  раз, называется глубиной проникновения (или глубиной скин-слоя.) Эффект проникновения ЭМП в среду с потерями на конечную глубину называется *поверхностным*, или *скин-эффектом*.

Мгновенное значение вектора Пойтинга в среде с потерями с учетом (3.22) и (3.23) можно выразить в виде

$$\vec{\Pi}_z(t) = \vec{e}_z \frac{E_{m0}^2}{2|\dot{W}_C|} \cos(\varphi_W) e^{-2\alpha z} \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi_0), \quad (3.24)$$

где  $\varphi_w = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \right)$  – аргумент волнового сопротивления среды; а с учетом (3.11) фазовая скорость будет равна

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = V_0 \left[ 0,5 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{60\sigma\lambda_0}{\varepsilon_r} \right)^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.25)$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в свободном пространстве;  $V_0$  – фазовая скорость в среде без потерь.

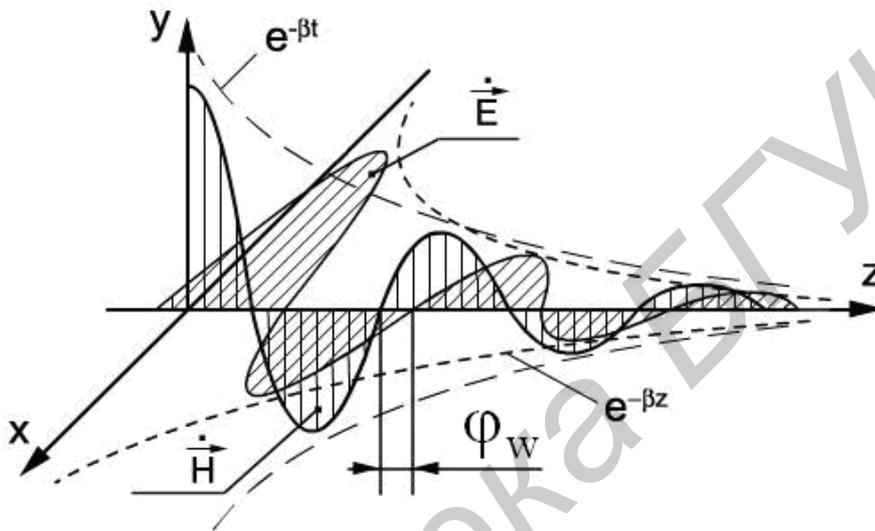


Рис. 3.6. Затухание векторов поля в среде с потерями

Из выражений (3.22) – (3.25) следует, что в средах с конечной проводимостью фазовая скорость, коэффициенты затухания и фазы, характеристическое сопротивление зависят не только от параметров  $\varepsilon_r$ ,  $\sigma$ , но и от рабочей длины волны. Плоские ЭМВ различных частот при распространении в средах с потерями имеют разные фазовые скорости и испытывают различную степень поглощения. Как уже отмечалось в разд. 1, среды, в которых наблюдается такое явление зависимости фазовой скорости от частоты поля, называются диспергирующими, а сам эффект частотной зависимости параметров среды – дисперсией. Явление дисперсии наблюдается и у других параметров плоской волны в среде с потерями. Так, в процессе переноса энергии возникают реактивные потоки мощности, из-за чего экспоненциально убывает величина средней за период плотности потока мощности:

$$\Pi_{cp} = \operatorname{Re}[\dot{\Pi}_z(t)]. \quad (3.26)$$

Кроме этого, уменьшается длина волны, так как ее значение определяется действительной частью комплексного коэффициента распространения  $\beta > k_0$ :

$$\lambda = 2\pi/\beta = \lambda_0 \left[ 0,5 \left( \sqrt{\varepsilon_r^2 + (60\sigma\lambda_0)^2} + \varepsilon_r \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Таким образом, между режимами распространения плоских ЭМВ в идеальном диэлектрике и реальной полупроводящей среде имеются существенные отличия. В хорошем диэлектрике плотность тока смещения больше плотности тока проводимости, поэтому в выражении (3.21) отношение  $\sigma/\omega\varepsilon_a \ll 1$  и величина

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} \right)^2, \quad (3.28)$$

а в процессе распространения наблюдается слабое поглощение энергии ( $\alpha \approx 0,5\sigma W_C$ ), уменьшается фазовая скорость ( $\beta \geq k_0$ ) и существует небольшой фазовый сдвиг между векторами поля.

В средах с ярко выраженными проводящими свойствами  $\sigma \gg \omega\varepsilon_a$  коэффициенты затухания и фазы плоской волны отличаются незначительно  $\alpha \approx \beta \approx \left( \frac{\omega\sigma\mu_a}{2} \right)^{1/2}$  и глубина проникновения поля в соответствии с определением составит

$$\delta_M = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_a}}. \quad (3.29)$$

Комплексное волновое сопротивление для проводящей среды определяется соотношением

$$\dot{W}_M = |\dot{W}_M| e^{j\varphi_{WM}} \approx \left[ 1 + \frac{\mu_a}{\varepsilon_a \left( \frac{-j\sigma}{\omega\varepsilon_a} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}}. \quad (3.30)$$

Аргумент волнового сопротивления при  $\sigma \rightarrow \infty$ :

$$\varphi_{WM} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{60\lambda\sigma}{\varepsilon_r} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (3.31)$$

достигает в пределе величины  $\pi/4$ . Малая величина волнового сопротивления, характерная для проводящих сред, указывает на преобладание в них магнитного поля. В средах со слабой дисперсией групповая скорость равна скорости распространения энергии волны, а поверхность равных фаз перемещается со

скоростью  $V_{\Phi} = \omega/\alpha$ , откуда несложно получить соотношение между групповой и фазовой скоростями:

$$V_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = V_{\Phi} \left( 1 - \beta \left( \frac{\partial V_{\Phi}}{\partial \omega} \right) \right)^{-1}. \quad (3.32)$$

Режиму нормальной дисперсии соответствует убывание фазовой скорости с ростом частоты ЭМП. В противном случае наблюдается аномальная дисперсия. При распространении плоских ЭМВ в проводящих средах, диэлектриках с большими потерями и других сильно диспергирующих средах групповая скорость волны теряет физический смысл из-за сильных искажений спектра частот передаваемого сигнала.

Оценим по порядку величины глубину проникновения ЭМВ внутрь хорошего проводника, например, для меди с удельной проводимостью  $\sigma = 6,010^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ метр}^{-1}$ . Расчеты глубин скин-слоя по формуле (3.28) показывают, что для частоты поля  $f = 30 \text{ кГц}$  —  $\delta_{\text{М}} = 0,4 \text{ мм}$ , для  $f = 3 \text{ МГц}$  —  $\delta_{\text{М}} = 40 \text{ мкм}$ , для  $f = 300 \text{ МГц}$  —  $\delta_{\text{М}} = 4 \text{ мкм}$  и для  $f = 300 \text{ ГГц}$  —  $\delta_{\text{М}} = 0,4 \text{ мкм}$ .

Из приведенных расчетов видно, что для идеального проводника  $\sigma \rightarrow \infty$  и глубина скин-слоя  $\delta_{\text{М}} \rightarrow 0$ , т. е. ЭМВ при облучении идеального проводящего тела не проникает внутрь этого тела и полностью отражается от его поверхности. Именно этим обстоятельством объясняется характерный блеск металлических тел, являющихся хорошими проводниками.

Для плохих проводников, идеальных диэлектриков,  $\sigma \rightarrow 0$  и толщина скин-слоя  $\delta_{\text{Д}} \rightarrow \infty$ . Другими словами, ЭМВ может беспрепятственно распространяться внутри идеального диэлектрика без уменьшения амплитуд векторов напряженностей ЭМП. По этой причине внешние поверхности хороших диэлектриков не являются столь блестящими при отражении света, как поверхности металлов.

### 3.5. Электромагнитные волны в сверхпроводниках

#### 3.5.1. Глубина проникновения поля в сверхпроводниках

В соответствии с моделью сверхпроводников (п. 1.3.3.6) для сверхпроводника хорошего качества (с достаточно большим количеством свободных электронов) при температуре среды, не слишком близкой к температуре перехода, для составляющих проводимости в (1.55) справедливо условие  $\sigma_2 \ll \sigma_1$ . Используя (3.28), глубину проникновения поля в сверхпроводнике приблизительно можно определить с помощью формулы

$$\delta_{\text{С}} = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma_2 \mu_a}}. \quad (3.33)$$

Подставляя для  $\sigma_2$  из (1.54) в (3.33), получим

$$\delta_C = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4}}. \quad (3.34)$$

Из (3.34) следует, что параметр  $\delta_0$  представляет собой глубину проникновения поля при температуре среды, равной абсолютному нулю. В качественных сверхпроводниках типичная величина  $\delta_0$  составляет приблизительно 0,2 мкм.

Понятие глубины скин-слоя в сверхпроводниках  $\delta_C$  может быть определено по аналогии с глубиной скин-слоя для обычных проводников и представляет собой расстояние, на которое проникает ЭМП, возбуждающее поверхностные токи в сверхпроводниках. Из выражения (3.34) следует, что в сверхпроводниках глубина проникновения не зависит от частоты поля, но зависит от температуры. В обычных проводниках глубина скин-слоя является частотно-зависимой величиной даже при частотно-независимой  $\gamma$  (3.29).

Другой отличительной особенностью сверхпроводников является то, что постоянный ток или стационарное поле в отличие от обычных проводников не полностью проникает в них. В сверхпроводящих материалах постоянный ток и соответственно стационарное поле затухают так же, как в переменном поле, пропорционально  $e^{-z/\delta_L}$ , где  $z$  – координата от поверхности материала и  $\delta_L$  – лондонская глубина проникновения (глубина, на которой амплитуда постоянного тока изменяется в  $e^{-1}$  раз по сравнению с ее величиной на поверхности сверхпроводника). Тогда в рамках двухфлюидной модели для сверхпроводников глубина проникновения поля при постоянном токе  $\delta_L$  соответствует величине  $\delta_C$  при переменном токе.

### 3.5.2 Поверхностный импеданс сверхпроводников

Важным параметром, характеризующим свойства сверхпроводящих материалов, является поверхностный импеданс. Для металлов с проводимостью  $\gamma$  поверхностный импеданс может быть определен из (3.30):

$$\begin{aligned} \dot{W}_S &= \frac{\dot{E}_\tau}{\dot{H}_\tau} = |\dot{W}_S| e^{j\varphi_S} = R_S + jX_S = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $\dot{E}_\tau$  и  $\dot{H}_\tau$  – тангенциальные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности материала. Данное определение является общим, и поэтому справедливо и для сверхпроводящих материалов. Заменяя

в (3.35) у на  $\sigma_{HTS} = y_1 - j\sigma_2$ , получим

$$W_{STS} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_a}{\sigma_1 - j\sigma_2}}. \quad (3.36)$$

Разделяя действительную и мнимую части, можем записать

$$W_{STS} = R_{STS} + jX_{STS} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}} \left( \frac{\sqrt{\kappa + \sigma_1} - \sqrt{\kappa - \sigma_1}}{\kappa} + j \frac{\sqrt{\kappa - \sigma_1} + \sqrt{\kappa + \sigma_1}}{\kappa} \right), \quad (3.37)$$

где  $\kappa = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

Полагая, что  $\kappa \approx \sigma_2$  и  $\sqrt{1 \pm \sigma_1/\sigma_2} \approx 1 \pm \sigma_1/(2\sigma_2)$  при  $\sigma_2 \gg \sigma_1$  и заменяя  $\sigma_2$  на  $(\omega\mu_a\delta^2)^{-1}$ , можно записать

$$R_{STS} = \frac{\omega^2\mu_a^2\sigma_1\delta_C^3}{2}, \quad X_{STS} = \omega\mu_a\delta_C. \quad (3.38)$$

Важно отметить, что  $\sigma_1$  и  $\delta_C$  – рассматриваются как частотно независимые параметры, тогда как поверхностное сопротивление  $R_{STS}$  зависит прямо пропорционально от  $\omega^2$ . Этот факт имеет важное практическое значение и может рассматриваться в качестве основной предпосылки по замене обычных проводников на сверхпроводники в микроволновых устройствах СВЧ- и КВЧ-диапазонов.

Поверхностную реактивность в (3.38)  $X_{STS} = \omega L$  можно рассматривать в виде эквивалентной индуктивности на частоте поля  $\omega$ , где  $L = \mu_a\delta_C$ . Такую индуктивность называют внутренней, или кинетической, индуктивностью.

Поскольку глубина скин-слоя для сверхпроводников зависит от температуры (3.34), то согласно (3.38) активная составляющая поверхностного импеданса  $R_{STS}$  также является термозависимой величиной. На рис. 3.7 представлена типичная температурная зависимость нормированного по  $R_0$  значения  $R_{STS}$ , где  $R_0$  – активная составляющая поверхностного импеданса при температуре  $T_C$ .

Температурная зависимость параметров сверхпроводников может сказываться на характеристиках СВЧ-устройств, выполненных с применением технологии ВТСП, например, в конструкциях частотных микроволновых фильтров. Однако в большинстве случаев с этой зависимостью можно не считаться, так как температурная стабильность охлаждающих систем для современных фильтров на основе ВТСП может быть лучше чем 0,5 К.

На рис. 3.8 представлена экспериментальная температурная зависимость нормированной резонансной частоты резонатора  $f_0(T)/f_0(60\text{K})$ , выполненного на отрезке разомкнутой полосковой линии передачи на основе ВТСП.

В устройствах, выполненных по технологии ВТСП, как правило, приме-

няются материалы в виде пленок, и поэтому необходимо учитывать их толщину, так как представленные выше формулы справедливы только для безграничной среды.

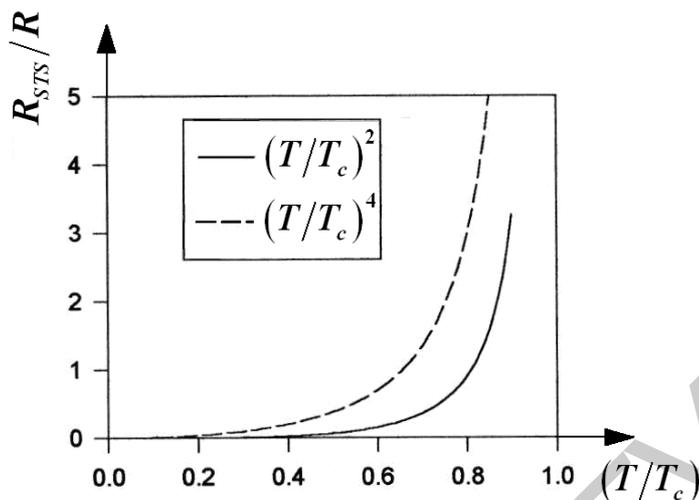


Рис. 3.7 Температурная зависимость поверхностного сопротивления сверхпроводника

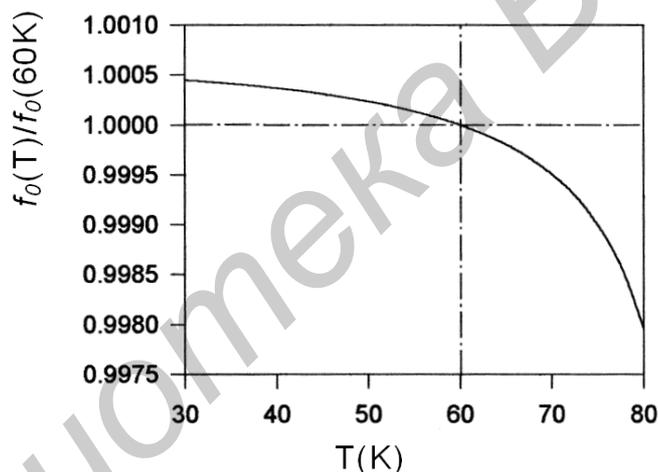


Рис. 3.8. Температурная зависимость резонансной частоты микрополоскового резонатора на основе ВТСП

Для ВТСП материала конечной толщины  $t$  поверхностный импеданс определяется по формуле

$$W_{STS}(f) = R_{STS} \left\{ \operatorname{cth} \left( \frac{t}{\delta_C} \right) + \frac{t}{\delta_C} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{t}{\delta_C} \right)} \right\} + jX_{STS} \operatorname{cth} \left( \frac{t}{\delta_C} \right). \quad (3.39)$$

Из соотношения (3.39) следует, что конечная толщина пленки приводит к увеличению как активной, так и реактивной составляющих поверхностного импеданса. На рис. 3.9 представлена зависимость поверхностного сопротивления

тонкой пленки как функция нормированной толщины  $t / \delta_c$ , из которой следует, что для уменьшения поверхностного сопротивления тонкой пленки ее толщина должна в три или четыре раза превышать глубину проникновения поля в среду. Данное требование имеет место и при использовании пленок из обычных проводников.

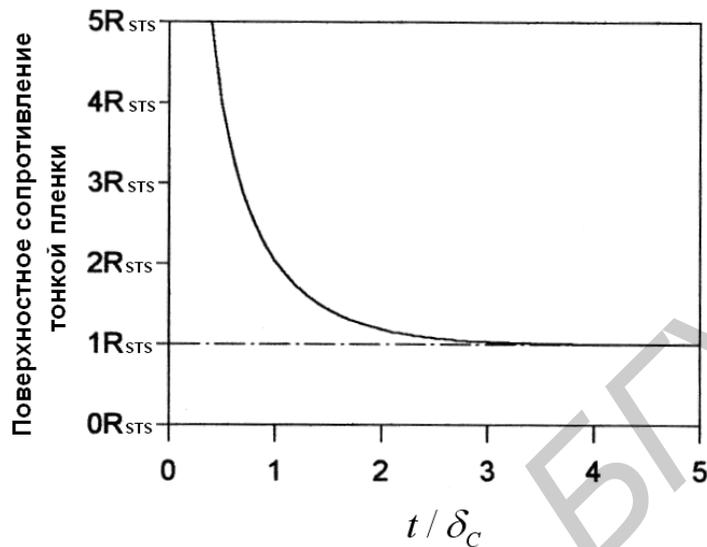


Рис. 3.9. Зависимость поверхностного сопротивления тонкой сверхпроводящей пленки от нормированной толщины

Сравним значения поверхностных сопротивлений для обычных проводников и проводников, выполненных из сверхпроводящих материалов. Для нормального проводника поверхностное сопротивление и поверхностный реактанс равны друг другу  $R_S = X_S = \sqrt{\omega \mu_a / 2\sigma}$  (3.35) и пропорциональны корню квадратному из частоты. Поскольку поверхностное сопротивление сверхпроводника увеличивается более быстро –  $\omega^2$ , то существует диапазон частот, в котором поверхностное сопротивление обычных проводников действительно становится ниже, чем для сверхпроводников. Частота, начиная с которой наблюдается это явление, называется *частотой обращения* (crossover frequency).

На рис. 3.10 показаны частотные зависимости поверхностного сопротивления для YBCO сверхпроводника при 77 К и меди для двух значений температуры – 77 и 300 К. Из представленных зависимостей видно, что для частоты поля 10 ГГц поверхностное сопротивление для тонкой пленки из YBCO равно 0,25 мОм, тогда как для меди оно составляет 8,7 мОм при 77 К и 26,1 мОм при 300 К. С понижением частоты поля различие в значениях поверхностного импеданса быстро возрастает и на частоте 2 ГГц поверхностное сопротивление тонкой пленки из HTS при 77 К в тысячу раз меньше, чем для меди при 300 К.

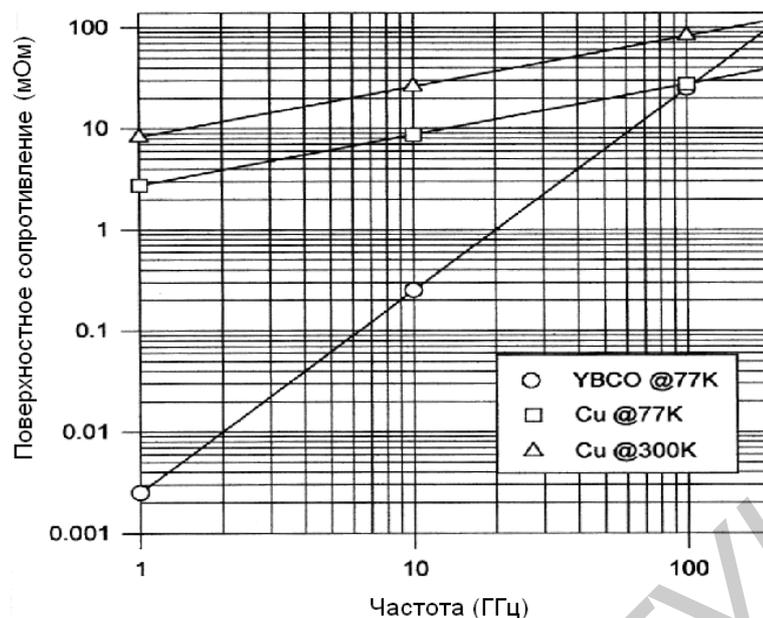


Рис. 3.10. Сравнительные графики поверхностного сопротивления для YBCO сверхпроводника при 77 К и меди как функция частоты

Представленные зависимости показывают, что для меди и пленки из ВТСП при 77 К – частота обращения составляет почти 100 ГГц.

Расчеты показывают, что добротность резонаторов, выполненных на основе микрополосковых линий передачи с медными проводниками, при 300 К на частоте 2 ГГц составляет порядка 250 единиц, а для полоскового резонатора на основе тонкопленочного ВТСП может достигать значений более 250 000.

### 3.6. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах

#### 3.6.1. Сущность анизотропии

Наибольший практический интерес в процессе взаимодействия ЭМВ с анизотропными средами представляет физическая сущность анизотропии параметров, которую можно рассмотреть с позиции классической механики (в самом простейшем приближении) на примере ферритов или ионизированного газа в постоянном магнитном поле.

В простейшей модели ферромагнитных материалов электроны представляются в виде волчков, которые, вращаясь вокруг своей оси, создают механический момент (действие массы электрона) и магнитный момент (действие заряда), – так называемый спин. Наличие на одной из оболочек атомов феррита электронов с некомпенсированным спиновым моментом приводит к тому, что в намагничивающем поле спиновые магнитные моменты  $\vec{M}$  стремятся ориентироваться вдоль силовых линий этого поля  $\vec{H}_0$  (рис. 3.11). Однако воздействие механического момента (электрон – вращающаяся корпускулярная частица) вызывает явление, аналогичное эффекту гироскопа в поле силы тяжести, и спиновые моменты осуществляют прецессию вокруг направления намагничиваю-

щего поля  $\vec{H}_0$  с частотой гиромангнитного резонанса  $\omega_H = \frac{\mu_0 e H_0}{m_e}$  ( $e, m_e$  – заряд и масса электрона соответственно), образуя при этом правовинтовую систему. В реальных ферромагнитных средах с потерями конец вектора магнитного момента  $\vec{M}$  движется по свертывающейся спирали, но при воздействии слабого внешнего гармонического поля возникает «вынужденная» прецессия.

Представляя вектор  $\vec{M}$  в виде суммы продольной  $\vec{M}_0$  и поперечной  $\vec{M}_\perp$  компонент, а прецессирующую поперечную компоненту – как циркулярно поляризованную  $\dot{\vec{M}}_\perp = \dot{M}_x + j\dot{M}_y$ , видим, что отклик среды на внешнее воздействие с одной составляющей, например  $\dot{H}_x$ , будет содержать две компоненты:

$$\dot{\vec{B}} = \vec{e}_x \mu_0 (\dot{H}_x + \dot{M}_x) + j \vec{e}_y \mu_0 \dot{M}_y. \quad (3.40)$$

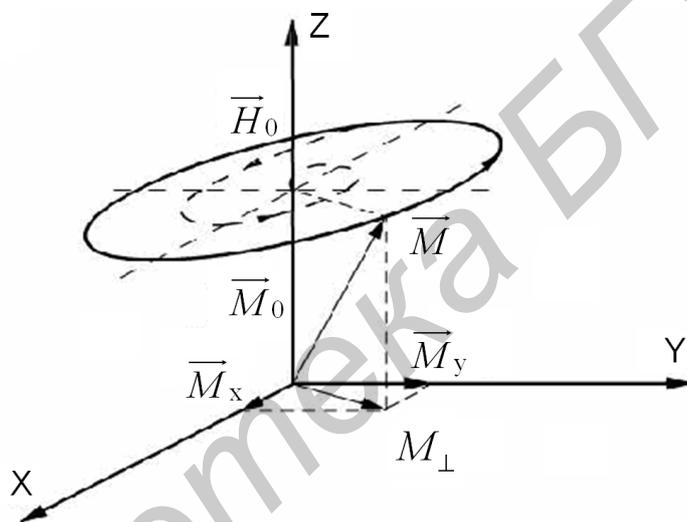


Рис. 3.11. Компоненты вектора намагничивания

Аналогичные процессы наблюдаются в намагниченной плазме. Если под действием гармонической составляющей  $\vec{E}_x$  внешней волны в постоянном магнитном поле  $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$  движется со скоростью  $\vec{V}_\perp$  электрон, на него наряду с электрической  $\vec{F}_\mathcal{E} = e\vec{E}$  будет также действовать магнитная сила Лоренца  $\vec{F}_M = e\mu_0[\vec{V}_\perp, \vec{H}_0]$ , изменяющая направление движения (рис. 3.12). Результирующая траектория движения электрона будет представлять собой эллипс в перпендикулярной  $\vec{H}_0$  плоскости, а направление движения образует с вектором подмагничивания правовинтовую систему. Как и в случае магнитной анизотропии, поперечную компоненту вектора поляризации  $\vec{P}_\perp$  представляем суммой ортогональных составляющих  $\dot{\vec{P}}_\perp = \vec{e}_x \dot{P}_x + j\vec{e}_y \dot{P}_y$ , и при воздействии внешней ЭМВ с одной компонентой электрического поля, например,  $\vec{E}_x$ , видим, что отклик среды будет содержать две составляющие для вектора электрического смещения:

$$\dot{\vec{D}} = \vec{e}_x(\varepsilon_0 \dot{E}_x + \dot{P}_x) + j\vec{e}_y \dot{P}_y. \quad (3.41)$$

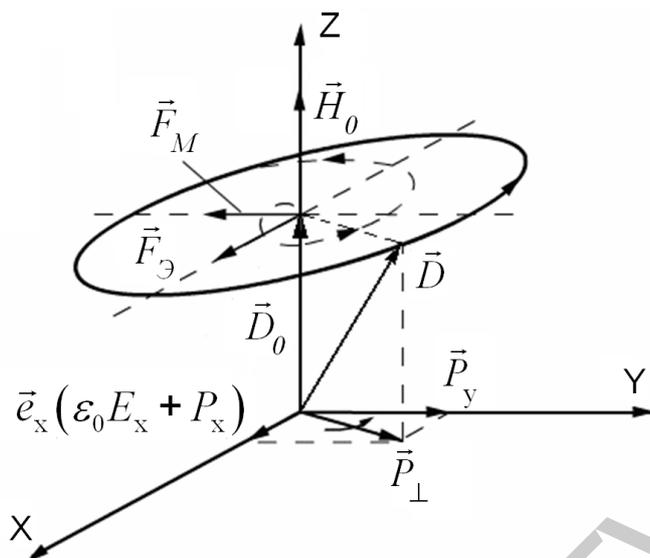


Рис. 3.12. Компоненты вектора электрического смещения

Резонансные свойства эффекта взаимодействия электромагнитных волн с анизотропной средой наиболее четко проявятся при совпадении вида поляризации волны с направлением вращения векторов  $\vec{M}_\perp$  и  $\vec{P}_\perp$ , а также частот прецессии и внешнего воздействия. Однако сложность структуры поля распространяющейся в анизотропной среде ЭМВ затрудняет физическое описание механизма взаимодействия.

### 3.6.2. Тензор проницаемости

Для изучения особенностей распространения электромагнитных волн в анизотропных средах необходима аналитическая форма записи параметров. В случае продольно-намагниченного ионизированного газа ( $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$ ,  $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$ ) можно не учитывать движение ионов, которые практически не влияют на происходящие процессы в диапазоне радиочастот из-за большой массы частиц.

Используя закон Ньютона  $\vec{F} = m_e \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ , пренебрегая для упрощения выкладок столкновениями заряженных частиц и релятивистскими эффектами, можно записать уравнение движения электрона под действием поля распространяющейся гармонической электромагнитной волны в виде

$$m_e j\omega \dot{\vec{V}} = e\dot{\vec{E}} + e\mu_0[\dot{\vec{V}}, \vec{H}_0]. \quad (3.42)$$

После подстановки в выражение (3.42) вектора  $\dot{\vec{E}} = \vec{e}_x \dot{E}_x + \vec{e}_y \dot{E}_y + \vec{e}_z \dot{E}_z$  и несложных преобразований получаем составляющие скорости движения электронов:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= \frac{e}{m_e} \left[ \frac{-j\omega \dot{E}_x}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\omega_H \dot{E}_y}{\omega^2 - \omega_H^2} \right]; \\ \dot{V}_y &= \frac{e}{m_e} \left[ \frac{\omega_H \dot{E}_x}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{j\omega \dot{E}_y}{\omega^2 - \omega_H^2} \right]; \\ \dot{V}_z &= \frac{e}{m_e} \frac{\dot{E}_0}{j\omega}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Тензор диэлектрической проницаемости продольно намагниченной плазмы  $\vec{\epsilon}_z$  получим из выражения плотности полного электрического тока в плазме по аналогии (1.46):

$$\dot{\vec{J}}_\Sigma = \dot{\vec{J}}_{\text{см}} + \dot{\vec{J}}_{\text{пр}} = j\omega\epsilon_0 \dot{\vec{\epsilon}} \dot{\vec{E}}, \quad (3.44)$$

в котором плотность тока смещения  $\dot{\vec{J}}_{\text{см}} = j\omega\epsilon_0 \dot{\vec{E}}$  и тока проводимости  $\dot{\vec{J}}_{\text{пр}} = \rho \vec{V} = eN_e \vec{V}$  с использованием составляющих (3.43) позволяет представить параметры среды в виде

$$\vec{\epsilon}_z = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (3.45)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.46)$$

– компоненты тензора проницаемости;  $\omega_p = e(N_e/\epsilon_0 m_e)^{1/2}$  – плазменная частота, соответствующая частоте колебаний электронов с концентрацией  $N_e$  около положения равновесия после прекращения действия возмущающих сил (определяется в п. 1.3.3.2).

При взаимодействии ЭМВ с поперечно намагниченной плазмой ( $\vec{H}_0 = \vec{e}_y H_0$ ,  $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$ ) векторное произведение  $[\vec{V}, \vec{H}_0]$  в уравнении движения электрона (3.44) преобразуется к виду

$$[\vec{V}, \vec{H}_0] = -\vec{e}_x H_0 V_x + \vec{e}_z H_0 V_x, \quad (3.47)$$

и после совместного решения с уравнением полного тока (3.44) тензор диэлектрической проницаемости определяется зависимостью

$$\vec{\epsilon}_y = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & -j\epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 \\ j\epsilon_2 & 0 & \epsilon_1 \end{vmatrix} \quad (3.48)$$

с компонентами  $\epsilon_i$ , определенными в выражении (3.46).

Используя уравнение движения магнитного момента некомпенсированного электрона феррита  $j\omega\dot{M} = \frac{e\mu_0}{m_e} [\dot{M}_\Sigma, \dot{H}_\Sigma]$  в суммарном поле подмагничивания и внешней электромагнитной волны с вектором  $\dot{H}_\Sigma = \vec{H}_0 + \dot{H}$ , при условии слабых гармонических воздействий ( $\vec{H}_0 \gg \dot{H}$ ) несложно получить по аналогии с параметрами намагниченного ионизированного газа для тензора магнитной проницаемости следующие соотношения:

$$\vec{\mu}_z = \begin{vmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{\mu}_y = \begin{vmatrix} \mu_1 & 0 & j\mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ -j\mu_2 & 0 & \mu_1 \end{vmatrix}, \quad (3.49)$$

где компоненты тензора  $\mu_i$  имеют вид

$$\mu_1 = 1 - \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \mu_2 = \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega\omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \mu_3 \approx \mu_r. \quad (3.50)$$

Из выражений (3.46), (3.50) видно, что в направлении постоянного магнитного поля феррит и плазма являются линейными изотропными средами с параметрами  $\mu_3$  и  $\varepsilon_3$  (продольными относительно  $\vec{H}_0$ ). В рассматриваемой модели это объясняется отсутствием упорядоченной составляющей скорости  $V_\perp$  и «вынужденной» прецессией магнитного  $M_\perp$  момента электрона (см. рис. 3.11) при воздействии на анизотропную среду векторов гармонического поля вдоль направления подмагничивания. Анализ частотных зависимостей компонент тензоров проницаемости показывает, что поперечные составляющие имеют резонансный характер, обращаясь в бесконечность при совпадении частоты внешнего воздействия с гиромангнитной ( $\omega = \omega_H$ ). При учете потерь в ферритах и столкновении частиц в ионизированном газе компоненты тензоров проницаемости (3.45), (3.48) и (3.49) будут комплексными величинами с конечными значениями на резонансной частоте.

### 3.6.3. Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах

Тензорный характер параметров  $\vec{\varepsilon}_a$  и  $\vec{\mu}_a$  приводит к возникновению новых физических эффектов при распространении ЭМВ в анизотропных средах. Их аналитическое исследование представляет значительные трудности из-за сложных зависимостей между векторами поля и усложнения исходной системы электродинамических уравнений при произвольной ориентации намагничивающего поля относительно волнового вектора. Поэтому в качестве примеров рассматриваются наиболее простые идеализированные случаи распространения плоских волн в безграничных однородных анизотропных средах.

Рассмотрим первый случай, когда ЭМВ распространяется вдоль намагни-

чивающего поля  $\vec{H}_0 = \vec{e}_z H_0$  (случай продольного намагничивания среды).

Входящую в анизотропную среду линейно поляризованную электромагнитную волну можно представить суперпозицией волн правой  $\dot{E}^{(+)}$ ,  $\dot{H}^{(+)}$  и левой  $\dot{E}^{(-)}$ ,  $\dot{H}^{(-)}$  круговых поляризаций (рис. 3.13) с векторами половинной амплитуды:

$$\dot{E}^{(+)} = 0,5\dot{E}(\vec{e}_x + j\vec{e}_y); \quad \dot{H}^{(+)} = 0,5\dot{H}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y); \quad (3.51)$$

$$\dot{E}^{(-)} = 0,5\dot{E}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y); \quad \dot{H}^{(-)} = 0,5\dot{H}(\vec{e}_x + j\vec{e}_y), \quad (3.52)$$

где  $\dot{E} = E_m \exp j(\omega t)$ ,  $\dot{H} = H_m \exp j(\omega t)$  – комплексные амплитуды векторов поля исследуемой волны.

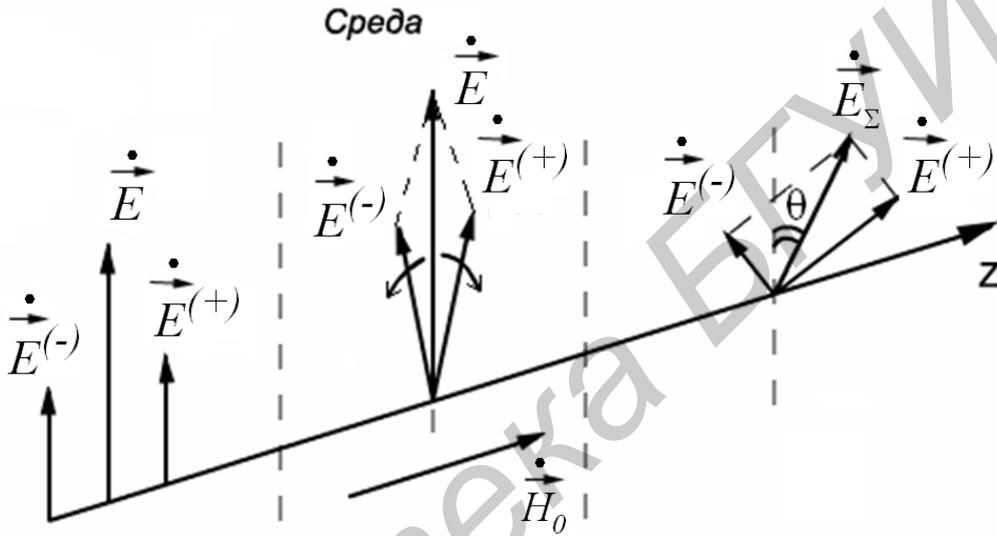


Рис. 3.13. Линейно поляризованная волна в анизотропной среде как суперпозиция ортогонально поляризованных волн в круговом базисе

Используя материальное уравнение  $\dot{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \dot{E}$  и составляющие  $\epsilon_i$  (3.46) тензора  $\vec{\epsilon}_z$  (3.45), с учетом выражений (3.51), (3.52) можно записать для проекций векторов смещения ЭМВ в продольно-намагниченной плазме следующие соотношения:

$$\dot{D}_x^{(+)} = 0,5\dot{E}\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2); \quad \dot{D}_y^{(+)} = 0,5\dot{E}\epsilon_0(-j\epsilon_2 + j\epsilon_1); \quad (3.53)$$

$$\dot{D}_x^{(-)} = 0,5\dot{E}\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2); \quad \dot{D}_y^{(-)} = 0,5\dot{E}\epsilon_0(-j\epsilon_2 - j\epsilon_1) \quad (3.54)$$

и представить поле распространяющихся волн с круговыми поляризациями в виде

$$\dot{D}^{(+)} = 0,5E_m\epsilon_0\epsilon^{(+)}(\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp j(\omega t - k^+z); \quad (3.55)$$

$$\dot{D}^{(-)} = 0,5E_m\epsilon_0\epsilon^{(-)}(\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp j(\omega t - k^-z); \quad (3.56)$$

$$\dot{B}^{(+)} = 0,5\mu_a\dot{H}^{(+)} \exp j(-k^+z); \quad (3.57)$$

$$\dot{B}^{(-)} = 0,5\mu_a\dot{H}^{(-)} \exp j(-k^-z), \quad (3.58)$$

где  $\dot{\vec{H}}^{(\pm)} = \vec{H}_m^{(\pm)} \exp j(\omega t)$ ;  $\dot{\vec{E}}^{(\pm)} = \vec{E}_m^{(\pm)} \exp j(\omega t)$ ;

$$\varepsilon^{(+)} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \varepsilon^{(-)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad k_1^+ = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(+)}}, \quad k_1^- = k_0 \sqrt{\varepsilon^{(-)}}. \quad (3.59)$$

При распространении циркулярно поляризованных волн в продольно-намагниченном феррите аналогичным способом анализируется структура поля в анизотропной среде с помощью выражений (3.49), (3.50) для составляющих  $\mu_i$  тензора  $\vec{\mu}_z$  и материального уравнения  $\dot{\vec{B}} = \mu_0 \vec{\mu}_z \dot{\vec{H}}$ . В этом случае магнитная индукция для право- и левополяризованных волн имеет вид

$$\dot{\vec{B}}^{(+)} = 0,5 \mu_0 \mu^{(+)} \dot{\vec{H}}^{(+)} \exp(-jk^+ z); \quad \dot{\vec{D}}^{(+)} = 0,5 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^{(+)} \exp(-jk^+ z); \quad (3.60)$$

$$\dot{\vec{B}}^{(-)} = 0,5 \mu_0 \mu^{(-)} \dot{\vec{H}}^{(-)} \exp(-jk^- z); \quad \dot{\vec{D}}^{(-)} = 0,5 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^{(-)} \exp(-jk^- z), \quad (3.61)$$

где

$$\mu^{(+)} = \mu_1 - \mu_2; \quad \mu^{(-)} = \mu_1 + \mu_2; \quad k_2^+ = k_0 \sqrt{\mu^{(+)}}, \quad k_2^- = k_0 \sqrt{\mu^{(-)}}. \quad (3.62)$$

Из приведенных соотношений (3.55) – (3.62) видно, что плоская ЭМВ с линейной поляризацией при распространении в анизотропной среде с продольным подмагничиванием распадается на две волны с круговой поляризацией, для которых намагниченная плазма и феррит представляют собой изотропную среду с эффективными скалярными параметрами

$$\varepsilon^{(+)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_H)}; \quad \varepsilon^{(-)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_H)} \quad (3.63)$$

в случае правой круговой поляризации и

$$\varepsilon^{(-)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_H)}; \quad \mu^{(-)} = 1 - \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H}{\omega + \omega_H} \quad (3.64)$$

в случае левого направления вращения вектора поляризации.

Обе волны имеют разные постоянные распространения (при конечных величинах намагничивающего поля) и фазовые скорости

$$V_\Phi^{(+)} = V_0 (\varepsilon^+ \mu^+)^{-1/2}; \quad V_\Phi^{(-)} = V_0 (\varepsilon^- \mu^-)^{-1/2}, \quad (3.65)$$

здесь  $V_0$  – фазовая скорость волны при отсутствии намагничивающего поля.

Волновое сопротивление для каждой из этих волн также различно:

$$W^{(+)} = W_C \left( \frac{\mu^+}{\varepsilon^+} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad W^{(-)} = W_C \left( \frac{\mu^-}{\varepsilon^-} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.66)$$

где  $W_C$  – характеристическое сопротивление исследуемой среды при отсутствии поля подмагничивания.

Изменение напряженности постоянного магнитного поля  $H_0$  наиболее сильно сказывается на характеристиках волны с правой круговой поляризацией, так как частотные зависимости проницаемостей (3.63) имеют резонансный характер, а величины  $\varepsilon^{(+)}$ ,  $\mu^{(+)}$  обращаются в бесконечность на гиромангнитной частоте  $\omega = \omega_H$ . В реальных условиях распространения любая среда обладает потерями, поэтому проницаемости (3.63), (3.64) являются комплексными величинами:

$$\dot{\varepsilon}^{(\pm)} = \varepsilon'^{(\pm)} - j\varepsilon''^{(\pm)}; \quad \dot{\mu}^{(\pm)} = \mu'^{(\pm)} - j\mu''^{(\pm)} \quad (3.67)$$

и имеют конечные значения на резонансной частоте (рис. 3.14) в окрестности намагничивающего поля  $H_Z$  рез.

На зависимостях диэлектрической проницаемости продольно-намагниченного ионизированного газа  $\varepsilon^{(\pm)}$  от величины напряженности поля  $H_0$  (см. рис. 3.12) можно выделить зоны подмагничивания, в которых наблюдается различное влияние анизотропной среды на ЭМВ. В зоне I  $\varepsilon^{(-)} > \varepsilon^{(+)} > 0$ , а также в зоне IV ( $\varepsilon^{(+)} > \varepsilon^{(-)} > 0$ ) левополяризованная и правополяризованная волны имеют вещественные постоянные распространения, их фазовые скорости не совпадают. В зоне II ( $\varepsilon^{(+)} < 0$ ) наблюдается эффект смещения поля; поляризованная волна вытесняется из намагниченной среды, имеющей в этой зоне реактивное характеристическое сопротивление. В зоне III ( $\varepsilon''^{(+)} \gg 1$ ) при  $H_0 \approx H_{Z\text{рез}}$  распространяющаяся волна с правой круговой поляризацией интенсивно затухает за счет резонансного поглощения энергии поля (совпадение вида поляризации и направления прецессии электрона на гиромангнитной частоте).

Аналогичные эффекты и зависимости, подобно изображенным на рис. 3.14 (вместо параметров  $\varepsilon^{(-)}$ ,  $\varepsilon^{(+)}$  необходимо использовать  $\mu^{(-)}$ ,  $\mu^{(+)}$ ), наблюдаются при взаимодействии плоской однородной волны с продольно-намагниченным ферритом. Наибольший практический интерес представляют режим одновременного существования двух циркулярно поляризованных волн и распространение их с отличающимися фазовыми скоростями в слабых полях подмагничивания (см. зону I, рис. 3.14) без заметного затухания.

При суперпозиции таких волн с одинаковыми амплитудами для векторов напряженности электрического поля на основании выражений (3.51), (3.52) можно записать

$$\dot{\vec{E}}^{(+)} = 0,5\dot{E} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp(-jk_1^+ z); \quad (3.68)$$

$$\dot{\vec{E}}^{(-)} = 0,5\dot{E} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp(-jk_1^- z) \quad (3.69)$$

и представить суммарное поле в виде

$$\dot{\vec{E}}_{\Sigma}(z) = \dot{E} \exp\left(-j\frac{k_1^+ + k_1^-}{2}z\right) \left[ \vec{e}_x \cos\left(\frac{k_1^- - k_1^+}{2}z\right) + \vec{e}_y \sin\left(\frac{k_1^- - k_1^+}{2}z\right) \right]. \quad (3.70)$$

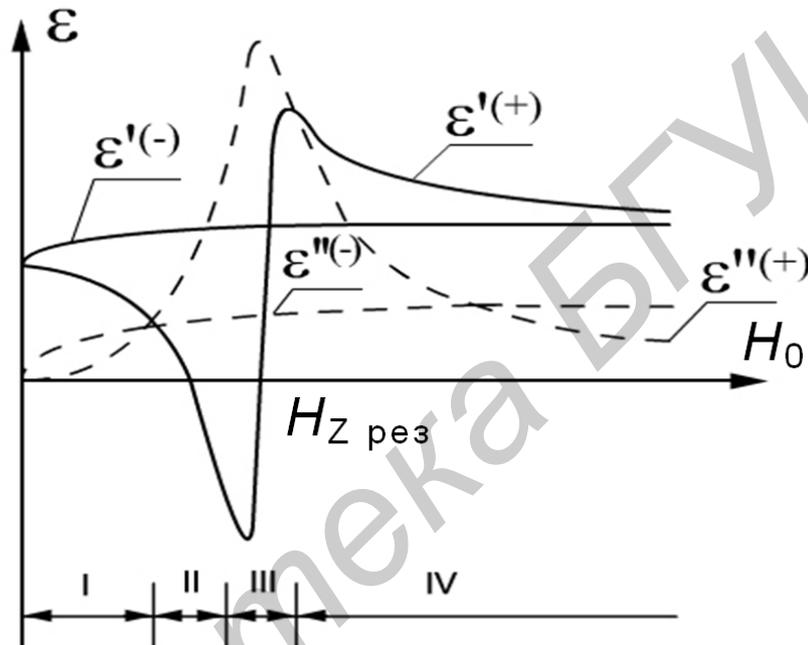


Рис. 3.14. Зависимости составляющих комплексной диэлектрической проницаемости для лево- и правополяризованных волн от напряженности намагничивающего поля (продольное намагничивание среды)

Анализ выражения (3.70) показывает, что по мере перемещения ЭМВ вдоль оси  $Z$  в продольно намагниченной плазме суммарный вектор напряженности электрического поля будет смещаться в плоскости  $XOY$  по часовой

стрелке на угол (см. рис. 3.13)  $\theta = \frac{z(k_1^- - k_1^+)}{2}$ , так как принятой величине на-

магничивающего поля соответствует неравенство  $V_{\Phi}^{(+)} > V_{\Phi}^{(-)}$  (подмагничивание в зоне IV приведет к обратному эффекту – смещению против часовой стрелки). Вращение плоскости поляризации в процессе распространения плоской волны называется *эффектом Фарадея*, а среды, способствующие возникновению данного эффекта, называются *гиротропными*. Характерно, что вид круговой поляризации (вращения вектора гармонического поля  $\dot{\vec{E}}^{(+)}$  или  $\dot{\vec{E}}^{(-)}$ ) определяется относительно направления поля намагничивания среды. Поэтому при измене-

нии направления распространения ЭМВ на противоположное смещение вектора суммарного поля  $\dot{\vec{E}}_{\Sigma}(z)$  будет происходить в плоскости  $XOY$  и далее по часовой стрелке – эффект Фарадея необратим, не удовлетворяет теореме взаимности. Из-за отличия величин характеристических сопротивлений среды  $W^{(+)}$ ,  $W^{(-)}$  для волн круговой поляризации (3.66) амплитуды напряженностей электрических полей  $\dot{E}^{(+)}$  и  $\dot{E}^{(-)}$ , входящие в выражения (3.68), (3.69), также не равны, поэтому электрическое поле суммарной волны  $\dot{\vec{E}}_{\Sigma}(z)$  будет эллиптически поляризованным.

Рассмотрим второй случай, когда однородная плоская волна распространяется в безграничной анизотропной среде перпендикулярно направлению намагничивающего поля  $\vec{H}_0 = \vec{e}_y H_0$ . В этом случае уравнения Максвелла могут быть записаны в виде двух независимых систем

$$\begin{cases} -jk\dot{E}_y = -j\omega\mu_a\dot{H}_x; \\ -jk\dot{H}_x = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_3\dot{E}_y; \\ 0 = -j\omega\mu_a\dot{H}_z, \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} jk\dot{E}_x = -j\omega\mu_a\dot{H}_y; \\ -jk\dot{H}_y = j\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1\dot{E}_x - j\varepsilon_2\dot{E}_z); \\ 0 = -j\omega\varepsilon_0(j\varepsilon_2\dot{E}_x + \varepsilon_1\dot{E}_z). \end{cases} \quad (3.72)$$

Первая система уравнений описывает однородную плоскую волну, компоненты поля которой расположены в нормальной относительно направления распространения плоскости. Приравняв нулю определитель системы (3.71), можно определить постоянную распространения, фазовую скорость и характеристическое сопротивление среды:

$$\begin{bmatrix} -\omega\mu_a & k \\ k & -\omega\varepsilon_0\varepsilon_3 \end{bmatrix} = 0; \quad k = k_{\text{ОБК}} = \omega(\varepsilon_0\varepsilon_3\mu_a)^{1/2} = k_0(\varepsilon_3)^{1/2}; \quad (3.73)$$

$$V_{\Phi}^{(\text{ОБК})} = V_0(\varepsilon_3)^{-1/2}; \quad W_{\text{ОБК}} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = W_C(\varepsilon_3)^{-1/2}.$$

Как видно из выражений (3.73), параметры данной волны не зависят от величины поля подмагничивания и соответствуют характеристикам Т-волны при распространении в изотропной среде (без постоянного магнитного поля), поэтому такая волна называется *обыкновенной*. Система уравнений (3.72) описывает неоднородную волну с продольной составляющей электрического поля  $\dot{E}_z \neq 0$ , которую именуют *необыкновенной*. Приравняв нулю определитель

системы (3.72), можно определить параметры необыкновенной волны:

$$k^2 \varepsilon_1 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_a (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0; \quad k = k_{\perp} = \omega (\varepsilon_0 \mu_a \varepsilon_{\perp})^{1/2} = k_0 (\varepsilon_{\perp})^{1/2};$$

$$V_{\Phi}^{(\text{НОБК})} = V_0 (\varepsilon_{\perp})^{-1/2}; \quad W_{\text{НОБК}} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = W_C (\varepsilon_{\perp})^{-1/2}, \quad (3.74)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} = 2 \frac{\varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}{\varepsilon^{(+)} + \varepsilon^{(-)}} \quad (3.75)$$

диэлектрическая проницаемость среды для необыкновенной волны.

При распространении плоской линейно поляризованной волны в поперечно намагниченном феррите наблюдаются те же закономерности: волна произвольной ориентации распадается на обыкновенную с постоянной распространения  $k_{\text{ОБК}} = k_0 \sqrt{\mu_3}$  и необыкновенную:

$$k_{\perp} = k_0 (\mu_{\perp})^{1/2}; \quad \mu_{\perp} = 2 \frac{\mu^{(+)} \mu^{(-)}}{\mu^{(+)} + \mu^{(-)}}, \quad (3.76)$$

которые распространяются с разными фазовыми скоростями. Изменение диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon_{\perp}$  в зависимости от напряженности постоянного магнитного поля  $H_0$  (рис. 3.15) представляет собой сложную зависимость параметров (3.75) необыкновенной волны. При этом на графике (см. рис. 3.15) можно выделить по аналогии с режимом продольно намагниченной плазмы четыре зоны I – IV с подобными эффектами взаимодействия распространяющейся в анизотропной среде волны (см. рис. 3.14).

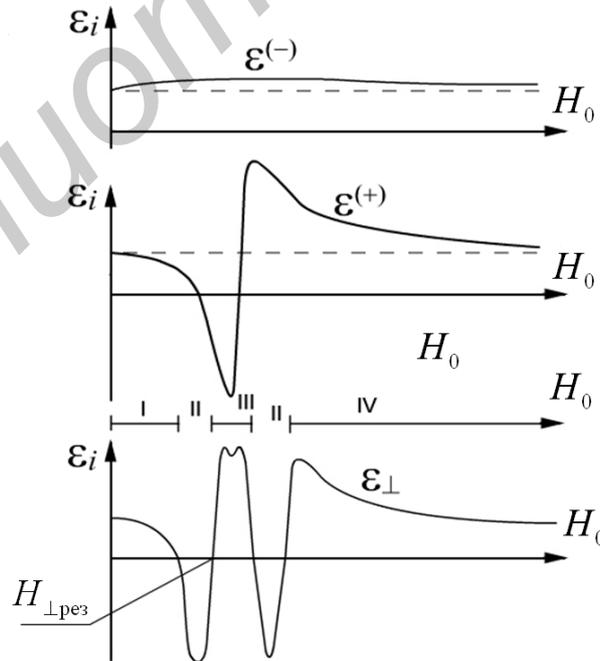


Рис. 3.15. Зависимость диэлектрической проницаемости для лево- и правополяризованных волн от напряженности намагничивающего поля (поперечное намагничивание среды)

Вследствие отличия фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной волн  $V_{\Phi}^{\text{ОБК}} < V_{\Phi}^{\text{НОБК}}$  (I зона подмагничивания) в процессе распространения будут изменяться разность фаз между ними и соответственно поляризация суммарной волны (рис. 3.16).

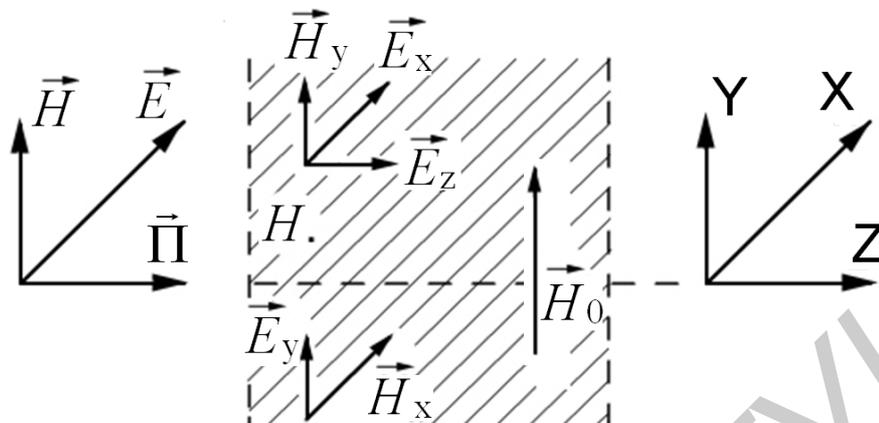


Рис. 3.16. Компоненты поля плоской электромагнитной волны при распространении в поперечно-намагниченной среде

Преобразование линейной поляризации плоской волны в эллиптическую при распространении в анизотропной среде с поперечным намагничиванием называется *эффектом Коттона – Мутона (или эффектом Фойгта)*.

Рассмотренные эффекты наиболее четко проявляются в неограниченной среде. Наличие границ раздела с анизотропной средой и наклонное падение электромагнитных волн приводят к усложнению процесса взаимодействия и происходящих явлений:

- за счет многократных отражений от границы слоя продольно-намагниченного ионизированного газа или феррита результирующая волна окажется эллиптически поляризованной даже в случае линейной поляризации падающей волны, а связь угла поворота оси эллипса поляризации с длиной анизотропного образца станет нелинейной;

- при наклонном падении на границу образца с поперечным подмагничиванием может произойти двойное лучепреломление (отражение) – расщепление преломленных (отраженных) лучей, один из которых соответствует обыкновенной волне, а другой – необыкновенной (рис. 3.17).

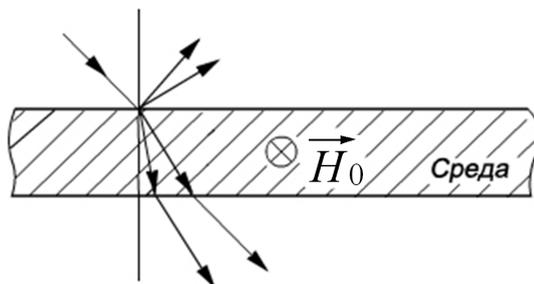


Рис. 3.17. Двойное лучепреломление и отражение электромагнитной волны

В слабых магнитных полях и на высоких рабочих частотах влияние анизотропии ионизированного газа уменьшается, ослабевают гиромагнитные явления, сильнее проявляются эффекты взаимодействия ЭМВ с заряженными частицами. Под действием электрического поля распространяющейся волны все заряженные частицы ионизированного газа начинают двигаться, сталкиваются между собой (с частотой  $\nu_0$ ), смещаются относительно равновесного положения, газ поляризуется и диэлектрическая проницаемость среды изменяется. Сталкиваясь с нейтральными молекулами и ионами, электрон передает им энергию ЭМП, что приводит к потере энергии распространяющейся волны за счет преобразования в тепловое движение тяжелых частиц. Изменение количества частоты движения в единицу времени  $\nu m_e \vec{V}$  характеризует потерю импульса движущегося со скоростью  $\dot{\vec{V}}$  электрона при столкновении с тяжелыми частицами. Поэтому, пренебрегая влиянием намагничивающего поля, можно записать уравнение движения электрона (1.23) в виде

$$j\omega m_e \dot{\vec{V}} + \nu m_e \dot{\vec{V}} = e \dot{\vec{E}}. \quad (3.77)$$

Из (3.77) несложно определить скорость движения электронов  $\vec{V}$  и получить на основании (3.77) выражение для полного тока

$$\dot{\vec{J}}_{\Sigma} = \dot{\vec{J}}_{\text{см}} + \dot{\vec{J}}_{\text{пр}} = j\omega \epsilon_0 \dot{\epsilon}_n \dot{\vec{E}}, \quad (3.78)$$

в котором комплексная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа  $\dot{\epsilon}_n = \epsilon'_n - j\epsilon''_n$  определяется соотношениями

$$\epsilon'_n = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}; \quad \epsilon''_n = \frac{\nu}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (3.79)$$

Ионизированный газ, как следует из частотной зависимости диэлектрической проницаемости (3.79), представляет собой диспергирующую среду, которую можно смоделировать реальным диэлектриком со следующими параметрами:

$$\epsilon_r = \epsilon'_n = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}; \quad \sigma = \epsilon''_n \omega \epsilon_0 = \nu \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (3.80)$$

Таким образом, основные закономерности взаимодействия ЭМП с ионизированными газами соответствуют процессам распространения плоской волны в средах с потерями и могут быть проанализированы с помощью выражений (3.73) – (3.75) при учете эквивалентных параметров (3.80) ионизированного газа.

### 3.7. Распространение электромагнитных волн в однородной киральной среде

#### 3.7.1. Особенности распространения волн в киральной среде

При распространении ЭМВ в киральной среде векторы поля связаны материальными уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} - j\chi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \cdot \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H} + j\chi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \vec{E}, \quad (3.81)$$

где  $\chi$  – параметр, описывающий киральные свойства среды (см. подразд. 1.3), которые являются частным случаем материальных уравнений (1.20) и известны как соотношения Теллегена.

Для одномерного случая распространения однородной плоской волны вдоль оси  $Z$  уравнения Максвелла (используем тождества  $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ ,  $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = 0$ , где  $\vec{F}$  – векторы  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ )  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$ ,  $\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D}$ ,  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  с учетом  $\nabla = \vec{e}_z \partial_z$  и  $\nabla \times \vec{H} = \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H}$ ,  $\nabla \times \vec{E} = \vec{e}_z \times \partial_z \vec{E}$  при гармонических колебаниях поля примут вид

$$\vec{e}_z \times \partial_z \vec{E} = -j\omega\vec{B}, \quad \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H} = j\omega\vec{D}. \quad (3.82)$$

Из (3.82) следует, что в электромагнитных полях отсутствуют продольные компоненты поля ( $D_z = B_z = 0$  и  $E_z = H_z = 0$ ) и векторы поля содержат только поперечные составляющие.

Как отмечалось ранее, произвольная поляризация волны может быть представлена как линейная комбинация двух поляризаций по двум ортогональным направлениям, например, в линейном базисе через  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  и круговом – через  $\{\vec{e}_+, \vec{e}_-\}$ , для которых орт-векторы взаимосвязаны соотношениями

$$\vec{e}_+ = \vec{e}_x + j\vec{e}_y, \quad \vec{e}_- = \vec{e}_x - j\vec{e}_y. \quad (3.83)$$

и удовлетворяют условиям  $\vec{e}_\pm^* \cdot \vec{e}_\pm = 2$ ,  $\vec{e}_+^* \cdot \vec{e}_- = 0$ ,  $\vec{e}_+^* \times \vec{e}_- = 2j\vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_z \times \vec{e}_\pm = \pm j\vec{e}_\pm$ .

С учетом (3.83) для вектора напряженности электрического поля при произвольной поляризации волны можем записать

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y = \vec{e}_+ E_+ + \vec{e}_- E_-, \quad (3.84)$$

где  $\vec{E}_\pm = \frac{1}{2}(E_x \pm jE_y)$ , и составляющие  $E_+$  и  $E_-$  соответствуют право- и левополяризованным волнам в круговом базисе при распространении волны в положительном направлении  $Z$  (или, наоборот, при отрицательном направлении  $Z$ ), а  $E_x$  и  $E_y$  представляют компоненты вектора напряженности поля при разложе-

нии линейно поляризованной волны в линейном поляризационном базисе.

Тогда с учетом (3.84) система уравнений (3.82) примет вид  
– в линейном базисе

$$\begin{aligned}\partial_z E_x &= -j\omega B_y, & \partial_z E_y &= j\omega B_x, \\ \partial_z H_y &= -j\omega D_x, & \partial_z H_x &= j\omega D_y;\end{aligned}\quad (3.85)$$

– в круговом базисе, учитывая векторное свойство  $\vec{e}_z \times \vec{e}_\pm = \pm j\vec{e}_\pm$ :

$$\begin{aligned}\partial_z E_\pm &= \mp\omega B_\pm, \\ \partial_z H_\pm &= \pm\omega D_\pm.\end{aligned}\quad (3.86)$$

В среде без потерь вектор Пойтинга должен быть действительным и положительным. Поэтому основная матрица, описывающая параметры среды в материальных уравнениях (3.81)  $\begin{bmatrix} \varepsilon & -j\chi a \\ j\chi a & \mu \end{bmatrix}$ , должна быть эрмитовой с положительной кратностью. Это значит, что все параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\chi$  – действительные величины и, кроме того,  $|\chi| < \sqrt{\varepsilon\mu}$ .

Подставляя уравнения (3.81) в уравнения Максвелла (3.86), получим

$$\begin{aligned}\partial_z E_\pm &= \pm j\omega B_\pm = \mp\omega(\mu H_\pm + j\chi a E_\pm), \\ \partial_z H_\pm &= \pm j\omega D_\pm = \pm\omega(\varepsilon E_\pm - j\chi a H_\pm),\end{aligned}\quad (3.87)$$

где безразмерный параметр  $a = c\chi = \chi/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$  ( $|a| < 1$ ), и, учитывая, что  $W_C = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ ;  $k = \omega/\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$ , можем переписать уравнения (3.87) в следующей матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E_\pm \\ W_C H_\pm \end{bmatrix} = \mp \begin{bmatrix} jka & k \\ -k & jka \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\pm \\ W_C H_\pm \end{bmatrix}.\quad (3.88)$$

Это матричное уравнение можно диагонализировать соответствующими линейными комбинациями. Представляя линейно поляризованную волну как сумму право- и левополяризованных волн для правополяризованной волны, распространяющейся в положительном (прямом) направлении вдоль оси  $Z$ , или левополяризованной волны, распространяющейся в отрицательном (обратном) направлении оси  $Z$ , можем записать

$$\begin{aligned}E_{R+} &= \frac{1}{2}[E_+ - jW_C H_+]; & E_+ &= E_{R+} + E_{L+}; \\ E_{L+} &= \frac{1}{2}[E_+ + jW_C H_+]; & H_+ &= -\frac{1}{jW_C}[E_{R+} - E_{L+}].\end{aligned}\quad (3.89)$$

Из уравнения (3.89) следует, что  $\{E_{R+}, E_{L+}\}$  удовлетворяет разделенным

уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E_{R+} \\ E_{L+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jk_+ & 0 \\ 0 & jk_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{R+} \\ E_{L+} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} E_{R+}(z) &= A_+ e^{-jk_+ z}; \\ E_{L+}(z) &= B_+ e^{jk_- z}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

где  $k_+$ ,  $k_-$  определяются следующим образом:

$$k_{\pm} = k(1 \pm a) = \omega \left( \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \pm \chi \right). \quad (3.91)$$

Для этого случая можно также определить коэффициенты преломления при круговой поляризации поля  $n_{\pm} = k_{\pm}/k_0$ , где  $k_0$  – волновое число в вакууме,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ . Принимая, что  $n = k/k_0 = \sqrt{\mu \varepsilon} / \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ , получаем

$$k_{\pm} = n_{\pm} k_0, \quad n_{\pm} = n(1 \pm a). \quad (3.92)$$

Подобным образом можно выразить компоненты поля для левополяризованной волны при прямом и обратном направлениях ее перемещения в киральной среде:

$$\begin{aligned} E_{L-} &= \frac{1}{2} [E_- + jW_C H_-]; & E_- &= E_{L-} + E_{R-}; \\ E_{R-} &= \frac{1}{2} [E_- - jW_C H_-]; & H_- &= \frac{1}{jW_C} [E_{L-} - E_{R-}]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

где компоненты поля  $\{E_{L-}, E_{R-}\}$  удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} E_{L-} \\ E_{R-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jk_- & 0 \\ 0 & -jk_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{L-} \\ E_{R-} \end{bmatrix}; \Rightarrow \begin{aligned} E_{L-}(z) &= A_- e^{-jk_- z}; \\ E_{R-}(z) &= B_- e^{jk_+ z}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Приведенный выше анализ позволяет выразить компоненты вектора напряженности электрического поля как линейную комбинацию составляющих поля  $E_{\pm}(z)$  в круговом базисе:

$$\begin{aligned} E_+(z) &= E_{R+}(z) + E_{L+}(z) = A_+ e^{-jk_+ z} + B_+ e^{jk_- z}; \\ E_-(z) &= E_{L-}(z) + E_{R-}(z) = A_- e^{-jk_- z} + B_- e^{jk_+ z}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Из (3.95) следует, что правополяризованная волна в киральной среде  $E_+(z)$  распространяется в прямом направлении с волновым числом  $k_+$ , а в об-

ратном  $-k_-$ . Составляющая прямого движения  $E_+$  и обратного  $E_-$ , т. е.  $E_{R+}$  и  $E_{R-}$  – обе правополяризованные, и обе распространяются с одинаковым волновым числом  $k_+$ . Точно так же волны с левой поляризацией  $E_{L+}$  и  $E_{L-}$  распространяются с волновым числом  $k_-$ .

Из сказанного следует, что волна заданной круговой поляризации (левого или правого вращений) распространяется в киральной среде с одинаковыми волновым числом и не зависит от направления движения волны. Это является характерным отличием киральных сред от гиротропных, рассмотренных ранее.

### 3.7.2. Поляризационные эффекты в киральной среде

Рассмотрим поляризационные явления в киральной среде. Для этого представим линейно поляризованное поле в точке  $z=0$  в круговом базисе с помощью (3.83):

$$E(0) = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y = \vec{e}_+ A_+ + \vec{e}_- A_-, \quad (3.96)$$

где  $A_{\pm} = \frac{1}{2}(A_x \pm jA_y)$  и  $A_x, A_y$  должны быть действительными числами для линейной поляризации. Для волны с круговой поляризацией поля на расстоянии  $l$  в среде распространения, согласно уравнению (3.95), находим

$$\begin{aligned} E(l) &= \vec{e}_+ A_+ e^{-jk_+ l} + \vec{e}_- A_- e^{-jk_- l} = \\ &= \left[ \vec{e}_+ A_+ e^{-j(k_+ - k_-)l/2} + \vec{e}_- A_- e^{j(k_+ - k_-)l/2} \right] e^{-j(k_+ + k_-)l/2} = \\ &= \left[ \vec{e}_+ A_+ e^{-j\varphi} + \vec{e}_- A_- e^{j\varphi} \right] e^{-j(k_+ + k_-)l/2}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

где угол поворота плоскости поляризации определяется выражением

$$\varphi = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)l = akl. \quad (3.98)$$

Переходя к линейному поляризационному базису, находим

$$\begin{aligned} &\vec{e}_+ A_+ e^{-j\varphi} + \vec{e}_- A_- e^{j\varphi} = \\ &= (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \frac{1}{2} (A_x + jA_y) e^{-j\varphi} + (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \frac{1}{2} (A_x - jA_y) e^{j\varphi} = \\ &= [\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi] A_x + [\vec{e}_y \cos \varphi + \vec{e}_x \sin \varphi] A_y = \\ &= \vec{e}'_x A_x + \vec{e}'_y A_y. \end{aligned}$$

Следовательно, в точках  $z = 0$  и  $z = l$  имеем

$$E(0) = [\vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y];$$

$$E(l) = [\vec{e}'_x A_x + \vec{e}'_y A_y] e^{-j(k_+ + k_-)l/2}. \quad (3.99)$$

Новые единичные векторы  $\vec{e}'_x = \vec{e}_x \cos \phi - \vec{e}_y \sin \phi$  и  $\vec{e}'_y = \vec{e}_y \cos \phi + \vec{e}_x \sin \phi$  являются единичными векторами  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ , повернутыми по часовой стрелке (если  $\phi > 0$ ) на угол  $\phi$ , как показано на рис. 3.18 (для случая  $A_x \neq 0, A_y = 0$ ). Таким образом, волна остается линейно поляризованной, но плоскость ее поляризации вращается по мере распространения в глубь киральной среды.

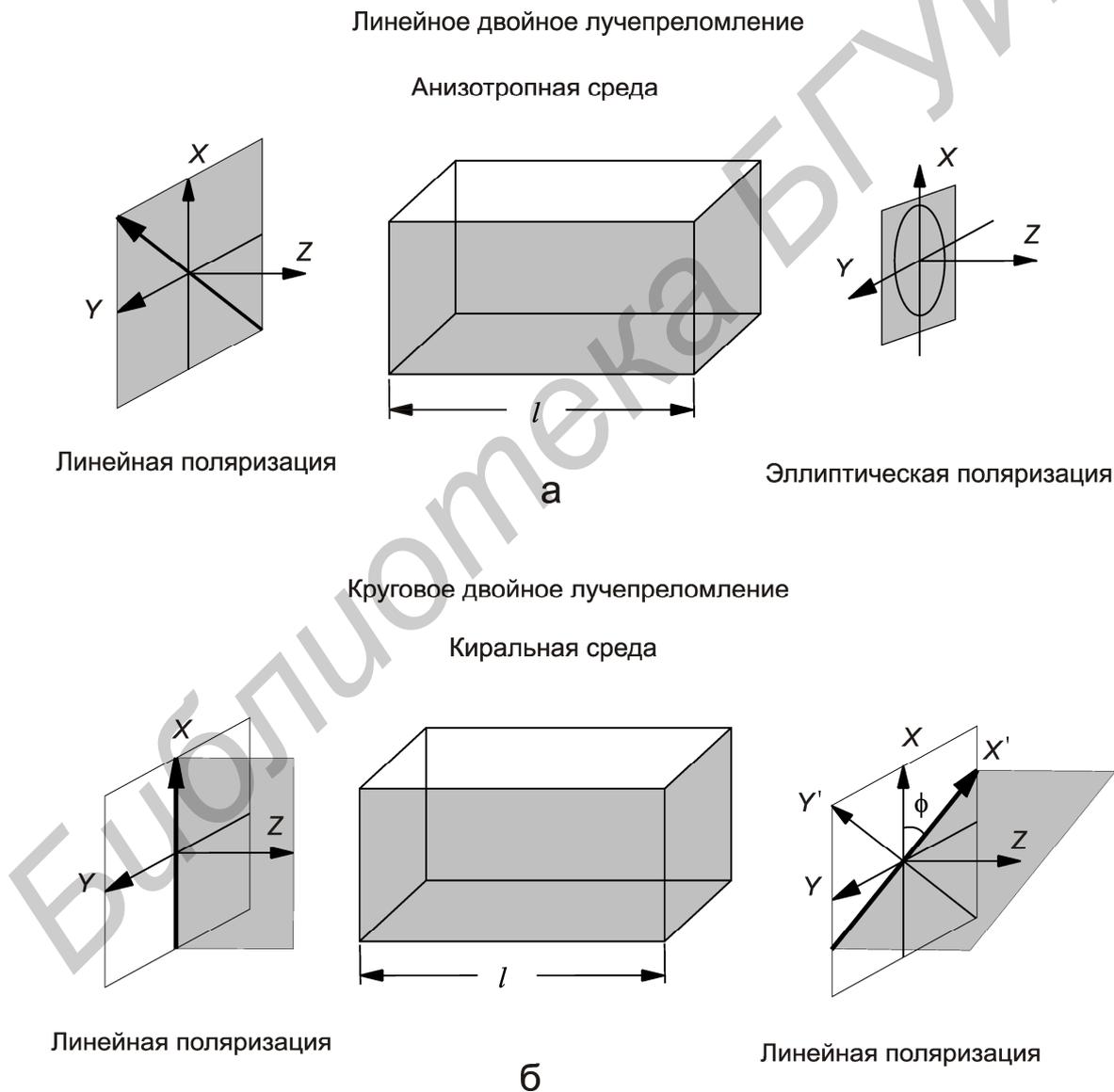


Рис. 3.18. Преобразователи поляризации в средах с двойным лучепреломлением: а – анизотропная среда, б – киральная среда

Если ЭМВ распространяется в отрицательном направлении оси  $Z$ , то, как

следует из уравнения (3.95), значения  $k_+$  и  $k_-$  меняются таким образом, что угол поворота плоскости поляризации  $\phi = (k_- - k_+)l/2$  становится отрицательным, но равным по абсолютному значению.

Если в киральной среде распространяется прямая волна, пройдя путь  $l$ , а затем испытывает отражение от какой-либо неоднородности, при этом, двигаясь в противоположном направлении к отправной точке, то полный угол поворота плоскости поляризации будет равен нулю.

Сравнивая данное явление, известное как естественный циклический сдвиг, с эффектом Фарадея в гиротропной среде (см. подразд. 3.6), видим, что поворот плоскости поляризации волны удваивается при отражении от неоднородности.

Таким образом, оптически активные, или киральные среды относятся к средам с круговым двойным лучепреломлением. Примерами могут служить сахарные растворы, протеины, липиды, нуклеиновые кислоты, аминокислоты, ДНК, витамины, гормоны и большинство других естественных веществ. В таких средах волны с круговой поляризацией распространяются без изменения с различными фазовыми скоростями распространения для право- и левополяризованных волн. По этой причине плоскости поляризации линейно поляризованных волн по мере их распространения вращаются.

### 3.7.3. Линейный и круговой дихроизмы

Дихроические поляризаторы (устройства, формирующие поле только одной поляризации в заданном поляризационном базисе), такие как поляроиды, используют материалы с линейным двойным лучепреломлением и обладают большим динамическим диапазоном коэффициентов затухания по двум противоположным поляризационным направлениям. Различают линейный и круговой дихроизмы.

Для реальной среды с потерями в гиротропных материалах, как было показано в подразд. 3.6, явление линейного дихроизма проявляется в том, что при наличии потерь в среде постоянные распространения являются комплексными величинами. Это приводит к итоговой эллиптической поляризации поля с неравными полуосями поляризационного эллипса. По этой причине в коммерческих поляризаторах предпочтение отдают использованию линейной поляризации поля.

В киральных средах может проявляться круговой дихроизм, в условиях которого волновые числа для волн с круговой поляризацией поля становятся комплексными  $k_{\pm} = \alpha_{\pm} - j\beta_{\pm}$  и уравнение (3.97) принимает вид

$$\begin{aligned}
E(l) &= \vec{e}_+ A_+ e^{-jk_+ l} + \vec{e}_- A_- e^{-jk_- l} = \\
&= \left[ \vec{e}_+ A_+ e^{-j(k_+ - k_-)l/2} + \vec{e}_- A_- e^{-j(k_+ - k_-)l/2} \right] e^{-j(k_+ + k_-)l/2} = \\
&= \left[ \vec{e}_+ A_+ e^{-\psi - j\phi} + \vec{e}_- A_- e^{\psi + j\phi} \right] e^{-j(k_+ - k_-)l/2},
\end{aligned} \tag{3.100}$$

где уже определился комплексный угол вращения как

$$\phi - j\psi = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)l = \frac{1}{2}(\alpha_+ - \alpha_-)l - j\frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)l. \tag{3.101}$$

Переходя к линейному базису по аналогии с (3.99), получим

$$\begin{aligned}
\vec{E}(0) &= \left[ \vec{e}'_x A'_x + \vec{e}'_y A'_y \right], \\
\vec{E}(l) &= \left[ \vec{e}'_x A'_x + \vec{e}'_y A'_y \right] e^{-j(k_+ + k_-)l/2},
\end{aligned} \tag{3.102}$$

где  $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y\}$  – единичные векторы, повернутые относительно исходных на тот же угол ( $\phi$ ), и

$$\begin{aligned}
A'_x &= A_x \operatorname{ch} \psi - jA_y \operatorname{sh} \psi, \\
A'_y &= A_y \operatorname{ch} \psi + jA_x \operatorname{sh} \psi.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Поскольку амплитуды  $A'_x, A'_y$  теперь комплексные, итоговая поляризация будет эллиптической.

## 4. ОТРАЖЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 4.1. Приближенные методы решения дифракционных задач

Наличие в среде локальной неоднородности с отличающимися параметрами вызывает в общем случае изменение характеристик направления распространения электромагнитных волн. Взаимодействие гармонического поля с такой неоднородностью возбуждает в ней вынужденные колебания свободных и связанных зарядов с частотой вынуждающей силы и приводит к возникновению вторичного поля (рассеянная или отраженная волна) с той же частотой колебаний. Часть энергии падающей волны переходит в объем неоднородности, образуя поле преломленной (прошедшей) волны. Результирующее или полное поле вне области неоднородности представляет собой векторную сумму первичного и рассеянного полей, изменяя первоначальное направление передачи энергии. Описанный процесс взаимодействия справедлив лишь в идеальном случае бесконечно большого расстояния от излучателя до неоднородности, когда вторичная волна не вызывает перераспределения токов и зарядов источника первичной волны.

Совокупность явлений, происходящих при взаимодействии электромагнитных волн с неоднородностью (объектом), имеющей отличающиеся от окружающей среды параметры, называется **дифракцией волн** на этих объектах. Под явлением дифракции обычно понимается поведение волн в некоторой области, имеющей границу раздела сред. Сущность решения дифракционных (краевых, граничных) задач заключается в определении частичных (рассеянных, преломленных) полей по заданному первичному полю, однако практический интерес представляет только дифракционное (результирующее) поле. Так как точные решения дифракционных задач, достаточно строго соответствующие физической модели, удается получить лишь в случае простой формы граничных поверхностей, широкое применение находят приближенные аналитические методы.

Если характерный размер неоднородной области значительно меньше длины волны, уравнения Гельмгольца приближенно переходят в уравнения Пуассона и полученное решение дифракционной задачи называют **квазистатическим** (в длинноволновом приближении).

Когда размеры объекта и радиусы кривизны его поверхности велики по сравнению с длиной волны, приближенные решения задачи называют **квазиоптическими** (в коротковолновом приближении). Из квазиоптических методов наибольшее применение нашли лучевые и волновые методы.

Лучевые методы включают геометрическую оптику, геометрическую теорию дифракции, метод параболического уравнения, комплексную геометрическую оптику и др.

Волновой подход связан с методом физической оптики (приближение Гюйгенса – Кирхгофа) и уточняет метод краевых волн.

В последнее время значительное внимание уделяется разработке численных методов решения задач дифракции, при использовании которых математи-

ческие модели процессов взаимодействия электромагнитных волн с локальными неоднородностями реализуются в виде комплекса программ и алгоритмов для вычислительных машин.

Приближение геометрической оптики хорошо согласуется с физическими представлениями о поле: в однородной среде распространение ЭМВ происходит прямолинейно (вдоль луча), а плотность энергии определяется законом сохранения потока энергии в заданном объеме, следствием которого является отсутствие обмена энергией между «лучевыми трубками», в том числе и соседними. Предполагается поэтому, что отражение соседних лучей происходит независимо друг от друга, а семейства падающих, отраженных и преломленных лучей лежат в одной плоскости – локальной плоскости падения.

Метод физической оптики основан на принципе Гюйгенса – Френеля – замене волновой поверхности системой вторичных источников сферической волны, интенсивность которых определяется составляющими поля падающей ЭМВ на освещенной стороне объекта и принимается равной нулю на теневой. Строго говоря, на неосвещенной стороне также существуют вторичные источники излучения за счет затекающих поверхностных токов, но их влиянием, как правило, пренебрегают при больших размерах тела по сравнению с длиной волны первичного излучателя. Это приводит к существенным погрешностям решения дифракционной задачи, так как при отсутствии тока на неосвещенной поверхности объекта влияние ее формы, кривизны и протяженности не сказывается на результирующем поле в области тени. Способ задания поверхностных токов свидетельствует о сходстве методов физической и геометрической оптики. Однако предпосылкой метода физической оптики является независимость токов, возбуждаемых в разных точках поверхности объекта, что позволяет учесть волновую природу ЭМП и получить отличный от нуля результат в области геометрической тени.

## **4.2. Законы отражения и преломления волн**

### **4.2.1. Критерий Релея**

Решение дифракционных задач при взаимодействии ЭМВ с неоднородными средами предполагает как отражение, так и прохождение, частичное или полное, во вторую среду. При протяженной границе раздела взаимодействие ЭМП со средой можно рассматривать как наклонное падение под углом  $\theta$  неограниченной плоской ЭМВ на гладкую неподвижную границу раздела двух полубесконечных сред.

Под гладкой границей раздела (рис. 4.1) по крайней мере будем понимать такую границу раздела с максимальной высотой неровностей  $h_{\max}$ , для которой разность хода лучей  $\Delta l = 2h_{\max} \cos \theta$  и соответственно разность фаз при квази-зеркальном отражении удовлетворяют неравенству

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi h_{\max} \cos\theta}{\lambda} < \frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{4}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) находим условие (критерий Релея), при котором поверхность можно считать гладкой:

$$h_{\max} \leq \frac{\lambda}{(8\dots 16)\cos\theta}. \quad (4.2)$$

Наличие шероховатости поверхности при отражении вызывает рассеяние падающей волны и уменьшение напряженности поля в зеркальном отражении, которое можно учесть с помощью эффективного коэффициента отражения  $R_э = R_i k_{ш}$ , где  $k_{ш}$  – коэффициент шероховатости подстилающей поверхности;  $R_i$  – коэффициент отражения от гладкой границы раздела двух сред (см. далее). Если интенсивность отраженной волны подчиняется закону Ламберта при наклонном падении на матовую поверхность (случай диффузного отражения), величина  $k_{ш} = (\cos\theta)^{1/2}$ , и при выполнении критерия Релея ее значение составляет не менее 0,87. Количественная оценка ослабления отраженного луча от крупных неровностей производится по методу Кирхгофа, от мелких – по методу возмущений при использовании статистических и экспериментальных данных.

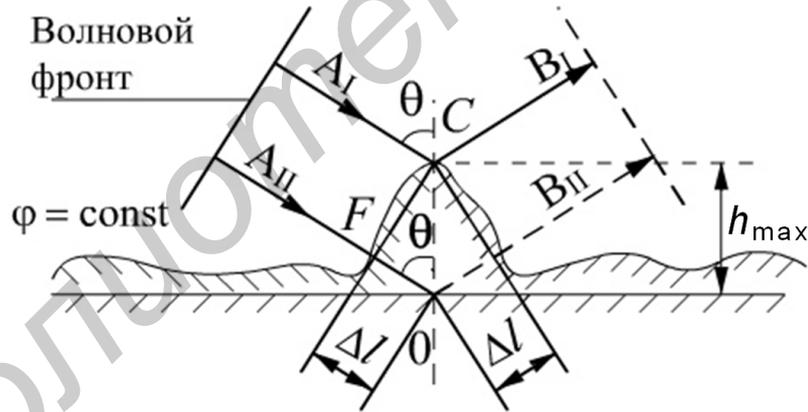


Рис. 4.1. Отражения плоской волны от шероховатой границы раздела

#### 4.2.2. Наклонное падение волны на границу раздела двух сред

Предполагается, что обе среды идеально однородны и решения уравнений Максвелла должны удовлетворять условиям непрерывности касательных составляющих векторов на границе раздела  $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ ,  $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$  для каждого полупространства.

Пусть плоская ЭМВ падает на границу раздела двух сред (рис. 4.2), характеризующихся абсолютными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_{1a}$ ,  $\mu_{1a}$  (первая среда) и  $\epsilon_{2a}$ ,  $\mu_{2a}$  (вторая среда).

**Плоскостью падения** волны называется плоскость, содержащая нормаль к границе раздела и вектор Пойтинга падающей волны  $\vec{\Pi}_п$ . Углом падения  $\theta_+$  называется угол между вектором Пойтинга падающей волны  $\vec{\Pi}_п$  и нормалью к границе раздела. Углом отражения  $\theta_-$  называется угол между вектором Пойтинга отражённой волны  $\vec{\Pi}_{отр}$  и нормалью к границе раздела. Углом преломления  $\theta'$  называется угол между вектором Пойтинга преломленной волны  $\vec{\Pi}_{пр}$  и нормалью к границе раздела.

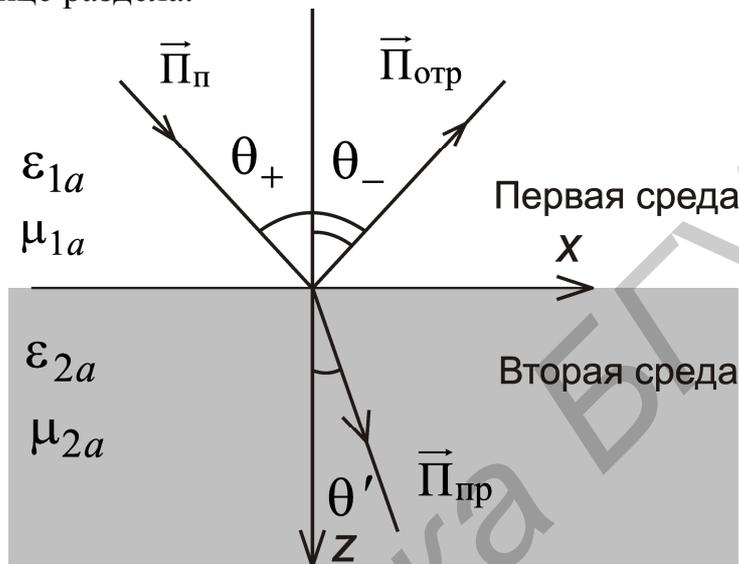


Рис. 4.2. Наклонное падение волны на границу раздела двух сред

В зависимости от ориентации вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  относительно плоскости падения различают два основных случая:

- параллельная или вертикальная или ТМ- или  $p$ -поляризация, когда вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости падения (рис. 4.3, а);
- перпендикулярная или горизонтальная поляризация или ТЕ- или  $s$ -поляризация, когда вектор  $\vec{E}$  ортогонален к плоскости падения (рис. 4.3, б).

Если вектор  $\vec{E}$  ориентирован под некоторым углом к плоскости падения, то он всегда может быть разложен на две ортогональные составляющие: первую, находящуюся в плоскости падения, и вторую, лежащую в плоскости, нормальной к плоскости падения. Установив законы поведения плоской волны на границе раздела сред для двух основных случаев, можно судить о её поведении при произвольном положении вектора  $\vec{E}$  относительно границы раздела.

Согласно граничным условиям, являющимся следствием решения уравнений Максвелла, несложно установить связь между углами падения, отражения и преломления в виде закона синусов:

$$k \sin \theta_+ = k \sin \theta_- = k' \sin \theta'_+ = k' \sin \theta'_-, \quad (4.3)$$

где  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_{1a}\mu_{1a}}$  – волновое число первой среды;  $k' = \omega\sqrt{\varepsilon_{2a}\mu_{2a}}$  – волновое число второй среды;  $\theta_{\pm}, \theta'_{\pm}$  – углы падения и отражения соответственно в первой и во второй средах.

При условии  $k_{x+} = k_{x-} = k'_{x+} = k'_{x-}$ ,  $k_{y+} = k_{y-} = k'_{y+} = k'_{y-}$  из (4.3) вытекают законы отражения

$$\begin{aligned}\theta_+ &= \theta_- \equiv \theta \\ \theta'_+ &= \theta'_- \equiv \theta'\end{aligned}\quad (4.4)$$

и преломления

$$n\sin\theta = n'\sin\theta' \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{n'}{n} = \frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2a}\mu_{2a}}{\varepsilon_{1a}\mu_{1a}}} = n_{21}, \quad (4.5)$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ ,  $n' = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$  – коэффициенты преломления первой и второй сред соответственно;  $n_{21}$  – относительный коэффициент преломления из первой среды во вторую;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1a}/\varepsilon_0$  – относительная диэлектрическая проницаемость первой среды;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2a}/\varepsilon_0$  – относительная диэлектрическая проницаемость второй среды;  $\mu_1 = \mu_{1a}/\mu_0$  – относительная магнитная проницаемость первой среды;  $\mu_2 = \mu_{2a}/\mu_0$  – относительная магнитная проницаемость второй среды.

Выражения (4.4) и (4.5) представляют собой известные из оптики законы отражения и преломления плоских волн и носят названия законов Снелла.

Отношение синусов углов падения и преломления равно постоянной величине  $n_{21}$ , зависящей только от параметров граничащих сред.

При  $n' > n$ ,  $n_{21} > 1$  (оптическая плотность второго диэлектрика больше, чем первого), согласно (4.5), имеем  $\sin\theta' = \sin\theta/n_{21} < \sin\theta$ . В этом случае каждому углу падения  $\theta$  соответствует вещественный угол преломления  $\theta'$ , вследствие чего при всех значениях  $\theta$  во второй среде существует однородная плоская преломленная волна. При преломлении волны в оптически более плотной среде направление ее распространения  $\vec{\Pi}_{\text{пр}}$  (см. рис. 4.2) приближается к нормали ( $\theta' < \theta$ ).

Если оптическая плотность второй среды меньше, чем первой ( $n' < n$ ,  $n_{21} < 1$ ), то  $\sin\theta' > \sin\theta$  и  $\theta'$  имеет вещественное значение лишь при таких углах падения  $\theta$ , для которых  $\sin\theta \leq n_{21}$ . При этих углах падения во второй среде существует однородная плоская преломленная волна, причем ее направление распространения  $\vec{\Pi}_{\text{пр}}$  приближается к границе раздела ( $\theta' > \theta$ ). Большим углам падения, определяемым неравенством  $\sin\theta > n_{21}$ , соответствуют значения  $\sin\theta > 1$  и, следовательно, комплексное значение угла преломления  $\theta'$ . Данное неравенство представляет собой условие, при котором во второй среде не может существовать однородная плоская преломленная волна и происходит полное внутреннее отражение.

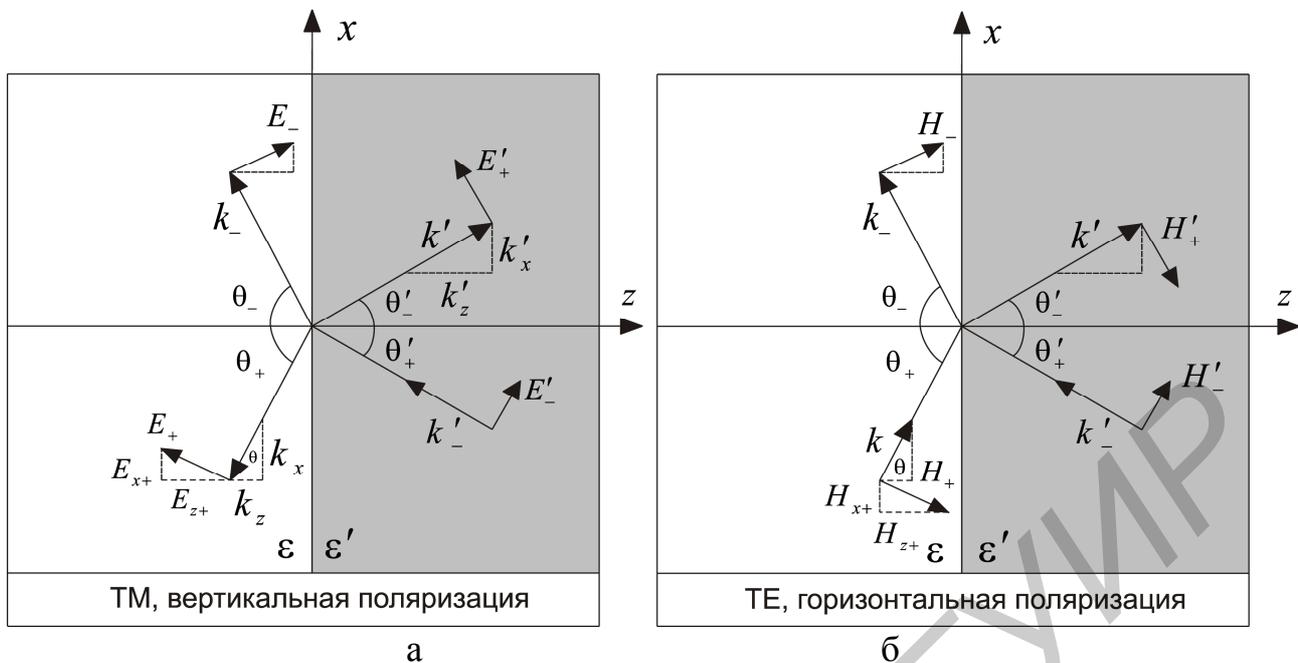


Рис. 4.3. Отражение и преломление при различных поляризациях волн

Поскольку законы отражения и преломления одинаковы для вертикальной и горизонтальной поляризации падающей волны, то они справедливы и при ее произвольной поляризации.

### 4.2.3. Коэффициенты отражения и прохождения

#### 4.2.3.1. Горизонтальная поляризация

Коэффициенты отражения и прохождения (коэффициенты Френеля) позволяют выразить амплитуды и начальные фазы отраженной и преломленной волн через параметры падающей волны и электромагнитные характеристики граничащих сред.

При вертикальной поляризации радиоволн касательной к границе раздела является составляющая  $E_z$  (см. рис. 4.3, а), а при горизонтальной поляризации волн – составляющая  $E_y$  (см. рис. 4.3, б).

При горизонтальной (перпендикулярной), или s-поляризации ЭМВ уравнения, связывающие тангенциальные составляющие комплексных амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн, имеют вид

$$\dot{E}_{n0} + \dot{E}_{отр0} = \dot{E}_{пр0}; \quad \frac{\cos\theta}{\dot{W}_{c1}}(\dot{E}_{n0} - \dot{E}_{отр0}) = \frac{\cos\theta'}{\dot{W}_{c2}}\dot{E}_{пр0}, \quad (4.6)$$

где  $\dot{E}_{n0}$ ,  $\dot{E}_{отр0}$ ,  $\dot{E}_{пр0}$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн на границе раздела двух сред соответственно;  $\dot{W}_{c1} = \sqrt{\dot{\mu}_{1a}/\dot{\epsilon}_{1a}}$  – характеристический импеданс первой

среды;  $\dot{W}_{c2} = \sqrt{\dot{\mu}_{2a}/\dot{\epsilon}_{2a}}$  – характеристический импеданс второй среды.

Из (4.6) несложно определить коэффициенты Френеля, полагая, что

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{отрy}}{\dot{E}_{ny}} \Big|_{z=0} = \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{п0}}, \quad \dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{прy}}{\dot{E}_{ny}} \Big|_{z=0} = \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{п0}}. \quad (4.7)$$

Используя (4.7), изменим вид соотношений (4.6):

$$1 + \dot{R}_{\perp} = \dot{T}_{\perp}; \quad 1 - \dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{W}_{c1} \cos \theta'}{\dot{W}_{c2} \cos \theta} \dot{T}_{\perp}. \quad (4.8)$$

Решение системы (4.8) позволяет определить коэффициент отражения через углы падения и отражения

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{п0}} = \frac{\dot{W}_{c2} \cos \theta - \dot{W}_{c1} \cos \theta'}{\dot{W}_{c2} \cos \theta + \dot{W}_{c1} \cos \theta'} \quad (4.9)$$

и коэффициент прохождения

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{п0}} = \frac{2\dot{W}_{c2} \cos \theta}{\dot{W}_{c2} \cos \theta + \dot{W}_{c1} \cos \theta'}. \quad (4.10)$$

#### 4.2.3.2. Вертикальная поляризация

При вертикальной (параллельной) поляризации ЭМВ (см. рис. 4.3,а) уравнения, связывающие комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн, имеют вид

$$\begin{cases} \cos \theta (\dot{E}_{п0} + \dot{E}_{отр0}) = \cos \theta' \dot{E}_{пр0}, \\ \frac{1}{\dot{W}_{c1}} (\dot{E}_{отр0} + \dot{E}_{п0}) = \frac{1}{\dot{W}_{c2}} \dot{E}_{пр0}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Для коэффициентов отражения и прохождения по определению имеем

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{отрz}}{\dot{E}_{пz}} \Big|_{z=0} = \frac{\dot{E}_{отр0}}{\dot{E}_{п0}}; \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{прz}}{\dot{E}_{пz}} \Big|_{z=0} = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \frac{\dot{E}_{пр0}}{\dot{E}_{п0}}. \quad (4.12)$$

Используя (4.12), соотношения (4.11) можно записать в виде

$$1 + \dot{R}_{\parallel} = \dot{T}_{\parallel}; \quad \dot{R}_{\parallel} - 1 = -\frac{\dot{W}_{c1} \cos \theta}{\dot{W}_{c2} \cos \theta'} \dot{T}_{\parallel}. \quad (4.13)$$

Решение системы (4.13) позволяет определить коэффициент отражения Френеля

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{отр}0}}{\dot{E}_{\text{п}0}} = \frac{\dot{W}_{c2} \cos \theta' - \dot{W}_{c1} \cos \theta}{\dot{W}_{c2} \cos \theta' + \dot{W}_{c1} \cos \theta} \quad (4.14)$$

и коэффициент прохождения Френеля

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{пр}0}}{\dot{E}_{\text{п}0}} = \frac{2\dot{W}_{c2} \cos \theta'}{\dot{W}_{c1} \cos \theta + \dot{W}_{c2} \cos \theta'}. \quad (4.15)$$

Коэффициенты Френеля для вертикальной и горизонтальной поляризаций можно представить в компактной форме:

$$\begin{aligned} \dot{R}_T &= \frac{\eta'_T - \eta_T}{\eta'_T + \eta_T} = \frac{n_T - n'_T}{n_T + n'_T}, \\ \dot{T}_T &= \frac{2\eta'_T}{\eta'_T + \eta_T} = \frac{2n_T}{n_T + n'_T}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $\eta_T, \eta'_T$  – поперечные импедансы и  $n_T, n'_T$  – поперечные коэффициенты преломления соответственно для первой и второй среды определяются как

$$\begin{aligned} \eta_T &= \begin{cases} \dot{W}_{c1} \cos \theta - \text{TM (вертикальная), } p\text{-поляризация,} \\ \frac{\dot{W}_{c1}}{\cos \theta} - \text{TE (горизонтальная), } s\text{-поляризация,} \end{cases} \\ n_T &= \begin{cases} \frac{n}{\cos \theta} - \text{TM (вертикальная), } p\text{-поляризация,} \\ n \cos \theta - \text{TE (горизонтальная), } s\text{-поляризация,} \end{cases} \\ \eta'_T &= \begin{cases} \dot{W}_{c2} \cos \theta' - \text{TM (вертикальная), } p\text{-поляризация,} \\ \frac{\dot{W}_{c2}}{\cos \theta'} - \text{TE (горизонтальная), } s\text{-поляризация,} \end{cases} \\ n'_T &= \begin{cases} \frac{n'}{\cos \theta'} - \text{TM (вертикальная), } p\text{-поляризация,} \\ n' \cos \theta' - \text{TE (горизонтальная), } s\text{-поляризация.} \end{cases} \end{aligned}$$

Если ЭМВ падает на границу раздела из второй среды, это можно учесть с помощью дуальной замены:

$$\dot{T}'_T = 1 + \dot{R}'_T = 1 - \dot{R}_T; \quad \dot{R}'_T = -\dot{R}_T; \quad \dot{T}'_T = 1 + \dot{R}_T. \quad (4.17)$$

### 4.2.3.3. Коэффициенты Френеля на границе раздела немагнитных сред

В выражениях (4.9), (4.10) и (4.14), (4.15) можно исключить угол преломления, если ограничиться случаем немагнитных сред ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) и положить  $\dot{W}_{c1}/\dot{W}_{c1} = \dot{n}_{21}$ .

Учитывая, что  $\cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} / n_{21}$ , коэффициенты Френеля примут вид

$$\begin{cases} \dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \\ \dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{n}_{21}^2 \cos \theta - \sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{\dot{n}_{21}^2 \cos \theta + \sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta}}, \\ \dot{T}_{\parallel} = \frac{2 \dot{n}_{21} \cos \theta}{\sqrt{\dot{n}_{21}^2 - \sin^2 \theta} + \dot{n}_{21}^2 \cos \theta}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Если первая среда по параметрам приближается к вакууму ( $\varepsilon_1 = 1$ ), выражения (4.18) и (4.19) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}, \\ \dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{\varepsilon}_2 \cos \theta - \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}{\dot{\varepsilon}_2 \cos \theta + \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}, \\ \dot{T}_{\parallel} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_2 \cos \theta}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta} + \dot{\varepsilon}_2 \cos \theta}, \end{cases} \quad (4.21)$$

где  $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - 60\lambda\sigma_2$ ;  $\varepsilon_2$  – действительная часть относительной диэлектрической проницаемости второй среды;  $\sigma_2$  – удельная электропроводность второй среды;  $\lambda$  – длина волны.

При определении коэффициентов отражения Френеля для волн с круговой поляризацией, например правого вращения, можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{R}_R = |\dot{R}_R| e^{\varphi_R} = \frac{1}{2}(\dot{R}_\perp + \dot{R}_\parallel) = -\frac{\sin^2 \theta}{\dot{n}' \cos \theta + 1}, \\ \dot{R}_L = |\dot{R}_L| e^{\varphi_L} = \frac{1}{2}(\dot{R}_\perp - \dot{R}_\parallel) = -\frac{\dot{n}' \cos \theta}{\dot{n}' \cos \theta + 1}, \end{cases} \quad (4.22)$$

где  $\dot{R}_R$  – коэффициент отражения для волны с согласной поляризацией (правого вращения);  $\dot{R}_L$  – коэффициент отражения для волны с кроссполяризационным компонентом (левого вращения).

### 4.3. Полное прохождение волны через границу раздела

При падении плоских ЭМВ на границу раздела двух сред при определённых условиях коэффициент отражения может обращаться в нуль. Угол падения, при котором падающая волна полностью, без отражения проникает из одной среды в другую, называется **углом Брюстера** и обозначается  $\theta_B$ .

Из (4.9) и (4.14) следует, что  $\theta_B$  удовлетворяет одному из двух уравнений

$$W_{c2} \cos \theta_B - W_{c1} \cos \theta'_B = 0 \quad (4.23)$$

при перпендикулярной поляризации, либо

$$W_{c1} \cos \theta_B - W_{c2} \cos \theta'_B = 0 \quad (4.24)$$

при параллельной поляризации.

Здесь под  $\theta'_B$  подразумевается угол преломления, соответствующий углу падения  $\theta_B$ . Уравнения (4.23) и (4.24) взаимно противоречат друг другу, т. е. явление полного преломления можно наблюдать либо при перпендикулярной, либо при параллельной поляризации.

Для параллельной поляризации угол Брюстера определяется из выражения

$$\sin \theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2a}(\mu_{1a}\varepsilon_{2a} - \mu_{a2}\varepsilon_{1a})}{\mu_{1a}(\varepsilon_{2a} - \varepsilon_{1a})(\varepsilon_{2a} + \varepsilon_{1a})}}. \quad (4.25)$$

При  $\mu_{1a} = \mu_{2a}$  (4.25) примет вид

$$\sin \theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2a}}{\varepsilon_{2a} + \varepsilon_{1a}}}. \quad (4.26)$$

При  $\mu_{1a} \neq \mu_{2a}$  и  $\varepsilon_{2a} > \varepsilon_{1a}$  знаменатель в (4.25) положителен и существование угла Брюстера выполняется при условии, когда

$$\mu_{1a}\varepsilon_{2a} > \mu_{2a}\varepsilon_{1a} \quad \text{или} \quad \mu_{2a}\varepsilon_{2a} > \mu_{1a}\varepsilon_{1a}. \quad (4.27)$$

Если  $\mu_{1a} \neq \mu_{2a}$  и  $\varepsilon_{2a} < \varepsilon_{1a}$ , знаменатель в (4.25) отрицателен и для физического существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенства

$$\mu_{1a}\varepsilon_{2a} < \mu_{2a}\varepsilon_{1a} \quad \text{или} \quad \mu_{2a}\varepsilon_{2a} < \mu_{1a}\varepsilon_{1a}. \quad (4.28)$$

Для перпендикулярной поляризации угол полного преломления определяется из выражения

$$\sin \theta_{B\perp} = \sqrt{\frac{\mu_{2a}(\varepsilon_{1a}\mu_{2a} - \varepsilon_{2a}\mu_{1a})}{\varepsilon_{1a}(\mu_{2a} - \mu_{1a})(\mu_{2a} + \mu_{1a})}}. \quad (4.29)$$

При  $\varepsilon_{2a} = \varepsilon_{1a}$  выражение (4.30) примет вид

$$\sin \theta_{B\perp} = \sqrt{\frac{\mu_{2a}}{\mu_{2a} + \mu_{1a}}}, \quad (4.30)$$

и, когда  $\varepsilon_{2a} \neq \varepsilon_{1a}$ ,  $\mu_{2a} > \mu_{1a}$ , знаменатель в (4.30) положителен и физическое существование угла Брюстера выполняется при условии

$$\mu_{2a}\varepsilon_{1a} > \mu_{1a}\varepsilon_{2a} \quad \text{или} \quad \mu_{2a}\varepsilon_{2a} > \mu_{1a}\varepsilon_{1a}. \quad (4.31)$$

Если  $\varepsilon_{2a} \neq \varepsilon_{1a}$  и  $\mu_{2a} < \mu_{1a}$ , знаменатель в (4.30) отрицателен и для физического существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенства:

$$\mu_{2a}\varepsilon_{1a} < \mu_{1a}\varepsilon_{2a} \quad \text{или} \quad \mu_{2a}\varepsilon_{2a} < \mu_{1a}\varepsilon_{1a}. \quad (4.32)$$

В случае немагнитных сред  $\mu_{2a} = \mu_{1a} = \mu_0$  угол Брюстера существует только при параллельной (вертикальной) поляризации ЭМВ.

Угол Брюстера также называют углом полной поляризации из-за того, что в случае падения на границу раздела диэлектрических сред в общем случае поля смешанной поляризации (ТМ- и ТЕ-волн) отражение наблюдается только для волн с горизонтальной поляризацией.

Рассмотрим один из наиболее важных в теории распространения ЭМВ

случай, когда первая среда характеризуется  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$  (вакуум), вторая среда не обладает магнитными свойствами  $\mu_2 = 1$ . Тогда для коэффициентов отражения Френеля при различных видах поляризации, используя (4.21) и (4.22), можем записать:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{\varepsilon}_2 \cos \theta - \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}}{\dot{\varepsilon}_2 \cos \theta + \sqrt{\dot{\varepsilon}_2 - \sin^2 \theta}} = |\dot{R}_{\parallel}| e^{j\varphi_{\parallel}}, \quad (4.33)$$

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta}} = |\dot{R}_{\perp}| e^{j\varphi_{\perp}}. \quad (4.34)$$

Выражая диэлектрические проницаемости сред через соответствующие коэффициенты преломления и приравнявая числитель (4.33) к нулю, получим соотношение

$$\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2 \theta_B} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \cos \theta_B. \quad (4.35)$$

После несложных преобразований из (4.35) находим угол Брюстера:

$$\sin \theta_B = \frac{n'}{\sqrt{n^2 + n'^2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n'}{n} \Leftrightarrow \theta_{B\parallel} = \operatorname{arctg} \frac{n'}{n} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (4.36)$$

Точно так же угол Брюстера  $\theta'_B$  можно определить при падении волны из второй среды:

$$\sin \theta'_B = \frac{n'}{\sqrt{n^2 + n'^2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta'_B = \frac{n'}{n} \Leftrightarrow \theta'_{B\parallel} = \operatorname{arctg} \frac{n'}{n} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (4.37)$$

что непосредственно вытекает из законов Снелля ( $n' \sin \theta'_B = n \sin \theta_B$ ):

$$\frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n'}{n} = \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta'_B} \text{ и, следовательно, } \theta_B + \theta'_B = 90^\circ.$$

Ход отраженных и преломленных лучей для двух случаев показан на рис. 4.4 а, б, из которого видно, что пространственная разность фаз между преломленным и отраженным лучами равна  $180^\circ - (\theta'_B + \theta_B) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

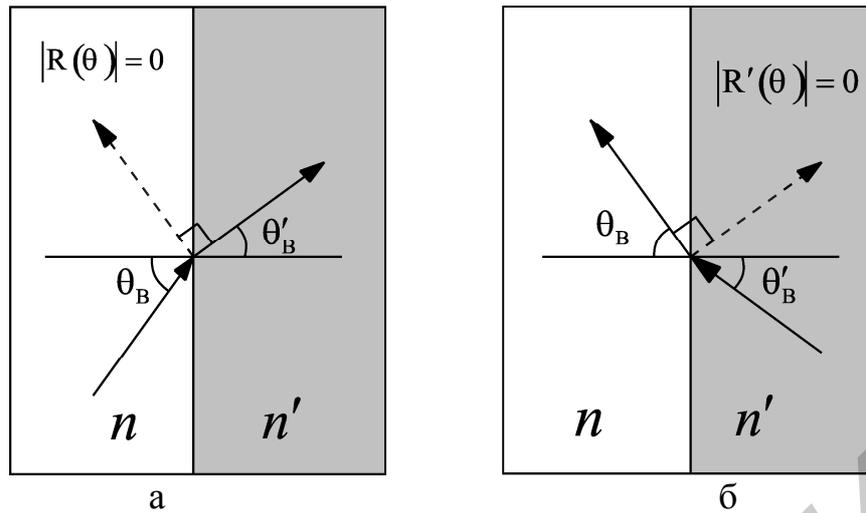


Рис. 4.4. Углы Брюстера по разные стороны от границы раздела

В качестве примера определим углы Брюстера для волн оптического диапазона при падении волны с разных сторон от границы раздела воздух – вода. Полагая, что для вод  $n_{water} = 1,333$ , находим

$$\theta_B = \arctg\left(\frac{1,333}{1}\right) = 53,1^\circ, \quad \theta'_B = \arctg\left(\frac{1}{1,333}\right) = 36,9^\circ.$$

Отметим, что сумма углов Брюстера по разные стороны от границы раздела составляет  $\theta_B + \theta'_B = 90^\circ$ . На радиочастотах коэффициент преломления воды  $n_{water(rad)} \approx 9$  и поэтому  $\theta_B = 83,7^\circ$  и  $\theta'_B = 6,3^\circ$ . Подставляя полученные значения углов в (4.33) и (4.34), находим коэффициенты отражения для двух поляризаций поля:  $\dot{R}_\perp(\theta_B) = -0,2798$  и  $|\dot{R}_\parallel(\theta_B)|^2 = 0,0783$ . Таким образом, при падении волны с вертикальной поляризацией под углом Брюстера на границу раздела воздух-вода от водной поверхности отражается только 7,83 % падающей энергии.

Можно рассчитать углы Брюстера для случая падения плоской волны с обеих сторон от границы раздела воздух – стекло, полагая, что для оптического диапазона частот  $n_{glass} = 1,5$ :

$$\theta_{B\,glass} = \arctg\left(\frac{1,5}{1}\right) = 56,3^\circ, \quad \theta'_{B\,glass} = \arctg\left(\frac{1}{1,5}\right) = 33,7^\circ.$$

Для такой же границы раздела на рис. 4.5 а, б представлены рассчитанные по (4.33) и (4.34) зависимости модулей коэффициентов отражения  $|\dot{R}_\parallel|$ ,  $|\dot{R}_\perp|$  от угла падения  $\theta$ . Отсчет обоих коэффициентов начинается от значения

$|\dot{R}_{\parallel}| = |(1-1,5)/(1+1,5)| = 0,2$ , соответствующего нормальному падению волны ( $\theta = 0$ ), и стремится к единице по мере приближения угла падения к  $\theta = 90^\circ$  (скользящее распространение волны). Коэффициент  $|\dot{R}_{\parallel}|$  обращается в нуль, когда угол падения равен углу Брюстера  $\theta_B = 56,3^\circ$ . График (см. рис. 4.5, б) характеризует коэффициенты отражения  $|\dot{R}_{\parallel}(\theta')|$  как функцию угла падения  $\theta'$  со стороны стекла, где отмечено значение  $\theta'_B = 33,7^\circ$ .

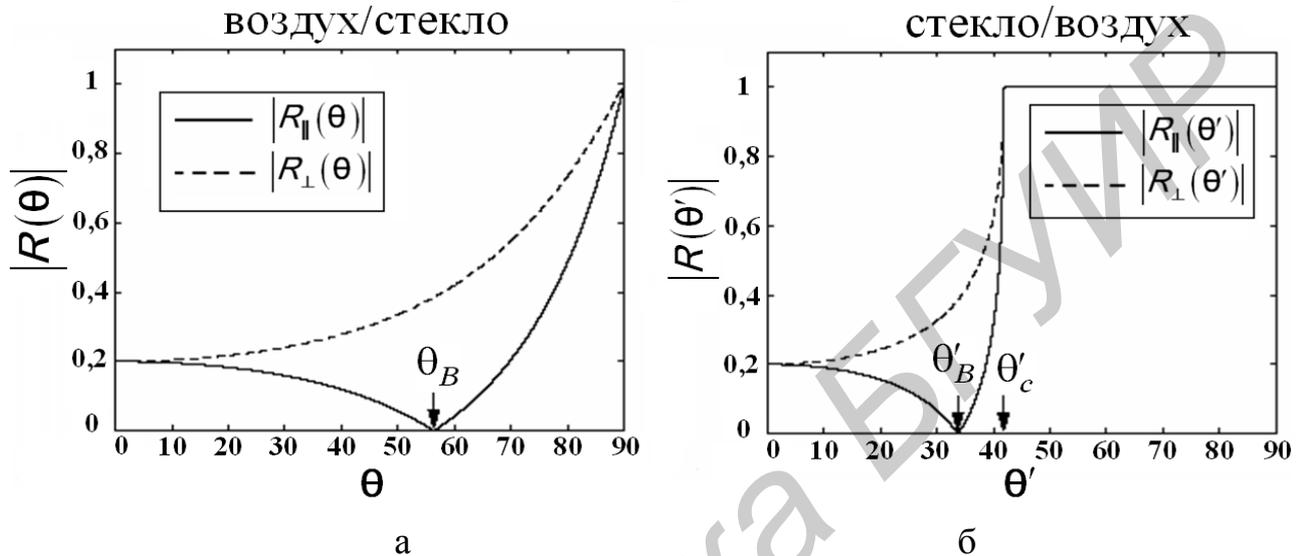


Рис. 4.5. Зависимости модулей коэффициентов отражения  $|\dot{R}_{\parallel}(\theta)|$  и  $|\dot{R}_{\perp}(\theta')|$  от углов падения  $\theta$  и  $\theta'$  для идеального диэлектрика

На рис. 4.5 отмечено также положение критического угла  $\theta'_c = a \sin(1/1,5) = 41,8^\circ$ , смысл которого объясняется в следующем разделе.

В диэлектриках с потерями понятие «угол Брюстера» утрачивает свое значение, так как коэффициент преломления является комплексной величиной  $n_d = n - jk$ . Полагая коэффициент преломления даже для одной среды комплексным, из (4.36) и (4.37) немедленно следует, что  $\theta_B$  будет также комплексным.

Расчеты коэффициентов Френеля по (4.33) и (4.34) для случая диэлектрика с потерями с параметрами  $n_d = 1,50 - 0,15j$  и  $n_d = 1,50 - 0,30j$  представлены на рис. 4.6, а, б, из которых видно, что общий характер поведения кривых аналогичен случаю для идеального диэлектрика, и в частности для  $|\dot{R}_{\parallel}(\theta')|$  коэффициент отражения имеет минимум вблизи угла Брюстера для идеального диэлектрика. Чем больше коэффициент ослабления  $k$ , тем больше кривые отклоняются от кривых для случая среды без потерь.

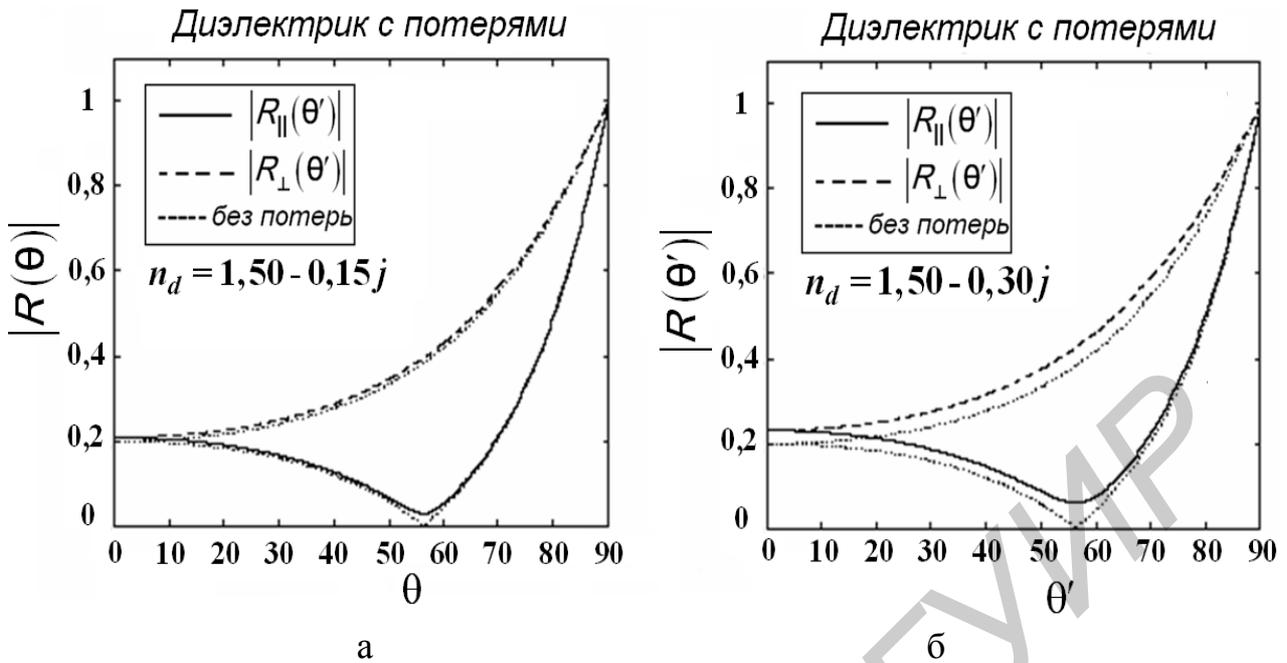


Рис. 4.6. Зависимости модулей коэффициентов отражения  $|\dot{R}_{\parallel}(\theta)|$  и  $|\dot{R}_{\perp}(\theta)|$  от углов падения  $\theta$  и  $\theta'$  для диэлектрика с потерями

Для того чтобы проследить изменение коэффициентов отражения в зависимости от длины волны ЭМП, были выполнены расчеты по (4.33) и (4.34) для реальных сред с параметрами  $\sigma = 0,01 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon_2 = 4$  и  $\sigma = 4 \text{ См/м}$ ,  $\epsilon_2 = 80$ . Результаты этих расчетов для модулей  $|\dot{R}_{\parallel}|$ ,  $|\dot{R}_{\perp}|$  и фаз  $\varphi_{\parallel}$ ,  $\varphi_{\perp}$  при вертикальной и горизонтальной поляризации поля представлены на рис. 4.7 и 4.8 (сплошные линии – вертикальная поляризация, штриховые – горизонтальная).

Как следует из представленных на рис. 4.7, 4.8 зависимостей, модули коэффициентов отражения при  $\theta \rightarrow \pi/2$  стремятся к единице, а фаза  $\varphi \rightarrow \pi$ , причём тем быстрее, чем больше рабочая длина волны  $\lambda$ , и не зависят от вида поляризации сигнала. Для вертикальной поляризации графики зависимостей  $|\dot{R}_{\parallel}(\theta)|$  и  $\varphi_{\parallel}(\theta)$  имеют немонотонный характер и характеризуются некоторым минимальным значением. Как следует из графиков, для модуля коэффициента отражения угол Брюстера существует только для сред, у которых  $\sigma = 0$ . Конечное значение  $\sigma$  не обеспечивает условия полного прохождения ( $|\dot{R}_{\parallel}| = 0$ ), однако минимальное значение коэффициента отражения существует. Угол  $\theta_{\min}$ , при котором коэффициент отражения имеет минимальное значение, получил название псевдобрюстеровского угла. Значение этого угла в значительной мере зависит от рабочей длины волны и диэлектрической проницаемости ( $\epsilon_2$ ) второй среды.

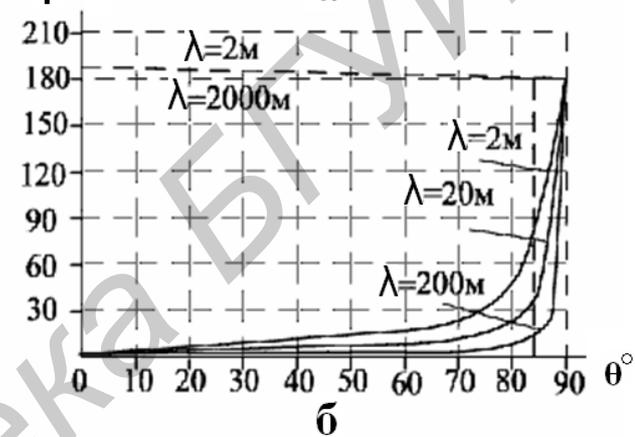
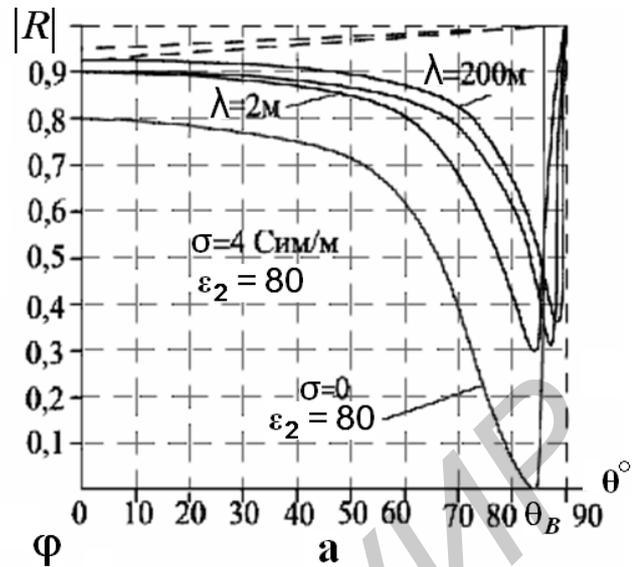
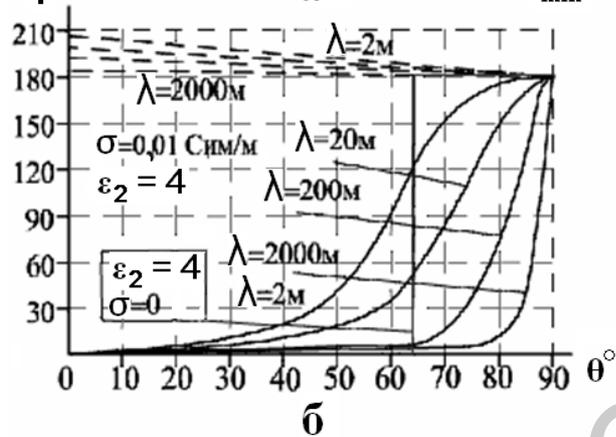
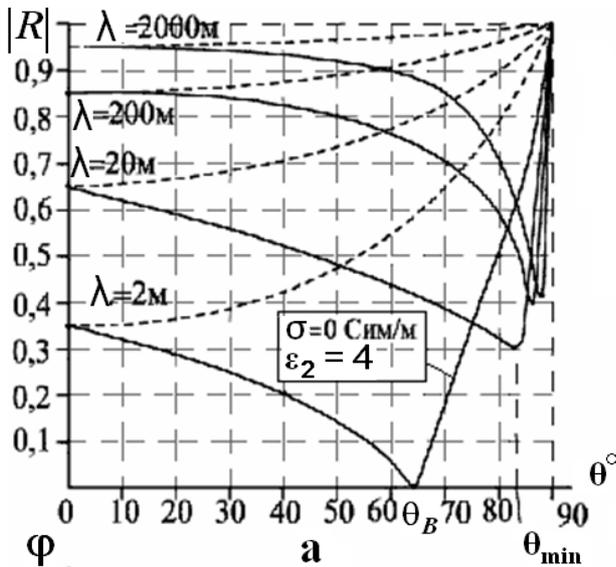


Рис. 4.7. Зависимости  $|\dot{R}_\perp(\theta)|$ ,  $|\dot{R}_\parallel(\theta)|$ ,  $\phi_\perp(\theta)$ ,  $\phi_\parallel(\theta)$  для  $\sigma = 0,01$  СМ/М,  $\epsilon_2 = 4$

Рис. 4.8. Зависимости  $|\dot{R}_\perp(\theta)|$ ,  $|\dot{R}_\parallel(\theta)|$ ,  $\phi_\perp(\theta)$ ,  $\phi_\parallel(\theta)$  для  $\sigma = 4$  СМ/М  $\epsilon_2 = 80$

#### 4.4. Полное внутреннее отражение

При изменении угла падения в пределах  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  угол преломления  $\theta'$  также будет изменяться в некотором диапазоне. Этот диапазон может быть определен из закона Снелля.

Пренебрегая потерями в диэлектрике и полагая, что  $n < n'$ , из (4.5) следует, что  $\sin \theta' = \frac{n}{n'} \sin \theta < \sin \theta$ , или  $\theta' < \theta$ . Таким образом, если волна падает из менее плотной среды в более плотную среду, угол преломления всегда меньше, чем угол падения. Максимальное значение  $\theta'$ , обозначенное здесь  $\theta'_c$ , достигается при максимуме угла падения и составляет  $\theta = 90^\circ$ . При этом из законов Снелля следует

$$\sin \theta'_c = \frac{n}{n'}. \quad (4.38)$$

Таким образом, диапазоны значений углов падения и отражения лежат в границах  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  и  $0 \leq \theta' \leq \theta'_c$ . На рис. 4.9 представлен ход лучей для двух

случаев: падения волны из оптически менее плотной среды в более плотную, т. е. когда  $n < n'$  (рис. 4.9, а), и инверсный случай – для  $n > n'$  (рис. 4.9, б).

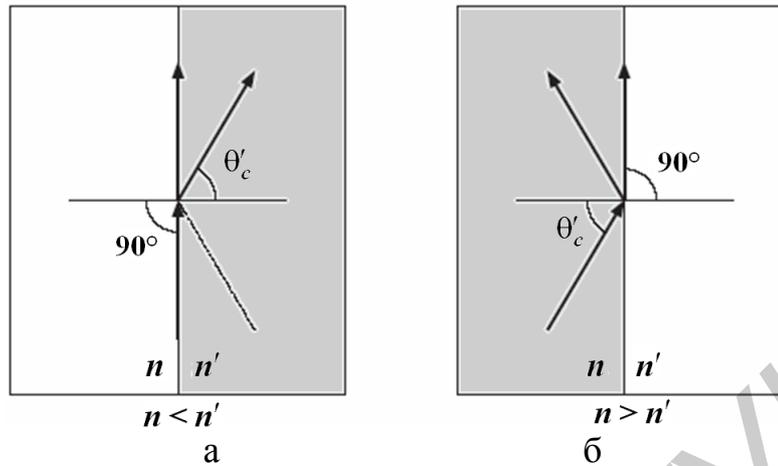


Рис. 4.9. Максимальный угол преломления и критический угол падения

Если  $n > n'$  и волна падает из более плотной среды в менее плотную, то  $\sin \theta' = \frac{n}{n'} \sin \theta > \sin \theta$ , или  $\theta' > \theta$ . Поэтому  $\theta'$  достигнет максимального значения  $90^\circ$  прежде, чем  $\theta$ . Соответствующее максимальное значение  $\theta$  также удовлетворяет закону Снелля, и при условии  $n \sin \theta_c = n' \sin(\pi/2) = n'$  получим

$$\sin \theta_c = \frac{n'}{n}. \quad (4.39)$$

Угол  $\theta_c$  называют критическим углом падения. Если волна падала бы справа от границы раздела, то  $\theta_c$  рассматривался как максимальный угол преломления. Условие  $\theta \leq \theta_c$  соответствует случаю нормального преломления в менее плотную среду. Если  $\theta$  превышает критический угол  $\theta_c$ , то падающая волна не испытывает преломления и полностью отражается в более плотную среду. Это явление называют *полным внутренним отражением*. Полагая  $n'/n = \sin \theta_c$ , представим коэффициенты отражения (4.33) и (4.34) в следующем виде:

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta} - \sin^2 \theta_c \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta} + \sin^2 \theta_c \cos \theta}, \quad R_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta}}.$$

Если  $\theta < \theta_c$ , коэффициенты отражения действительны и при  $\theta = \theta_c$  коэффициенты отражения соответственно равны  $\dot{R}_{\parallel} = -1$ ,  $\dot{R}_{\perp} = 1$ . В случае  $\theta > \theta_c$  коэффициенты отражения становятся комплексными с единичной амплитудой

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{j\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c} - \sin^2 \theta_c \cos \theta}{j\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c} + \sin^2 \theta_c \cos \theta}, \quad \dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \theta - j\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}}{\cos \theta + \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}}.$$

Эти выражения представляют собой отношения комплексно сопряженных величин и поэтому  $|\dot{R}_{\perp}| = |\dot{R}_{\parallel}| = 1$  для всех значений  $\theta > \theta_c$ . Таким образом, при полном внутреннем отражении граница раздела становится прекрасным отражателем с нулевым коэффициентом пропускания в менее плотную среду.

Если  $\theta > \theta_c$ , составляющие ЭМП справа от границы раздела имеют ненулевые значения и по мере распространения в глубь (вдоль координатной оси  $Z$ ) затухают по экспоненциальному закону. Для того чтобы объяснить такое поведение поля, представим продольное волновое число в правой среде  $k'_z$  через угол падения  $\theta$ . Учитывая, что  $k_z^2 + k_x^2 = k^2 = n^2 k_0^2$ ,  $k_z'^2 + k_x'^2 = k'^2 = n'^2 k_0^2$  и поскольку  $k'_x = k_x = k \sin \theta = n k_0 \sin \theta$ , для волнового числа  $k'_z$  получим следующее соотношение:

$$k_z'^2 = n'^2 k_0^2 - k_x'^2 = n'^2 k_0^2 - n^2 k_0^2 \sin^2 \theta = k_0^2 (n'^2 - n^2 \sin^2 \theta),$$

и, производя замену  $n' = n \sin \theta_c$ , окончательно можем записать

$$k_z' = n^2 k_0^2 (\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta). \quad (4.40)$$

Если  $\theta \leq \theta_c$ , волновое число  $k'_z$  действительно и в среде распространяется обычная преломленная волна. Но если  $\theta > \theta_c$ , волновое число  $k'_z$  становится чисто мнимой величиной, так как  $k_z'^2 < 0$ . Поэтому, представляя  $k'_z = -j\alpha'_z$ , можем определить характер поведения поля во второй среде по мере его распространения вдоль координатной оси  $z$ :

$$e^{-jk'_z z} = e^{-\alpha'_z z}, \quad \text{где} \quad \alpha'_z = nk_0 \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}.$$

Такое экспоненциальное затухание поля называют исчезающими волнами, поскольку их существование ограничено глубиной проникновения поля в пределах нескольких  $z = 1/\alpha'_z$  от границы раздела.

Максимальное значение  $\alpha'_z$ , или минимальная глубина проникновения  $1/\alpha'_z$ , достигается при  $\theta = 90^\circ$ :

$$\alpha'_{\max} = nk_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = nk_0 \cos \theta_c = k \sqrt{n^2 - n'^2}.$$

Следует отметить, что независимо от вида поляризации волн при условии  $\theta \geq \theta_c$  величина  $\cos \theta'$  будет иметь чисто мнимый характер и поэтому разность фаз между поперечными компонентами поля  $E_T$  и  $H_T$  составит  $90^\circ$ . Следовательно, усредненный поток энергии в правой среде  $\Pi_z = \text{Re}(E_T H_T^*)/2 = 0$  и ЭМВ не распространяется.

В качестве примера определим критические углы при наклонном падении плоской волны на границы разделов воздух-стекло и воздух-вода. Напомним, что в оптическом диапазоне частот коэффициенты преломления для стекла и воды соответственно равны:  $n_{glass} = 1,5$  и  $n_{water} = 1,333$ . Если для воздуха  $n = 1$ , а для стекла  $n' = n_{glass}$ , то  $\sin(\theta'_c) = n/n' = 1/n_{glass}$ , и если  $n = n_{glass}$ , то  $n' = 1$  и  $\sin(\theta_c) = n'/n = 1/n_{glass}$ . Таким образом,  $\theta'_c = \theta_c$ , и для границы раздела воздух-стекло имеем

$$\theta_{c\ glass} = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ.$$

Таким же образом определяем критический угол для границы раздела воздух – вода:

$$\theta_{c\ water} = \arcsin\left(\frac{1}{1,333}\right) = 48,6^\circ.$$

В радиочастотном диапазоне коэффициент преломления больше, чем в оптическом, и приблизительно составляет  $n_{water(rad)} \approx 9$ . Поэтому критический угол меньше, чем в оптическом диапазоне, и приблизительно составляет  $\theta_{c\ water(rad)} = 6,4^\circ$ .

Явление полного внутреннего отражения широко используется на практике, например, в оптических приборах для зеркального отражения лучей без использования металлических зеркал (рис. 4.10).

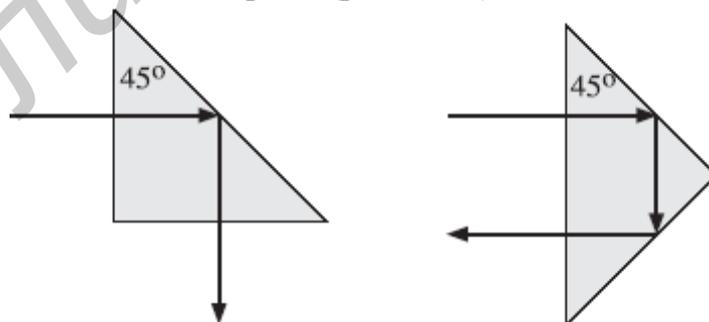


Рис. 4.10. Примеры использования явления полного внутреннего отражения в стеклянных призмах

В обоих случаях падающий луч отражается от внутренней стороны призмы под углом  $45^\circ$ , который превышает критический угол для границы раздела воздух – стекло ( $\theta_{c\ glass} = 41,8^\circ$ ). Таким образом, имеет место полное внутреннее

отражение и поверхность призмы действует как прекрасное зеркало.

Рассмотрим другой пример, известный как явление «оптического люка». Для границы раздела вода–воздух  $\theta_{c\ water} = 48,6^\circ$ . Поэтому, если смотреть на водную поверхность со стороны воздуха, в воде видны предметы только в пределах конического сектора, ограниченного максимальным углом преломления. И наоборот, если смотреть на граничную поверхность из воды, то можно наблюдать пространство в воздушной среде только в пределах критического углового сектора  $2 \times 48,6 = 97,2^\circ$  (рис. 4.11).

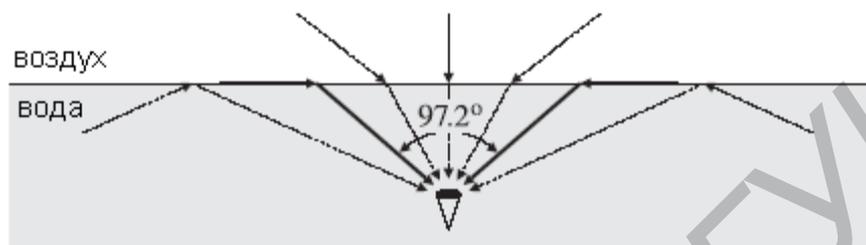


Рис 4.11. Явление «оптический люк»

Лучи, падающие снизу на границу раздела под углом, большим  $\theta_{c\ water}$ , полностью отражаются, поэтому большая часть водного пространства вне критического конического сектора будет казаться темной.

Подводные объекты, рассматриваемые с внешней стороны, кажутся ближе к поверхности, чем это есть на самом деле. «Видимая глубина» объекта зависит от угла зрения  $\theta$  (рис. 4.12).

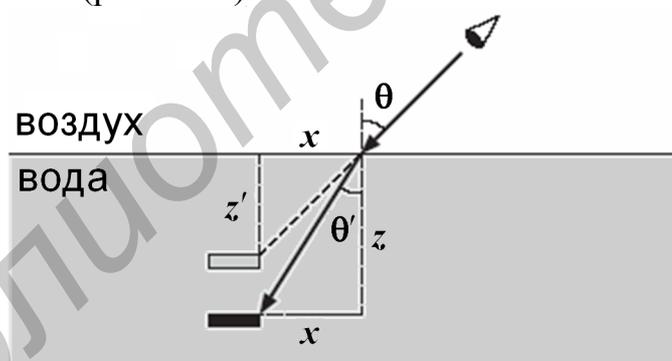


Рис. 4.12. Видимая глубина подводных предметов

Пусть  $z$  и  $z'$  – фактическая и «видимая» глубины соответственно. Из геометрии рисунка следует, что  $z = x \operatorname{ctg}\theta'$  и  $z = x \operatorname{ctg}\theta$ . Тогда

$$z' = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta'} z = \frac{\sin\theta' \cos\theta}{\sin\theta \cos\theta'} z.$$

Используя закон Снелля  $\sin\theta/\sin\theta' = n/n' = n_{\text{water}}$ , несложно определить «видимую» глубину объекта:

$$z' = \frac{\cos \theta}{\sqrt{n_{\text{water}}^2 - \sin^2 \theta}} z.$$

При нормальном падении волны ( $\theta = \pi/2$ ) получим  $z' = z/n_{\text{water}} = z/1,333 = 0,75z$ , т. е. подводные объекты будут видны на 25% ближе, чем они расположены на самом деле.

В оптических волокнах также применяется явление полного внутреннего отражения.

На рис. 4.13 показана продольная структура оптического волокна со ступенчатым профилем показателя преломления с индексом преломления сердцевины  $n_f$  и материалом оболочки с индексом преломления  $n_c < n_f$ .



Рис. 4.13. Ход лучей в оптоволокне

Если угол падения на границе раздела оболочка – волокно больше, чем критический угол, тогда будет иметь место полное внутреннее отражение. На рис. 4.13 показано, что луч начинает движение из воздушной среды. Максимальный угол падения  $\theta_a$  должен соответствовать критическому углу  $\theta_c$  для границы раздела волокно – оболочка. Используя законы Снелла для двух границ раздела, можем записать

$$\sin \theta_a = \frac{n_f}{n_a} \sin \theta_b, \quad \sin \theta_c = \frac{n_c}{n_f}.$$

Учитывая, что  $\theta_b = 90^\circ - \theta_c$ , находим

$$\sin \theta_a = \frac{n_f}{n_a} \cos \theta_c = \frac{n_f}{n_a} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_a}.$$

Например, при  $n_a = 1$ ,  $n_f = 1,49$  и  $n_c = 1,48$  критический угол составит  $\theta_c = 83,4^\circ$  и соответственно  $\theta_a = 9,9^\circ$ . Угол  $\theta_a$  называется углом захвата, а величина  $NA = \sqrt{n_f^2 - n_c^2}$  – числовой апертурой волокна.

#### 4.5. Сложные волны

В общем случае волновые числа граничных сред  $k = \beta - ja$  являются комплексными (см. подразд. 3.2). Рассмотрим наиболее простой случай, когда граничные среды немагнитные ( $\mu = \mu' = \mu_0$ ) и поле возбуждения находится слева от границы раздела (см. рис. 4.3). Для того чтобы упростить рассмотрение данной проблемы, выразим поперечные характеристические сопротивления сред, входящие в (4.16), через компоненты волновых чисел, учитывая, что  $\cos\theta = k_z/k$  и  $\sin\theta = k_x/k$  (см. рис. 4.3).

Используя соотношения  $k\eta = \omega\varepsilon$  и  $k/\eta = \omega\varepsilon$ , для поперечных волновых сопротивлений при вертикальной и горизонтальной поляризациях поля получим

$$\eta_{TE} = \frac{\eta}{\cos\theta} = \frac{\eta k}{k_z} = \frac{\omega\mu}{k_z}, \quad \eta_{TM} = \eta \cos\theta = \frac{\eta k_z}{k} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}. \quad (4.41)$$

Тогда полагая, что законы Снелла выполняются в обеих средах ( $k_x = k'_x$ , где  $k_x = k \sin\theta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon} \sin\theta$ ), с учетом (4.41) выражения для коэффициентов отражения и прохождения Френеля (4.16) примут вид

$$R_{\perp} = \frac{\eta'_{TE} - \eta_{TE}}{\eta'_{TE} + \eta_{TE}} = \frac{k_z - k'_z}{k_z + k'_z}, \quad R_{\parallel} = \frac{\eta'_{ME} - \eta_{TM}}{\eta'_{ME} + \eta_{TM}} = \frac{k'_z\varepsilon - k_z\varepsilon'}{k'_z\varepsilon + k_z\varepsilon'}, \quad (4.42)$$

$$T_{\perp} = 1 + R_{\perp} = \frac{2k_z}{k_z + k'_z}; \quad T_{\parallel} = 1 + R_{\parallel} = \frac{2k'_z\varepsilon}{k'_z\varepsilon + k_z\varepsilon'}. \quad (4.43)$$

Представим поле слева от границы раздела как суперпозицию падающей и отраженной волн от границы раздела плоских волн, полагая, что амплитуда напряженности поля при горизонтальной поляризации волн  $E_0 = \dot{A}_+ \cos\theta$ ,  $\dot{A}_+ = A_+ \cos(j\omega t)$  и с учетом  $\theta = k_x/k'_z$ ,  $\text{tg}\theta' = k'_x/k'_z = k_x/k'_z$  (рис. 4.3, б):

$$E(r) = \bar{e}_y E_0 \left[ e^{-jk_z z} + R_{\perp} e^{jk_z z} \right] \cdot e^{-jk_x x},$$

$$H(r) = \frac{E_0}{\eta_{TE}} \left[ \left( -\bar{e}_x + \frac{k_x}{k_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{-jk_z z} + R_{\perp} \left( -\bar{e}_x + \frac{k_x}{k_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{jk_z z} \right] \cdot e^{-jk_x x}. \quad (4.44)$$

Тогда поле справа от границы раздела можно рассматривать как поле прошедшей во вторую среду волны

$$\begin{aligned}
E'(r) &= \bar{y} T_{\perp} E_0 e^{-jk'_z z} e^{-jk_x x}, \\
H'(r) &= \frac{T_{\perp} E_0}{\eta'_{TE}} \left( -\bar{e}_x + \frac{k_x}{k'_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{-jk'_z z} e^{-jk_x x}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Аналогично можно представить поля в первой и второй средах при вертикальной поляризации волн, полагая  $E_0 = \dot{B}_+$  и  $\dot{B}_+ = B_+ \cos(j\omega t)$  (рис. 4.3, а):

$$\begin{aligned}
E(r) &= E_0 \left[ \left( \bar{e}_x + \frac{k_x}{k_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{-jk_z z} + R_{\parallel} \left( \bar{e}_x + \frac{k_x}{k_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{-jk_z z} \right] \cdot e^{-jk_z z}, \\
H(r) &= \bar{e}_y \frac{E_0}{\eta_{TM}} \left[ e^{-jk_z z} - R_{\parallel} e^{-jk_z z} \right] \cdot e^{-jk_z z}, \\
E'(r) &= T_{\parallel} E_0 \left( \bar{e}_x - \frac{k_x}{k'_z} \bar{e}_z \right) \cdot e^{-jk_z z} e^{-jk_x x}, \\
E'(r) &= \bar{e}_y \frac{T_{\parallel} E_0}{\eta'_{TM}} e^{-jk'_z z} e^{-jk_x x},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Уравнения (4.44), (4.45) и (4.46), (4.47) имеют двойственный характер и могут быть преобразованы друг в друга на основании перестановочной двойственности уравнений Максвелла  $E \rightarrow H$ ,  $H \rightarrow -E$ ,  $\varepsilon \leftrightarrow \mu$  (см. разд. 2). В среде с потерями преломленная волна будет иметь сложный характер, так как волновое число становится комплексным  $k' = k_x \bar{e}_x + k'_z \bar{e}_z = \beta' - j\alpha' = (\beta'_x - j\alpha'_x) \bar{e}_x + (\beta'_z - j\alpha'_z) \bar{e}_z$ , и для волны должно выполняться граничное условие  $k' \cdot k' = \omega^2 \mu_0 \varepsilon'$ . Таким образом, пространственная зависимость поля прошедшей во вторую среды волны имеет следующий общий вид:

$$e^{-jk'_z z} e^{-jk'_x x} = e^{-j(\beta'_z - j\alpha'_z)z} e^{-j(\beta'_x - j\alpha'_x)x} = e^{-(\alpha'_x x + \alpha'_z z)} e^{-j(\beta'_x x - \beta'_z z)}. \tag{4.48}$$

Для того чтобы преломленная волна затухала по мере распространения во второй среде, необходимо, чтобы коэффициент затухания  $\alpha'_z > 0$  и  $\alpha'_x > 0$ . Для этого случая поверхности равных амплитуд и поверхности равных фаз соответственно определяются условиями (рис. 4.14):

$$\alpha'_z z + \alpha'_x x = \text{const}, \quad \alpha'_z z - \alpha'_x x = \text{const}. \tag{4.49}$$

Как видно из рис. 4.14, поверхности равных амплитуд и фаз не совпадают, и волновые векторы  $\beta'$  и  $\alpha'$  образуют с осью  $Z$  соответственно углы  $\phi$  и  $\psi$ , которые можно определить из соотношений

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\beta'_x}{\beta'_z}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha'_x}{\alpha'_z}. \quad (4.50)$$

Рассмотрим случай полного внутреннего отражения с точки зрения комплексной волны. Предположим, что потери в обеих средах отсутствуют, и  $\varepsilon > \varepsilon'$ . При этом угол падения  $\theta$  имеет действительное значение и, учитывая, что

$$k_x'^2 + k_z'^2 = k'^2, \quad (4.51)$$

где  $k_x' = k_x = k \sin \theta$ ,  $k_z' = k \cos \theta$ ,  $k_z' = \beta'_z - j\alpha'_z$ , то  $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}$ .

С учетом указанных соотношений и полагая, что  $\sin^2 \theta_c = \varepsilon'/\varepsilon$ ,  $k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon$ , после деления на действительную и мнимую части уравнение (4.51) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \beta_z'^2 - \alpha_z'^2 &= \omega^2\mu_0(\varepsilon' - \varepsilon \sin^2 \theta) = k^2(\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta), \\ \alpha_z'\beta_z' &= 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Для полученного уравнения (4.52) существует два решения:

(а)  $\alpha_z' = 0$  и  $\beta_z'^2 = k^2(\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta)$  в случае  $\theta < \theta_c$

и

(б)  $\beta_z' = 0$  и  $\alpha_z'^2 = k^2(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c)$  в случае  $\theta \geq \theta_c$ .

Решение (а) соответствует обычному преломлению в правую среду, а случай (б) – полному внутреннему отражению. Для случая (б), используя (4.48), можем записать  $e^{-jk_z'z}e^{-jk_x'x} = e^{-\alpha_z'z}e^{-\beta_x'x}$ .

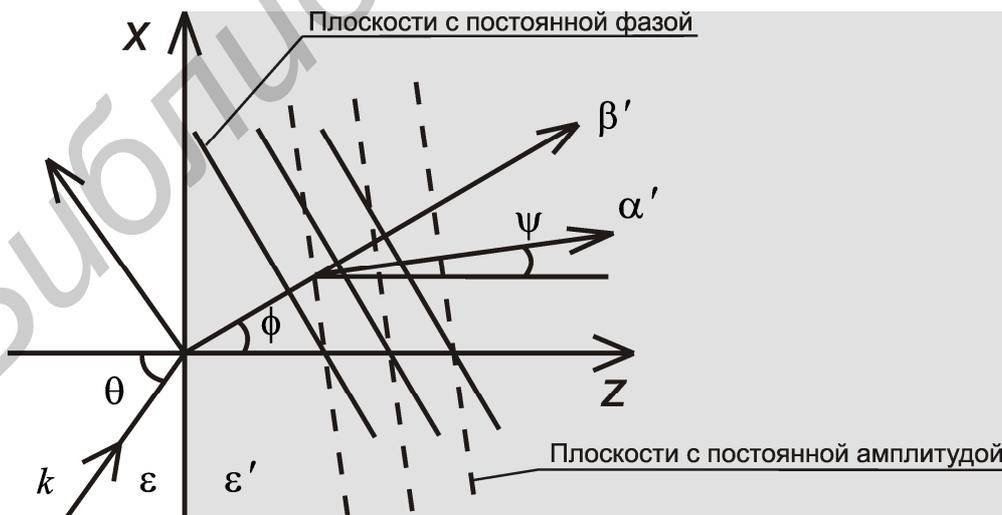


Рис. 4.14. Поверхности равных фаз и амплитуд преломленной волны

При этом с учетом (4.50) видно, что поверхности равных фаз и амплитуд

взаимно перпендикулярны, причем  $\phi = 90^\circ$ , а  $\psi = 0^\circ$  (рис. 4.15).

Если одна из сред обладает диэлектрическими потерями  $\varepsilon' = \varepsilon'_d - j\left(\varepsilon''_d + \frac{\sigma}{\omega}\right) = \varepsilon'_R - j\varepsilon'_I$ , например, среда справа (рис. 4.3, 4.15), тогда волновой вектор также будет комплексным:

$$\dot{k}' = \beta' - j\alpha' = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon'_R - j\varepsilon'_I)}. \quad (4.53)$$

Учитывая, что в левой среде волновой вектор – действительная величина и характеризуется составляющими  $k_x = k \sin \theta$ ,  $k_z = k \cos \theta$ ,  $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}$ , уравнение (4.51) после деления на действительную и мнимую части примет вид

$$\dot{D} = D_R + jD_I, \quad (4.54)$$

где

$$D_R = \beta_z'^2 - \alpha_z'^2 = \beta'^2 - \alpha'^2 - k_x^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon'_R - k_x^2 = \omega^2\mu_0(\varepsilon'_R - \varepsilon \sin^2 \theta),$$

$$D_I = 2\beta_z'\alpha_z' = 2\beta'\alpha' = \omega^2\mu_0\varepsilon'_I.$$

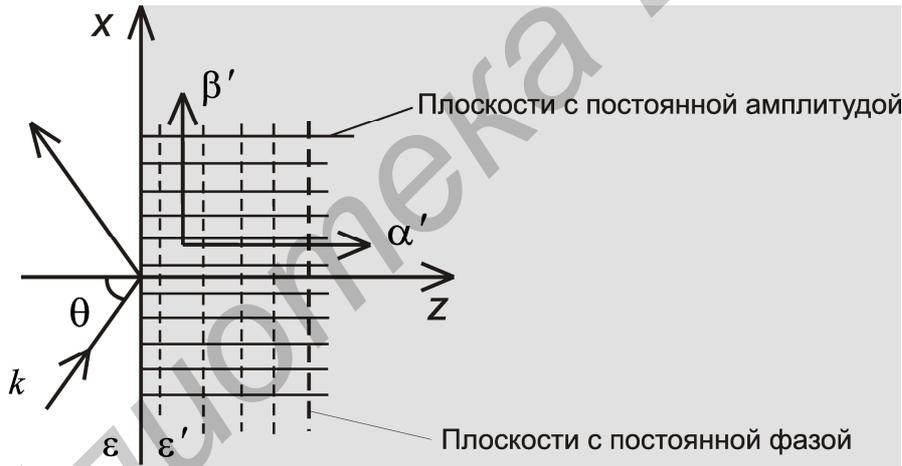


Рис. 4.15. Плоскости с постоянной фазой и постоянной амплитудой для случая полного внутреннего отражения

Производя замену  $k_x^2 = k^2 \sin^2 \theta = \omega^2\mu_0\varepsilon \sin^2 \theta$ , несложно получить решение (4.54) относительно составляющих волнового вектора при неотрицательном значении  $\alpha_z'$ :

$$\beta_z' = \left[ \frac{\sqrt{D_R^2 + D_I^2} + D_R}{2} \right]^{1/2}, \quad \alpha_z' = \left[ \frac{\sqrt{D_R^2 + D_I^2} - D_R}{2} \right]^{1/2}. \quad (4.55)$$

Таким образом, с учетом (4.48) преломленная волна в среде с потерями будет характеризоваться зависимостью  $e^{-jk_z'z} e^{-jk_x'x} = e^{-\alpha_z'z} e^{-j(\beta_z'z + k_x'x)}$ , т. е. экс-

пониженно затухать по мере проникновения в глубь второй среды, а поверхности равных фаз и амплитуд в общем случае не совпадают, как показано на рис. 4.16.

Например, в случае хорошего проводника  $\varepsilon'_1 \gg \varepsilon'_R$ , или  $D_I \gg |D_R|$  и из (4.55) следует, что  $\beta'_z \cong \alpha'_z \cong \sqrt{D_I/2}$ , или  $\beta'_z \cong \alpha'_z \cong \beta' \cong \alpha' \cong \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$  при условии, что  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ .

В этом случае угол преломления  $\phi$  для фазового вектора  $\beta'$  практически равен нулю, не зависит от угла падения  $\theta$  и плоскости постоянной фазы почти параллельны плоскостям постоянной амплитуды. Используя (4.50), в случае хорошего проводника можно найти:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_x}{\beta'_z} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon} \sin \theta}{\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}} = \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon}{\sigma}} \sin \theta. \quad (4.56)$$

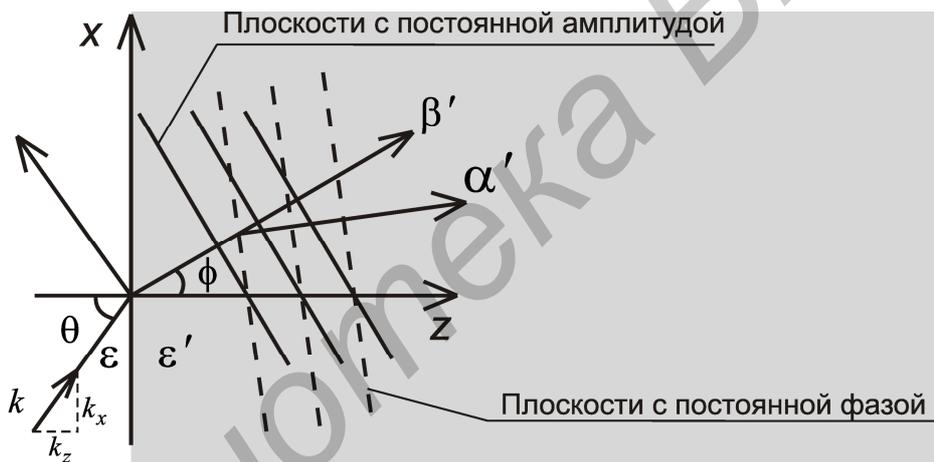


Рис. 4.16. Плоскости с постоянной фазой и постоянной амплитудой для преломленной волны в среде с потерями

Из (4.56) следует, что фазовый фронт преломленной волны слабо зависит от угла падения  $\theta$  и практически параллелен границе раздела сред. Например, для плоского листа меди ( $\sigma = 5,7 \times 10^7$  См/м), расположенного в воздухе ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ) на частоте поля 10 ГГц, имеем  $\operatorname{tg} \phi = \sqrt{2\omega\varepsilon/\sigma} = 1,4 \times 10^{-4}$ .

Если на среду с потерями падает плоская ЭМВ с произвольной линейной поляризацией поля (имеющая компоненты горизонтальной и вертикальной поляризации), то после отражения от границы раздела ЭМВ будет в общем случае иметь эллиптическую поляризацию. Это несложно показать, если ввести понятие коэффициента деполаризации при линейной поляризации отраженной волны поля:

$$\dot{\Phi}_L = |\dot{\Phi}_L| e^{j\phi_L} = \frac{\dot{E}_{y0}}{\dot{E}_{x0}} = \frac{\dot{R}_\perp \vec{E}_0}{\dot{R}_\parallel \vec{E}_0} = \frac{|\dot{R}_\perp| e^{j\phi_\perp}}{|\dot{R}_\parallel| e^{j\phi_\parallel}} = \frac{|\dot{R}_\perp|}{|\dot{R}_\parallel|} e^{j(\phi_\perp - \phi_\parallel)}, \quad (4.57)$$

где  $\dot{E}_{y0}, \dot{E}_{x0}$ , – соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты комплексных амплитуд векторов напряженности электрического поля отраженной волны;  $\vec{E}_0 = \vec{e}_x \dot{E}_0 + \vec{e}_y \dot{E}_0$  – комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей на границу раздела волны в линейном базисе.

Аналогично можно ввести понятие коэффициента деполаризации при круговой поляризации поля отраженной волны:

$$\dot{\Phi}_C = |\dot{\Phi}_C| e^{j\phi_C} = \frac{\dot{E}_{R0}}{\dot{E}_{L0}} = \frac{\dot{R}_R \vec{E}_0}{\dot{R}_L \vec{E}_0} = \frac{|\dot{R}_R| e^{j\phi_R}}{|\dot{R}_L| e^{j\phi_L}} = \frac{|\dot{R}_\perp|}{|\dot{R}_\parallel|} e^{j(\phi_R - \phi_L)}, \quad (4.58)$$

где  $\dot{E}_{R0}, \dot{E}_{L0}$  – соответственно правая и левая компоненты комплексных амплитуд векторов напряженности электрического поля отраженной волны;  $\vec{E}_0 = \vec{e}_R \dot{E}_0 + \vec{e}_L \dot{E}_0$  – комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей на границу раздела волны в круговом поляризационном базисе.

Из (4.56) следует, что в общем случае между компонентами поля отраженной волны как в линейном, так и в круговом базисах, наблюдается неравенство амплитуд и разности фаз, что зависит от угла падения и частоты поля. Поэтому поле отраженной волны в общем случае будет эллиптически поляризованным, а параметры эллипса поляризации поля будут зависеть от угла падения и частоты поля падающей на границу раздела волн.

## 4.6. Отражение в средах с двойным лучепреломлением

### 4.6.1. Характеристики поля при наклонном падении плоской волны на границу раздела сред с двойным лучепреломлением

Задача определения векторов поля для отраженных и преломленных волн при наклонном падении на границу раздела сред, когда обе граничащие среды в общем случае являются бианизотропными и даже немагнитными ( $B = \mu_0 H$ ), требует достаточно громоздких аналитических выкладок и выходит за рамки данного пособия. Поэтому, не останавливаясь на выкладках, приведем только основные результаты для случая биаксиальных анизотропных сред, каждая из которых характеризуется тензором диэлектрической проницаемости типа (1.22) и связью вектора  $\vec{D}$  с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  вида

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{a1}^i & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{a2}^i & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{a3}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_1^{i2} & 0 & 0 \\ 0 & n_2^{i2} & 0 \\ 0 & 0 & n_3^{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

где  $\varepsilon_{a1}^i$ ,  $\varepsilon_{a2}^i$ ,  $\varepsilon_{a3}^i$ , – значения абсолютной диэлектрической проницаемости по трем основным осям и  $n_j^i = \sqrt{\varepsilon_{aj}^i/\varepsilon_0}$ ,  $j=1,2,3$  – соответствующие коэффициенты преломления граничащих сред. При этом индекс  $i$  может иметь два значения, которые использовались в предыдущих разделах. Так для параметров правой среды примем  $i \equiv'$ , для левой граничной среды индекс использовать не будем (см. рис. 4.3). Тогда для двух граничащих сред коэффициенты преломления можно представить в матричной форме:  $\tilde{n} = [n_1, n_2, n_3]$  – для левой и  $\tilde{n}' = [n_1', n_2', n_3']$  – для правой среды. Если среда, например левая, изотропная, то  $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$ , если анизотропная унияксиальная (одноосная) с необычными параметрами вдоль оси  $Z$  –  $n_3 = n_e$ ,  $n_1 = n_2 = n_0$ , а если анизотропная биаксиальная, то все параметры по основным осям различны и  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ . Эти же характеристики могут быть применены и для второй граничной среды, используя указанные выше переобозначения.

В указанной постановке данная задача сводится к решению системы уравнений Максвелла и постановки граничных условий, позволяющих представить волновое число  $k = Nk_0 = n \frac{\omega}{c_0}$  через эффективный коэффициент преломления среды:

$$N = \begin{cases} \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta + n_3^2 \cos^2 \theta}} & (TM \text{ – или вертикальная поляризация}), \\ n_2 & (TE \text{ – или горизонтальная поляризация}). \end{cases} \quad (4.60)$$

Из (4.60) следует, что эффективный коэффициент преломления зависит от поляризации волны и при вертикальной поляризации поля имеет более сложную зависимость от параметров отражающей поверхности, чем при горизонтальной. При этом отражение волны с горизонтальной поляризацией может рассматриваться как процесс отражения от изотропной среды с коэффициентом преломления  $n_2$ . С помощью эффективного коэффициента отражения  $N$  решение задачи может быть представлено в виде коэффициентов отражения Френеля соответственно для вертикально и горизонтально поляризованных волн:

$$R_{\parallel}^D = \frac{n_1 n_3 \sqrt{n_3'^2 - N^2 \sin^2 \theta} - n_1' n_3' \sqrt{n_3'^2 - N^2 \sin^2 \theta}}{n_1 n_3 \sqrt{n_3'^2 - N^2 \sin^2 \theta} + n_1' n_3' \sqrt{n_3'^2 - N^2 \sin^2 \theta}}, \quad (4.61)$$

$$R_{\perp}^D = \frac{n_2 \cos \theta - \sqrt{n_2'^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{n_2 \cos \theta + \sqrt{n_2'^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}.$$

Для удобства анализа в подкоренных выражениях соотношений (4.61) можно использовать эквивалентную замену:

$$N^2 \sin^2 \theta = \frac{n_1^2 n_3^2 \sin^2 \theta}{n_1^2 \sin^2 \theta + n_3^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.62)$$

В декартовой системе координат дисперсионные уравнения для горизонтальной  $\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{k^2}{n_2^2}$  и вертикальной  $\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{k_z^2}{n_1^2} + \frac{k_x^2}{n_3^2}$  поляризации позволяют определить групповую скорость для вертикально поляризованной волны

$$\vec{v} = \partial\omega/\partial k = \vec{e}_x v_x + \vec{e}_z v_z, \quad (4.63)$$

где

$$v_x = \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = \frac{k_x c_0^2}{\omega n_3^2} = c_0 \frac{N}{n_3^2} \sin \theta,$$

$$v_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{k_z c_0^2}{\omega n_1^2} = c_0 \frac{N}{n_1^2} \cos \theta.$$

Строгие решения также показывают, что усредненный по времени вектор Пойтинга для вертикально поляризованной волны:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{E_0^2}{2\eta_0} \frac{n_1 n_3 N}{n_1^2 + n_3^2 - N^2} \left( \vec{e}_x \frac{n_1}{n_3} \sin \theta + \vec{e}_z \frac{n_3}{n_1} \cos \theta \right), \quad (4.64)$$

а также объемные плотности электрической, магнитной и полной энергии имеют вид

$$w_e = \frac{1}{2} \text{Re}(D \times E^*) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left( n_1^2 |E_x|^2 + n_3^2 |E_z|^2 \right) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{n_1^2 n_3^2}{n_1^2 + n_3^2 - N^2},$$

$$w_m = \frac{1}{2} \text{Re}(B \times H^*) = \frac{1}{4} \mu_0 |H_y|^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{n_1^2 n_3^2}{n_1^2 + n_3^2 - N^2} = w_e, \quad (4.65)$$

$$w = w_e + w_m = 2w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{n_1^2 n_3^2}{n_1^2 + n_3^2 - N^2}.$$

С помощью уравнений (4.64) и (4.65) несложно определить вектор энергетической скорости для вертикально поляризованного компонента поля

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{\Pi}}{w} = c_0 \left( \vec{e}_x \frac{N}{n_3} \sin \theta + \vec{e}_z \frac{N}{n_1} \cos \theta \right). \quad (4.66)$$

Сравнивая (4.66) и (4.63), видим, что групповая скорость и скорость переноса энергии для вертикально поляризованной волны совпадают как по направлению, так и по величине, однако волновой вектор  $\vec{k}$ , совпадающий по направлению с вектором фазовой скорости, составляет с границей раздела сред угол  $\text{arctg } \bar{\theta} = \text{arctg}(v_x/v_z) = \text{arctg}(P_x/P_z)$  и не совпадает с рис. 4.17. Очевидно, что  $\bar{\theta} \neq \theta$ , если  $n_1 \neq n_3$ .



Рис. 4.17. Направления векторов поля и групповой скорости

В случае горизонтально поляризованной волны режим распространения соответствует случаю однородной изотропной среды с коэффициентом преломления  $N = n_2$ . На рис. 4.18 представлена ориентационная характеристика векторов поля соответственно для вертикальной и горизонтально поляризованных волн.

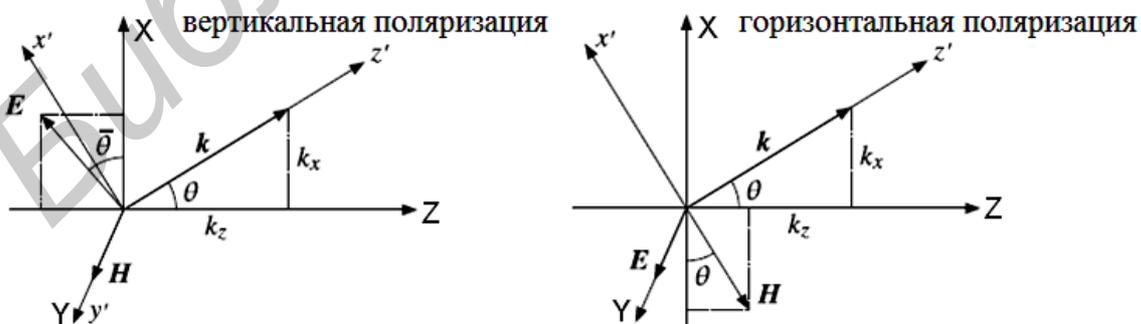


Рис. 4.18. Однородные плоские волны в средах с двойным лучепреломлением

Для дальнейшего анализа предположим, что законы Снелля в средах с двойным лучепреломлением (рис. 4.3) также выполняются и имеют вид

$$\theta_+ = \theta_- \equiv \theta, \quad \theta'_+ = \theta'_- \equiv \theta', \quad N \sin \theta = N' \sin \theta'. \quad (4.67)$$

Соотношение (4.67) показывает, что в средах с двойным лучепреломлением закон синусов по существу похож на закон Снелля для изотопных сред, однако поскольку  $N$  зависит от поляризации, то для одного угла падения будут два различных угла преломления, определить которые можно из уравнений

$$\sin \theta' = \frac{n_1 n_2 n_3' \sin \theta}{\sqrt{\left[ n_1'^2 n_3'^2 (n_1^2 - n_3^2) - n_1^2 n_3^2 (n_1'^2 - n_3'^2) \right] \sin^2 \theta + n_1'^2 n_3'^2 n_3^2}}, \quad (4.68)$$

$$\sin \theta = \frac{n_1' n_2' n_3 \sin \theta'}{\sqrt{\left[ n_1^2 n_3^2 (n_1'^2 - n_3'^2) - n_1'^2 n_3'^2 (n_1^2 - n_3^2) \right] \sin^2 \theta' + n_1^2 n_3^2 n_3'^2}}. \quad (4.69)$$

Из (4.68) и (4.69) видно, что они инвариантны относительно углов  $\theta'$  и  $\theta$ .

#### 4.6.2. Угол Брюстера и критический угол в среде с двойным лучепреломлением

С помощью уравнений (4.68) несложно определить критический угол для преломленной волны. Подставим в уравнение (4.68) значение максимального угла падения  $\theta = 90^\circ$ . Для вертикально поляризованной волны и максимального угла находим

$$\sin \theta'_c = \frac{n_3 n_3'}{\sqrt{n_3^2 n_3'^2 + n_1'^2 (n_3'^2 - n_3^2)}}, \quad (4.70)$$

в котором должно выполняться условие  $n_3 < n_3'$ . Если  $n_3 > n_3'$ , то имеет место критический угол падения  $\theta_c$ , который соответствует углу  $\theta' = 90^\circ$  в уравнении (4.69) для вертикальной поляризации:

$$\sin \theta_c = \frac{n_3 n_3'}{\sqrt{n_3^2 n_3'^2 + n_1^2 (n_3^2 - n_3'^2)}}. \quad (4.71)$$

При горизонтальной поляризации поля максимальный угол преломления определяется, как и в случае изотропной среды  $\sin \theta'_c = n_2/n_2'$  при условии  $n_2 < n_2'$ , т. е. вторая среда (среда справа от границы раздела) должна быть более плотной по сравнению с первой средой (слева от границы). Если выполняется обратное условие, т. е.  $n_2 > n_2'$ , то с помощью (4.69) несложно определить критический угол при горизонтальной поляризации поля  $\theta_c = n_2'/n_2$ .

Напомним, что в изотропных средах без потерь угол Брюстера всегда имеет место, однако в случае немагнитных сред его существование проявляется только при вертикальной поляризации поля. Анализ уравнения (4.61) с учетом (4.62) показывает, что даже в немагнитных средах с двойным лучепреломлением угол Брюстера может наблюдаться для обеих линейных поляризаций поля, может отсутствовать, может быть равным нулю или иметь вид комплексного числа.

При падении линейно поляризованной волны слева от границы раздела угол Брюстера можно определить из следующего уравнения:

$$\theta_B = \operatorname{arctg} \left( \frac{n_3 n'_3}{n_1^2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_1'^2}{n_3^2 - n_3'^2}} \right). \quad (4.72)$$

Если ЭМВ падает на границу раздела справа, угол полной поляризации определяется как

$$\theta'_B = \operatorname{arctg} \left( \frac{n_3 n'_3}{n_1'^2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_1'^2}{n_3^2 - n_3'^2}} \right). \quad (4.73)$$

Уравнения (4.72) и (4.73) имеют действительные решения только в случае, когда подкоренные выражения имеют неотрицательное значение, т. е. если  $n_1 > n'_1$  и  $n_3 > n'_3$  или если  $n_1 < n'_1$  и  $n_3 < n'_3$ . В противном случае угол Брюстера будет мнимым. В случае если  $n_1 = n'_1$ , но  $n_3 \neq n'_3$ , угол Брюстера обращается в ноль. Если  $n_3 = n'_3$ , то угол Брюстера не существует.

Проиллюстрируем сказанное на примерах. Полагая, что среда слева от границы раздела характеризуется матрицей коэффициентов преломления  $\tilde{n}_i$ , а среда справа  $\tilde{n}'_i - i = 1, 2, 3, 4$ , рассмотрим четыре случая, соответствующих различным комбинациям граничных сред:

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1) $\tilde{n}_1 = [1,63, 1,63, 1,5]$ ,  | $\tilde{n}'_1 = [1,63, 1,63, 1,63]$ ; |
| 2) $\tilde{n}_2 = [1,54, 1,54, 1,63]$ , | $\tilde{n}'_2 = [1,5, 1,5, 1,5]$ ;    |
| 3) $\tilde{n}_3 = [1,8, 1,8, 1,5]$ ,    | $\tilde{n}'_3 = [1,5, 1,5, 1,5]$ ;    |
| 4) $\tilde{n}_4 = [1,8, 1,8, 1,5]$ ,    | $\tilde{n}'_4 = [1,56, 1,56, 1,56]$ . |

- 1) – двояко-преломляющий полиэстер и изотропный полиэстер;
- 2) – синдиотактический пенопласт и полиметилметакрилат;
- 3) – двояко-преломляющий полиэстер и полиметилметакрилат;
- 4) – двояко-преломляющий полиэстер и изотропный полиэстер.

На рис. 4.19 представлены расчетные зависимости коэффициентов отражения (четыре случая комбинаций параметров сред) для двух поляризаций поля от угла падения волны.

В первом случае –  $n_1 = n'_1$  и соответственно угол Брюстера  $\theta_B = 0$ .

Во втором случае расчеты по (4.72) дают  $\theta_B = 29,4^\circ$ , и так как  $n_1 > n'_1$  и  $n_3 > n'_3$ , то существуют два критических угла для случая горизонтальной и вертикальной поляризации и критические углы отражения:  $\theta_c^\perp = 76,9^\circ$  и  $\theta_c^\parallel = 68,1^\circ$ .

В третьем случае угол Брюстера не существует, потому что  $n_3 = n'_3$ , и фактически коэффициент отражения при вертикальной поляризации поля не зависит от угла падения. Соответствующие этому случаю критические углы отражения имеют значения  $\theta_c^\perp = 56,4^\circ$  при горизонтальной поляризации поля и  $\theta_c^\perp = 90^\circ$  при вертикальной поляризации волны.

Наконец, в четвертом случае угол Брюстера будет мнимый, потому что  $n_2 > n'_2$  и  $n_3 < n'_3$ . Для горизонтальной поляризации критический угол отражения и при вертикальной – максимальный угол преломления составят  $\theta_c^\parallel = 74,1^\circ$ .

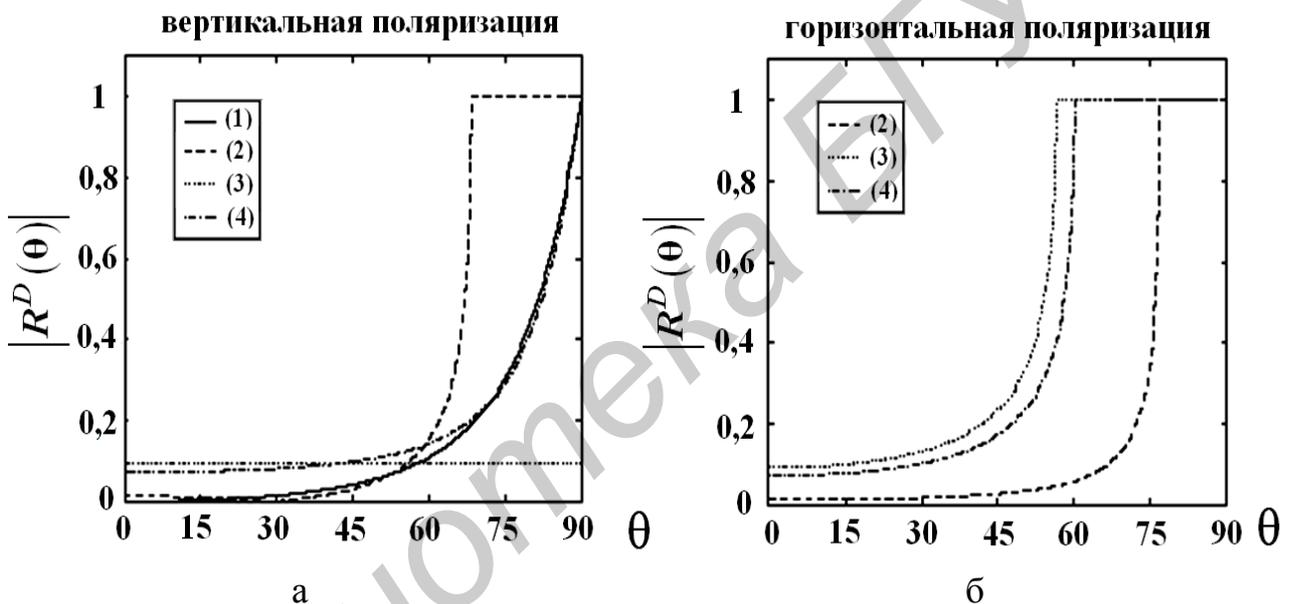


Рис. 4.19. Зависимости модулей коэффициентов отражения Френеля от границы раздела сред с двойным лучепреломлением

В заключение отметим четыре специфических свойства для структур с двойным лучепреломлением, которые отсутствуют у изотропных сред:

- 1) угол Брюстера может быть равен нулю;
- 2) угол Брюстера может не существовать;
- 3) угол Брюстера может быть мнимым (при этом коэффициенты отражения монотонно возрастают по мере увеличения угла падения как в случае вертикальной, так и горизонтальной поляризации поля);
- 4) может наблюдаться полное внутреннее отражение для одного из типов поляризации волн.

## 4.7. Излучение и дифракция электромагнитных волн

### 4.7.1. Зоны электромагнитного поля

#### 4.7.1.1. Дальняя зона излучения (зона Фраунгофера)

Решение волновых уравнений Гельмгольца для гармонического поля (2.61) при заданных значениях плотности тока  $\vec{J}(\vec{r}')$  и распределения объемной плотности заряда  $\rho(\vec{r}')$  в объеме  $V'$  для скалярного и векторного потенциалов имеет вид

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \int_{V'} \mu \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV', \\ \varphi(\vec{r}) &= \int_{V'} \frac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV',\end{aligned}\quad (4.74)$$

где  $dV' = d^3r'$  – элементарный объем источника поля;  $G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}')}}{4\pi(\vec{r} - \vec{r}')} -$  функция Грина;  $(\vec{r} - \vec{r}')$  – расстояние от любой точки источника  $P(x', y', z')$  до точки наблюдения  $P(x, y, z)$ , которое определяется в декартовой системе координат (рис. 4.20):

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (4.75)$$

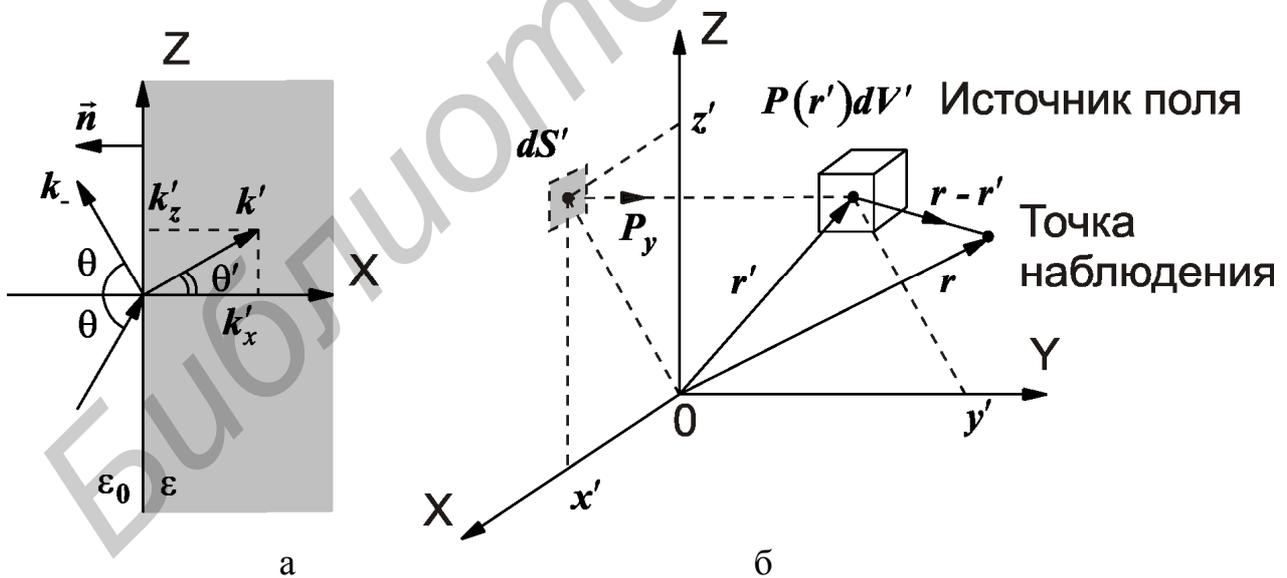


Рис. 4.20. Расположение в пространстве источника поля в объеме  $dV'$

Для электрически короткого вибратора  $l \leq \lambda/10$ , симметрично расположенного относительно начала координат вдоль оси  $z$  (рис. 4.21), полагая его бесконечно тонким  $x' = y' = 0$ , можем записать  $|\vec{r} - \vec{r}'| = R$ , где

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}. \quad (4.76)$$

Соотношение (4.76) можно преобразовать к виду

$$R = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) + (-2zz' + z'^2)} = \sqrt{r^2 + (-2rz' \cos \theta + z'^2)}, \quad (4.77)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $z = r \cos \theta$ .

Раскладывая выражение (4.47) в биномиальный ряд и ограничиваясь тремя первыми членами разложения, для случая  $r \gg z'$  получим

$$R = r - z' \cos \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{z'^2}{2} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{z'^3}{2} \cos \theta \sin^2 \theta \right) + \dots \quad (4.78)$$

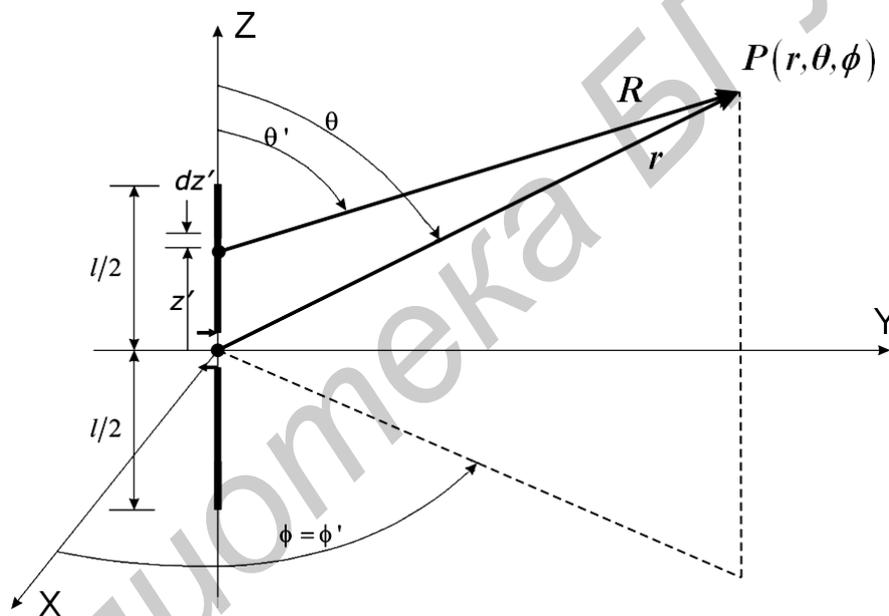


Рис. 4.21. Геометрическая интерпретация поля излучения диполем конечных размеров

Рассмотрим случай, когда в (4.78) можно ограничиться только первыми двумя членами биномиального разложения:

$$R = r - z' \cos \theta, \quad (4.79)$$

что соответствует приближению дальней зоны, или так называемой зоны Фраунгофера. Из отброшенных членов разложения в (4.78) наиболее существенным является третий член, который имеет максимум при  $\theta = \pi/2$ :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{z'^2}{2} \sin^2 \theta \right) = \frac{z'^2}{2r}. \quad (4.80)$$

Когда третье слагаемое (4.78) достигает своего максимального значения, четвертое становится равным нулю, так как  $\theta = \pi/2$ . Можно также показать, что последующие члены разложения в (4.78) становятся несущественными и максимальная фазовая ошибка  $\Delta\varphi = kR$ , где  $R$  определяется соотношением (4.80) при размерах излучателя  $l > \lambda$  и не должна превышать величины  $\Delta\varphi \leq \pi/8$  рад  $\leq 22,5^\circ$ :

$$\frac{k(z')^2}{2r} \leq \frac{\pi}{8}, \quad (4.81)$$

и для случая  $-l/2 \leq z' \leq l/2$  соответствует условию

$$r \geq 2 \left( \frac{l^2}{\lambda} \right). \quad (4.82)$$

Соотношение (4.82) показывает, что фазовая ошибка не превышает своего максимального значения, если расстояние до точки наблюдения составляет не менее чем  $2l^2/\lambda$ , где  $l$  – наибольший размер антенны. Поэтому при определении поля в дальней зоне антенн в амплитудном множителе функции Грина полагают  $R \cong r$ , а в экспоненциальном множителе  $e^{-jkR}$  разность хода аппроксимируют первыми двумя членами разложения (4.79):  $R \cong r - z' \cos \theta$ . Геометрическая интерпретация данной аппроксимации представлена на рис. 4.22, где показано, что при  $R \cong r - z' \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол, измеряющийся от оси  $z$ , векторы  $\vec{R}$  и  $\vec{r}$  почти параллельны.

Таким образом, для произвольной антенны или произвольной излучающей поверхности (апертуры), характеризуемой максимальным размером  $D$ , условие дальней зоны, или зоны Фраунгофера (4.82), можно представить в виде

$$r \geq 2D^2/\lambda. \quad (4.83)$$

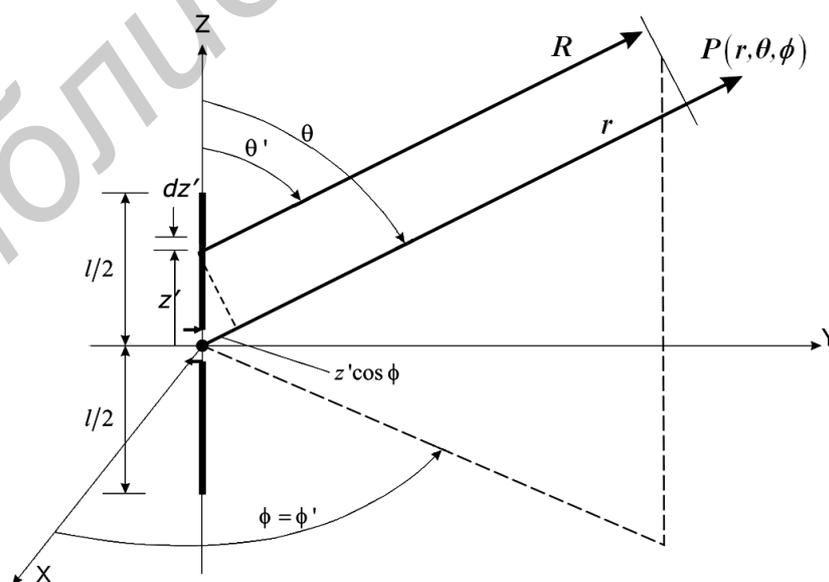


Рис. 4.22. Геометрическая интерпретация излучения диполя в дальней зоне

Следует, однако, отметить, что для большинства практических применений условие (4.83) обеспечивает погрешность вычислений дифракционных полей на уровне – 25дБ и поэтому, если требуется большая точность расчетов, условие (4.83) необходимо усилить, а именно:  $r \geq 4D^2 / \lambda$ .

#### 4.7.1.2. Ближняя зона излучения (зона Френеля)

Если точку наблюдения выбрать на расстоянии меньшем чем  $r = 2l^2 / \lambda$ , максимальное отклонение фазы в приближении (4.81) будет больше  $\Delta\varphi > \pi/8$  рад  $> 22,5^\circ$ . Поэтому в разложении (4.78) необходимо учитывать третье слагаемое:

$$R \cong r - z' \cos \theta + \frac{1}{r} \left( \frac{z'^2}{2} \sin^2 \theta \right). \quad (4.84)$$

При этом существенным членом разложения становится четвертое слагаемое в (4.78). Найдем максимальное отклонение фазы  $\Delta\varphi_1$  при такой аппроксимации из условия экстремума функции от угла наблюдения  $\theta$ :

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{z'^3}{2} \cos \theta \sin^2 \theta \right) \right] = \frac{z'^3}{2r^2} \sin \theta \left[ -\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \right] = 0. \quad (4.85)$$

Тривиальное решение (4.85)  $\theta = 0$  не подходит, поскольку соответствует минимальному отклонению фазы  $\Delta\varphi_1$  в четвертом члене разложения. Нетривиальное решение получается, когда в (4.85) второй сомножитель (стоящий в квадратных скобках) обращается в нуль:

$$\left[ -\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \right]_{\theta=\theta_1} = 0. \quad (4.86)$$

Решение (4.86) позволяет найти искомый угол:

$$\theta_1 = \arctg(\pm\sqrt{2}). \quad (4.87)$$

Используя (4.87) и полагая, что максимальная величина фазовой ошибки в четвертом члене разложения не превышает  $\Delta\varphi \leq \pi/8$  рад  $\leq 22,5^\circ$ , несложно записать условие

$$\left. \frac{kz'_3}{2r^2} \cos \theta \sin^2 \theta \right|_{\substack{z' = l/2 \\ \theta = \arctg \sqrt{2}}} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{l^3}{8r^2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \left( \frac{l^3}{\lambda r^2} \right) \leq \frac{\pi}{8},$$

из которого определим расстояние, соответствующее границе ближней зоны излучения:

$$r^2 \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{l^3}{\lambda} \right) = 0,385 \left( \frac{l^3}{\lambda} \right), \quad r^2 \geq 0,62\sqrt{l^3/\lambda}. \quad (4.88)$$

Таким образом, область пространства, где первые три слагаемые выражения (4.78) являются существенными, характеризуется условием

$$2l^2/\lambda > r > 0,62\sqrt{l^3/\lambda}, \quad (4.89)$$

где  $l$  – длина антенны, называемая областью ближнего излучения, или зоной Френеля, поскольку выражения для ее полей (будет показано дальше) описываются интегралами Френеля. Для произвольной антенны или произвольной излучающей апертуры, характеризуемой максимальным размером  $D$ , условие (4.89) ближней зоны излучения, или зоны Френеля можно представить в виде

$$2D^2/\lambda > r > 0,62\sqrt{D^3/\lambda}. \quad (4.90)$$

Следует отметить, что границы между зонами Фраунгофера и Френеля точно не установлены. Поля при переходе из одной зоны в другую изменяются не резко, а плавно.

#### 4.7.1.3. Реактивная ближняя зона

Если расстояние, на котором расположена точка наблюдения, меньше внутренней границы зоны Френеля, то такая область называется областью реактивного ближнего поля, или ближней реактивной зоной.

Таким образом, зона существования ближнего реактивного поля для линейного излучателя длиной  $l$  характеризуется следующим диапазоном расстояний:

$$0,62\sqrt{l^3/\lambda} > r > 0, \quad (4.91)$$

а для произвольной антенны или произвольной излучающей апертуры, характеризуемой максимальным размером  $D$ , условие (4.91) можно записать в виде

$$0,62\sqrt{D^3/\lambda} > r > 0. \quad (4.92)$$

Графическая интерпретация условного расположения зон электромагнитного поля, окружающих источник излучения, показана на рис. 4.23.

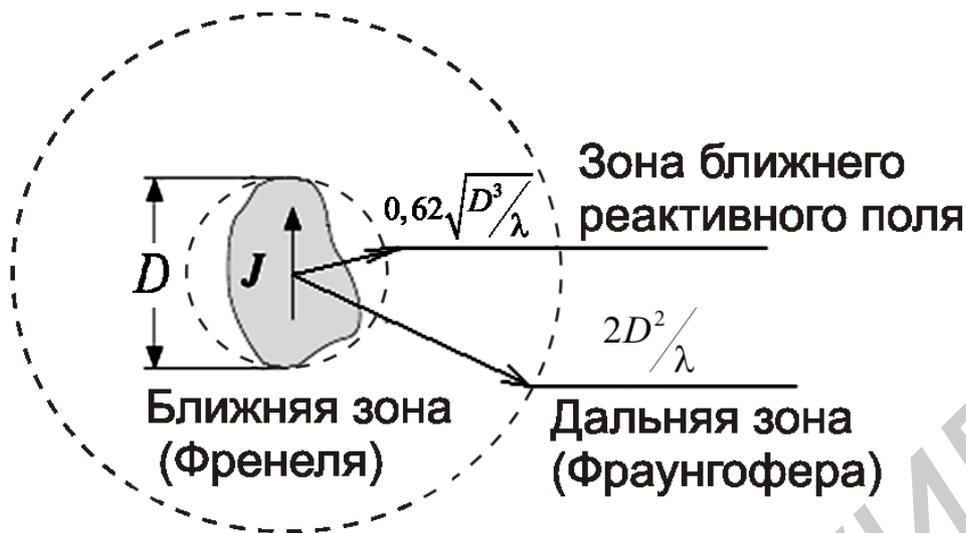


Рис. 4.23. Условное положение зон электромагнитного поля

#### 4.7.2. Поле излучения элементарного электрического вибратора

Рассмотрим поле, созданное линейным проводником с постоянной по длине амплитудой тока  $\vec{I}(z') = \vec{a}_z I_0$  бесконечно малых размеров, который расположен симметрично относительно начала координат вдоль оси  $Z$ , как показано на рис. 4.21. Хотя сам диполь на практике применяется редко, его используют для представления более сложных антенн. Размеры рассматриваемого проводника малы как по длине ( $l \ll \lambda$ ), так и по диаметру ( $a \ll \lambda$ ).

Тогда векторный потенциал (4.74), зависящий только от координаты  $z$ , будет характеризоваться током  $I_e(x', y', z') = a_z I_0$ :

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi c} \int I_e(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl' . \quad (4.93)$$

Полагая, что диполь имеет бесконечно малые размеры ( $x' = y' = z' = 0$ ), ( $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r = \text{const}$ ),  $dl' = dz'$  соотношение (4.93) примет вид

$$A(x, y, z) = a \frac{\mu I_0}{4\pi r} e^{-jkr} \int_{-l/2}^{l/2} dz' = a \frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} . \quad (4.94)$$

Анализ соотношения (4.94) значительно упрощается, если предварительно перейти от прямоугольных координат к сферическим, используя связь в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \quad (4.95)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае компоненты  $A_x = A_y = 0$ , решение уравнения (4.94) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_r &= A_z \cos\theta = \frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \cos\theta, \\ A_\theta &= -A_z \sin\theta = -\frac{\mu I_0 l}{4\pi r} e^{-jkr} \sin\theta, \\ A_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Соотношения (4.96) с учетом (2.25) и (2.27) позволяют определить компоненты напряженности магнитного поля ( $\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$ ):

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\phi = j \frac{k I_0 l \sin\theta}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr} \quad (4.97)$$

и напряженности электрического поля ( $\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}$ ):

$$\begin{aligned} E_r &= \dot{W}_C \frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi r^2} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] e^{-jkr}, \\ E_\theta &= j \dot{W}_C \frac{k I_0 l \sin\theta}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr}, \\ E_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (4.98)$$

где  $\dot{W}_C = \sqrt{\frac{\mu_0 \dot{\mu}}{\epsilon_0 \dot{\epsilon}}}$  – характеристическое сопротивление среды распространения электромагнитного поля (см. разд. 3). Соотношения (4.97) и (4.98) справедливы на любых расстояниях  $r$ , за исключением области самого источника поля.

### 4.7.3. Мощность и сопротивление излучения электрического диполя

Для бесконечно малого диполя с гармоническим изменением тока в нем комплексный вектор Пойтинга может быть определен на основе значений напряженностей поля, которые описываются соотношениями (4.97) и (4.98):

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2}(\vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta) \times (\vec{e}_\phi H_\phi^*) = \frac{1}{2}(\vec{e}_r E_\theta H_\phi^* + \vec{e}_\theta E_r H_\phi^*). \quad (4.99)$$

Из (4.99) видно, что вектор Пойтинга состоит из двух компонент

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2}(\vec{e}_r \Pi_r - \vec{e}_\theta j \Pi_\theta), \quad (4.100)$$

где  $\Pi_r = \frac{\dot{W}_C}{8} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[ 1 - j \frac{1}{(kr)^3} \right]$  – радиальная составляющая и  $\Pi_\theta = \dot{W}_C \frac{k |I_0 l|^2 \cos \theta \sin \theta}{16 \pi^2 r^3} \left[ 1 + \frac{1}{(kr)^2} \right]$  – поперечная составляющая полного вектора Пойтинга.

Комплексную мощность, передаваемую в окружающее диполь пространство, можно вычислить путем интегрирования (4.100) по замкнутой сфере радиусом  $r$ :

$$\dot{P} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\vec{e}_r \Pi_r - \vec{e}_\theta j \Pi_\theta) \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \dot{P}_r - j \dot{P}_\theta. \quad (4.101)$$

Из (4.101) видно, что полная мощность излучения диполя в окружающее его пространство содержит радиальную  $P_r$  и поперечную  $P_\theta$  составляющие мощности.

Для радиальной составляющей мощности можем записать

$$\dot{P}_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Pi_r r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \dot{W}_C \frac{\pi}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \left[ 1 - j \frac{1}{(kr)^3} \right] = P_{rad} - j P_{rim}, \quad (4.102)$$

которая, как видно, является комплексной величиной. Таким образом, полная мощность в пределах сферы радиусом  $r$  содержит только радиальную активную составляющую мощности  $P_{rad}$  и реактивную мощность, которая состоит из радиальной  $P_{rim}$  и поперечной  $P_\theta$  составляющих. Реактивная составляющая мощности является доминирующим компонентом общей мощности излучателя на малых волновых расстояниях  $kr$  и характеризуется радиальной и поперечной

компонентами. При этом радиальная составляющая меняет свое направление (то внутрь окружающей источник сферы, то наружу) с частотой 2 раза за период колебания и образует в пространстве стоячую волну. Колебания плотности реактивной мощности также происходят и в поперечном направлении.

Уравнение (4.102) можно представить в компонентах средних значений энергии электрического  $\tilde{W}_Э$  и магнитного  $\tilde{W}_М$  полей:

$$P_r = \frac{1}{2} \iint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{s} = \dot{W}_C \frac{\pi}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \left[ 1 - j \frac{1}{(kr)^3} \right] = P_{rad} + j2\omega(\tilde{W}_М - \tilde{W}_Э), \quad (4.103)$$

где 
$$P_{rad} = \dot{W}_C \frac{\pi}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2; \quad P_{rim} = 2\omega(\tilde{W}_М - \tilde{W}_Э) = -\dot{W}_C \frac{\pi}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \frac{1}{(kr)^3}. \quad (4.104)$$

Из (4.104) видно, что радиальная электрическая энергия должна быть больше магнитной. Для больших значений  $kr$  ( $kr \gg 1$  или  $r \gg \lambda$ ) реактивная мощность уменьшается по мере того, как  $kr \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в дальнюю зону антенна излучает только активную мощность, которая может быть выражена через сопротивление излучения  $R_{rad}$ :

$$P_{rad} = \dot{W}_C \frac{\pi^2}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 = \frac{1}{2} |I_0|^2 R_{rad}. \quad (4.105)$$

Для свободного пространства  $\dot{W}_C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = W_0 = 120\pi$  (Ом). Тогда из формулы (4.105) находим

$$R_{rad} = W_0 \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \text{ (Ом)}. \quad (4.106)$$

Для того чтобы проволочную антенну можно было рассматривать как бесконечно малый диполь, её общая длина не должна превышать  $l \leq \lambda/50$ . Если принять  $l = \lambda/50$ , то с учетом (4.106) сопротивление излучения составит

$$R(\lambda/50)_{rad} = 80\pi^2 \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left( \frac{1}{50} \right)^2 = 0,316 \text{ (Ом)}.$$

Поскольку сопротивление излучения бесконечно малого диполя приблизительно 0,3 Ом, то использование (4.106) для вычисления сопротивлений расчета реальных антенн приведет к большому несоответствию. Сопротивление электрически короткого диполя ( $l = \lambda$ ) носит реактивный емкостный характер  $Z_{im} = -jZ_C \text{ctg}(\beta l/2)$ , где  $Z_C$  – волновое сопротивление линии, из которой изготовлена антенна.

#### 4.7.4. Поле диполя в ближней зоне

Исследование выражений (4.97) и (4.98) показывает, что при  $kr \ll \lambda$  или  $r \ll \lambda/2\pi$  их можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} E_r &\approx -j\dot{W}_C \frac{I_0 l e^{-jkr}}{2\pi k r^3} \cos \theta, & E_\theta &\approx -j\dot{W}_C \frac{I_0 l e^{-jkr}}{4\pi k r^3} \sin \theta, \\ E_\phi = H_r = H_\theta &= 0, & H_\phi &\approx \frac{I_0 l e^{-jkr}}{4\pi k r^2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Из (4.107) видно, что компоненты  $E_r$  и  $E_\theta$  – синфазные, но сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  относительно компоненты  $H_\phi$ . Поэтому средний за период поток мощности равен нулю и имеет только реактивную составляющую

$$\Pi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ -\bar{e}_r j \frac{\dot{W}_C}{k} \left| \frac{I_0 l}{4\pi} \right|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^5} + \bar{e}_\theta j \frac{\dot{W}_C}{k} \left| \frac{I_0 l}{8\pi^2} \right|^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^5} \right]. \quad (4.108)$$

Условие  $kr \ll 1$  может быть достигнуто и на средних расстояниях вдали от антенны в случае, если частота возбуждающего тока невелика. Поэтому такие поля часто называют квазистационарными полями.

#### 4.7.5. Поле в промежуточной зоне диполя

С ростом произведения  $kr$  слагаемые, которые были доминирующими при  $kr \ll 1$ , становятся меньше и в конечном счете исчезают. При промежуточных значениях  $kr$  компоненты электрического поля теряют синфазное состояние и сдвигаются по фазе на  $90^\circ$ . Поскольку их модули не равны, то они образуют вращающийся вектор, конец которого описывает эллипс. Вращение вектора  $E$  происходит в плоскости распространения волны, и поэтому такое поле часто называется продольно-поляризованным. При таких промежуточных значениях  $kr$  компоненты  $E_\theta$  и  $H_\phi$  совпадают по фазе, что обуславливает появление среднего по времени потока мощности в радиальном направлении, т. е. наблюдается явление излучения энергии.

Если  $kr > 1$ , то выражения компонент поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_r &\approx \dot{W}_C \frac{I_0 l e^{-jkr}}{2\pi r^2} \cos \theta, & E_\theta &\approx j\dot{W}_C \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta, \\ E_\phi = H_r = H_\theta &= 0, & H_\phi &\approx j \frac{k I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.109)$$

В соответствии с (4.109) полное электрическое поле характеризуется на-

личием двух компонент  $\vec{E} = \vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta$ , модуль которых определяется следующим соотношением:  $|\vec{E}| = \sqrt{|E_r|^2 + |E_\theta|^2}$ .

#### 4.7.6. Дальняя зона электрического диполя

Так как выражения (4.109) справедливы при  $kr > 1$ , то они, естественно, справедливы для больших значений  $kr \gg 1$ . По мере увеличения  $kr$  составляющая поля  $E_r$  уменьшатся быстрее, чем  $E_\theta$ , поскольку  $E_r$  обратно пропорциональна  $r^2$ , а  $E_\theta$  обратно пропорциональна  $r$ . Поэтому в дальней зоне, где  $kr \gg 1$ , выражения (4.109) примут вид

$$E_\theta \approx j\dot{W}_c \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta, \quad E_r \approx E_\phi = H_r = H_\theta = 0, \quad H_\phi \approx j \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta. \quad (4.110)$$

Из выражений (4.110) видно, что поле в дальней зоне характеризуется наличием только двух поперечных составляющих  $E_\theta$  и  $H_\phi$ , а отношение между ними есть не что иное, как характеристическое сопротивление среды, в которую помещен излучатель:

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} \approx \dot{W}_c. \quad (4.111)$$

Используя выражения (4.110), несложно определить средний поток излучаемой мощности в дальнюю зону свободного пространства:

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ (\vec{E} \times \vec{H}^*) \right] = \vec{e}_r \frac{1}{2W_0} |E_\theta|^2 = \vec{e}_r \frac{W_0}{2} \left| \frac{kI_0 l}{4\pi} \right| \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (4.112)$$

Максимальный поток мощности согласно (4.112) наблюдается при  $\theta = \pi/2$ , т. е. перпендикулярно оси диполя, и составляет

$$\vec{\Pi}_{\text{cp max}} = \vec{e}_r \frac{W_0}{2r^2} \left| \frac{kI_0 l}{4\pi} \right|^2. \quad (4.113)$$

Нормируя (4.112) по (4.113), находим функцию направленности электрического короткого вибратора:

$$F_P(\theta, \varphi) = \frac{\vec{\Pi}_{\text{cp}}}{\vec{\Pi}_{\text{cp max}}} = \sin^2 \theta = F_E^2(\theta, \varphi) \quad \text{или} \quad F_E(\theta, \varphi) = \sin \theta. \quad (4.114)$$

Трехмерная структура функции направленности диполя представлена на рис. 4.24.

Используя (4.104) и (4.113), получим выражение для коэффициента направленного действия электрического короткого вибратора:

$$D_0 = \frac{\bar{P}_{\text{ср max}}}{P_{\text{rad}}/4\pi r^2} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad (4.115)$$

При этом несложно определить максимальный эффективный раскрыв диполя:

$$A_{\text{eff}} = \left( \frac{\lambda^2}{4\pi} \right) D_0 = \frac{3\lambda^2}{8\pi}. \quad (4.116)$$

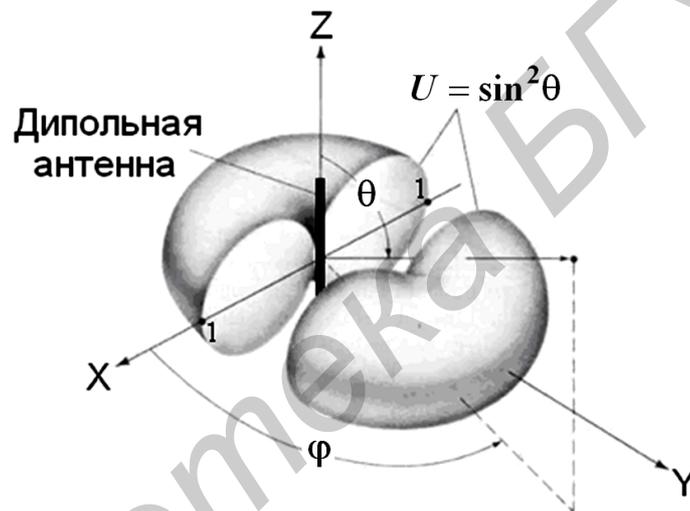


Рис. 4.24. Трехмерная структура излучения бесконечно малого диполя

Все рассмотренные выше рассуждения можно распространить на случай магнитного диполя, воспользовавшись методом перестановочной двойственности:  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ,  $W_0 \rightarrow 1/W_0$ ,  $\rho \rightarrow \rho^m$ . Практически магнитный диполь выполняется в виде узкой щели в сплошном металлическом листе, ширина и длина которой  $d \ll \lambda$ ,  $l \ll \lambda$ .

## 4.8. Излучение апертур

### 4.8.1. Принцип эквивалентности поля

Принцип эквивалентности поля состоит в том, что реальный источник, такой как антенна или другой излучатель, заменяется эквивалентным источником. Фиктивный источник должен быть эквивалентным реальному в том смысле, что он должен формировать в одной и той же области пространства эквивалентное электромагнитное поле. Формулировка задач рассеяния и дифракции на основе принципа эквивалентности является наиболее удобной полевой аппроксимацией.

Принцип эквивалентности поля был введен в 1936 г. С. А. Щелкуновым и является более строгой формулировкой принципа Гюйгенса – Френеля, который гласит: «Каждая точка на поверхности первичного волнового фронта может рассматриваться как новый источник вторичной сферической волны. Вторичный волновой фронт может быть реконструирован как суперпозиция (огибающая) этих сферических волн. Принцип эквивалентности (взаимности) основывается на теореме единственности, которая устанавливает, что поле в среде с потерями определяется только источниками в пределах этой области плюс тангенциальные компоненты электрического или магнитного поля на всей границе замкнутой поверхности вне области источников поля.

Согласно принципу эквивалентности поля вне виртуальной замкнутой поверхности находятся с помощью размещения на ней эквивалентных поверхностных плотностей электрических  $\vec{J}_s$  и магнитных  $\vec{J}_s^m$  токов, удовлетворяющих граничным условиям. Плотности поверхностных токов выбираются таким образом, чтобы поля внутри замкнутой поверхности были равны нулю. Эта формулировка является строгой, однако требует интегрирования по всей замкнутой поверхности, ее точность определяется полнотой знания тангенциальных составляющих поля на замкнутой поверхности. В большинстве практических случаев форма замкнутой поверхности выбирается таким образом, чтобы большая ее часть совпадала с проводящими элементами физической структуры. Это является основным условием при выборе формы граничной поверхности, поскольку отсутствие токов на проводящих структурах уменьшает область интегрирования.

Таким образом, на воображаемой поверхности  $S$  источники поля должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}\vec{J}_s &= \vec{n} \times [\vec{H}_1 - \vec{H}], \\ \vec{J}_s^m &= -\vec{n} \times [\vec{E}_1 - \vec{E}],\end{aligned}\tag{4.117}$$

где  $\vec{n}$  – орт-вектор нормали к граничной поверхности.

Если точка наблюдения находится за пределами внешней границы замкнутой поверхности, то компоненты поля внутри ее можно положить равными нулю и поэтому записать (4.117) в виде

$$\begin{aligned}\vec{J}_s &= \left[ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}) \right] \Big|_{\vec{H}=0} = \left[ \vec{n} \times \vec{H}_1 \right], \\ \vec{J}_s^m &= \left[ -\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}) \right] \Big|_{\vec{E}=0} = \left[ -\vec{n} \times \vec{E}_1 \right].\end{aligned}\tag{4.118}$$

Пусть  $\vec{E}_a$ ,  $\vec{H}_a$  – тангенциальные составляющие поля на апертуре  $A$  (рис. 4.25). Предполагается, что эти поля известны и генерируются источниками слева от экрана. Задача состоит в определении поля излучений  $E(r)$ ,  $H(r)$

в точке наблюдения.

Поля излучений могут быть вычислены в соответствии с принципом эквивалентности полей (4.118), полагая  $\vec{H}_1 = \vec{H}_a$  и  $\vec{E}_1 = \vec{E}_a$ , т. е. апертурные поля могут быть заменены эквивалентными электрическим и магнитным поверхностными токами:

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= [\vec{n} \times \vec{H}_a] \text{ (электрический поверхностный ток),} \\ \vec{J}_s^m &= [-\vec{n} \times \vec{E}_a] \text{ (магнитный поверхностный ток),} \end{aligned} \quad (4.119)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности, на которой расположены эквивалентные плотности поверхностных токов.

Таким образом, необходимо решить уравнения Максвелла в присутствии магнитных токов и получить поля излучений от этих токов.

Полагая для простоты, что волновые размеры апертуры достаточно велики (размеры много превышают длину волны) и для решения задачи в первом приближении достаточно только значений  $\vec{E}_a$  и  $\vec{H}_a$  на апертуре.

Вне апертуры поля отсутствуют, т. е. равны нулю. Такая модель вполне адекватна по крайней мере для оценки поля излучения в пределах главного лепестка диаграммы излучения поля в дальней зоне.

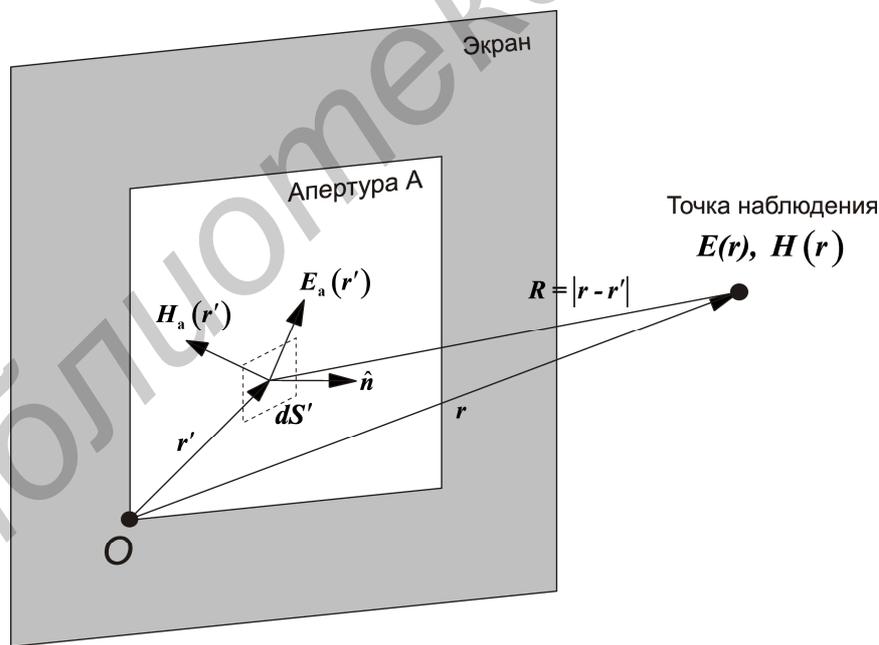


Рис. 4.25. Модель излучающей апертуры

Существуют две альтернативные формы принципа эквивалентности полей, которые могут быть использованы, если известно только одно из полей на апертуре  $\vec{E}_a$  или  $\vec{H}_a$ :

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= 0, \\ \vec{J}_s^m &= \left[ -2(\vec{n} \times \vec{E}_a) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Идеальная электрическая стенка}) \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \left[ 2(\vec{n} \times \vec{H}_a) \right], \\ \vec{J}_s^m &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Идеальная магнитная стенка}) \quad (4.121)$$

Уравнения (4.120) используются, если апертура представляет собой идеальный электрический проводник (ИЭП), на котором  $\vec{E}_a = 0$ , а (4.121) – если апертура выполнена из идеального магнитного проводника (ИМП), на котором  $\vec{H}_a = 0$ .

Таким образом, в соответствии с теоремой подобия идеальный электрический (магнитный) проводящий экран или стенку можно заменить ее образом – соответствующим распределением поверхностных магнитных (электрических) токов на апертуре.

#### 4.8.2. Поля излучения электрического и магнитного токов

В соответствии с принципом перестановочной двойственности, или дуализма, решение волновых уравнений Гельмгольца относительно электродинамических потенциалов может быть представлено посредством функции Грина

$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_V \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV', & \varphi^m(r) &= \int_V \frac{1}{\epsilon} \rho^m(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV', \\ \vec{A}(r) &= \int_V \mu \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV', & \vec{A}^m(r) &= \int_V \mu \vec{J}^m(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') dV'. \end{aligned} \quad (4.122)$$

В дальней зоне для функции Грина можно использовать приближение

$$\frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jkr'}, \quad (4.123)$$

и с учетом (4.123) векторные потенциалы в (4.122) примут упрощенный вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi\rho} \vec{F}(\theta, \phi), \quad \vec{A}^m(\vec{r}) = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi\rho^m} \vec{F}^m(\theta, \phi). \quad (4.124)$$

где векторы излучения  $\vec{F}(\theta, \phi)$  и  $\vec{F}^m(\theta, \phi)$  являются Фурье-преобразованиями от плотностей тока:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\theta, \phi) &= \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dV', \\ \vec{F}^m(\theta, \phi) &= \int_V \vec{J}^m(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dV'. \end{aligned} \quad \text{(Векторы излучения)} \quad (4.125)$$

### 4.8.3. Функция направленности апертуры

В соответствии с принципом эквивалентности поля на произвольной апертуре могут быть представлены эквивалентными поверхностными токами (4.119), вследствие чего объемное интегрирование в (4.125) заменяется на поверхностное интегрирование в пределах апертуры А:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\theta, \phi) &= \int_A \vec{J}_s(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dS' = \int_A [\vec{n} \times \vec{H}_a(\vec{r}')] e^{j\vec{k}\vec{r}'} dS', \\ \vec{F}^m(\theta, \phi) &= \int_A \vec{J}_s^m(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dS' = - \int_A [\vec{n} \times \vec{E}_a(\vec{r}')] e^{j\vec{k}\vec{r}'} dS'. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Поверхности апертуры А и экрана могут быть в общем случае криволинейными. Однако в простейшем случае они являются плоскими (рис. 4.26). Тогда (4.126) становятся обычными двумерными интегральными преобразованиями Фурье.

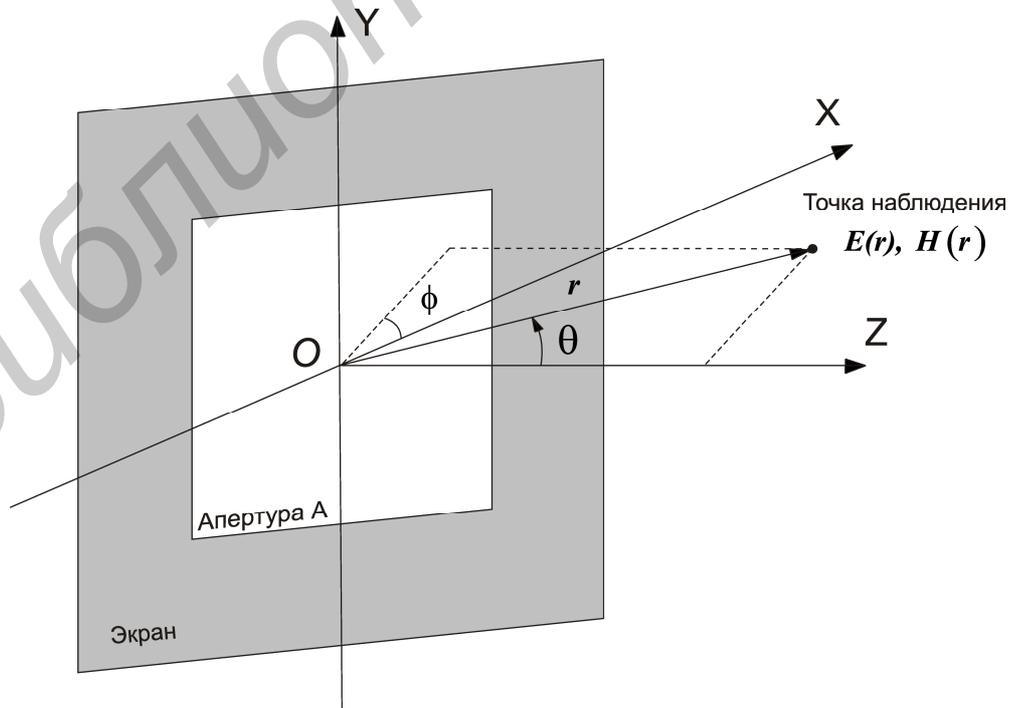


Рис. 4.26. Плоский экран и апертура

Совмещая плоскость апертуры с плоскостью  $X'Y'$  и учитывая, что  $dS' = dx'dy'$  и вектор нормали к апертуре  $\vec{n} = \vec{e}_z$  не зависит от координат интегрирования, уравнения (4.126) можем записать в виде

$$\begin{aligned}\vec{F}(\theta, \phi) &= \int_A \vec{J}_s(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' = \left[ \vec{e}_z \times \int_A \vec{H}_a(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' \right], \\ \vec{F}^m(\theta, \phi) &= \int_A \vec{J}_s^m(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' = \left[ -\vec{e}_z \times \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' \right],\end{aligned}\quad (4.127)$$

где  $e^{j\vec{k}\vec{r}'} = e^{jk_x \cdot x' + jk_y \cdot y'}$  и  $k_x = k \cos\theta \sin\phi$ ,  $k_y = k \sin\theta \cos\phi$ .

Векторы излучения можно представить в цилиндрической системе:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\theta, \phi) &= [\vec{e}_z \times \vec{g}(\theta, \phi)], \\ \vec{F}^m(\theta, \phi) &= [-\vec{e}_z \times \vec{f}(\theta, \phi)],\end{aligned}\quad (4.128)$$

где функции излучения  $\vec{f}(\theta, \phi)$  и  $\vec{g}(\theta, \phi)$  зависят только от тангенциальных составляющих поля  $\vec{E}_a$ ,  $\vec{H}_a$  на апертуре:

$$\begin{aligned}\vec{f}(\theta, \phi) &= \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' = \int_A \vec{E}_a(x', y') e^{jk_x \cdot x' + jk_y \cdot y'} dx'dy', \\ \vec{g}(\theta, \phi) &= \int_A \vec{H}_a(\vec{r}') e^{j\vec{k}\vec{r}'} dx'dy' = \int_A \vec{H}_a(x', y') e^{jk_x \cdot x' + jk_y \cdot y'} dx'dy',\end{aligned}$$

и в декартовой

$$\begin{aligned}\vec{F} &= [\vec{e}_z \times \vec{g}] = [\vec{e}_z \times (\vec{e}_x g_x + \vec{e}_y g_y)] = \vec{e}_y g_x - \vec{e}_x g_y, \\ \vec{F}^m &= [-\vec{e}_z \times \vec{f}] = [-\vec{e}_z \times (\vec{e}_x f_x + \vec{e}_y f_y)] = \vec{e}_x f_y - \vec{e}_y f_x.\end{aligned}\quad (4.129)$$

Компоненты векторов излучения могут быть выражены в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}F_\theta &= -\cos\theta (g_y \cos\phi - g_x \sin\phi), \\ F_\phi &= g_x \cos\phi + g_y \sin\phi, \\ F_{m\theta} &= \cos\theta (f_y \cos\phi - f_x \sin\phi), \\ F_{m\phi} &= -(f_x \cos\phi + f_y \sin\phi).\end{aligned}\quad (4.130)$$

С учетом (4.130) поперечные составляющие напряженностей поля в дальней зоне, или зоне излучения, можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ (f_x \cos \phi + f_y \sin \phi) + \eta \cos \theta (g_y \cos \phi - g_x \sin \phi) \right], \\ E_{\phi} &= jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \cos \theta (f_y \cos \phi - f_x \sin \phi) - \mu (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \right]. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Используя альтернативную форму принципа эквивалентности полей (4.120) и (4.121), уравнения (4.131) для ИЭП примут вид

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ f_x \cos \phi + f_y \sin \phi \right], \\ E_{\phi} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \cos \theta (f_y \cos \phi - f_x \sin \phi) \right], \end{aligned} \quad (4.132)$$

а в случае ИМП

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ W_0 \cos \theta (g_y \cos \phi - g_x \sin \phi) \right], \\ E_{\phi} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ -W_0 (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \right], \end{aligned} \quad (4.133)$$

где учитывается, что поперечные составляющие напряженности магнитного поля связаны с соответствующими компонентами напряженностей электрического поля через волновое сопротивление  $W_0 = 120\pi$  (Ом):

$$H_{\theta} = -\frac{1}{W_0} E_{\phi}, \quad H_{\phi} = \frac{1}{W_0} E_{\theta}. \quad (4.134)$$

Основываясь на принципе двойственности ( $\vec{E}_a \rightarrow \vec{H}_a$  или  $\vec{f} \rightarrow \vec{g}$ ) и используя (4.134), уравнения (4.132) или (4.133) могут быть представлены в компонентах вектора напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_{\theta} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ g_x \cos \phi + g_y \sin \phi \right], \\ H_{\phi} &= 2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \cos \theta (g_y \cos \phi - g_x \sin \phi) \right]. \end{aligned} \quad (4.135)$$

По мере приближения угла  $\theta \rightarrow 90^\circ$  компоненты  $E_{\phi}$ ,  $H_{\phi}$  становятся касательными к плоскости экрана и, поскольку в (4.132) и (4.133) присутствует со-

множитель  $\cos\theta$ , тангенциальные составляющие  $E_\phi$  (случай ИЭП) или  $H_\phi$  (случай ИМП) будут обращаться в ноль, что полностью соответствует граничным условиям (4.120) или (4.121).

#### 4.8.4. Источник Гюйгенса

Апертурные поля  $\vec{E}_a$ ,  $\vec{H}_a$  могут рассматриваться как поля, производимые источником Гюйгенса, если во всех точках апертуры они соответствуют однородной плоской волне:

$$\vec{H}_a = \frac{1}{W_0} [\vec{n} \times \vec{E}_a] \quad (\text{Источник Гюйгенса}), \quad (4.136)$$

где  $W_0$  – характеристическое сопротивление вакуума.

Если однородная плоская волна падает на апертурную плоскость слева (рис. 4.27), то поля в апертуре равны падающим полям  $\vec{E}_a = \vec{E}_{inc}$ ,  $\vec{H}_a = \vec{H}_{inc}$ . Тогда возбуждающие апертуру поля в соответствии с (4.136) удовлетворяют граничному условию на апертуре  $\vec{H}_{inc} = \frac{1}{W_0} [\vec{e}_z \times \vec{E}_{inc}]$ .

Это условие справедливо, если фронт падающей волны параллелен плоскости апертуры. В противном случае необходимо использовать вместо характеристического сопротивления  $W_0$  его эквивалент  $\eta_T$  – поперечное сопротивление, которое определяется через поперечные составляющие векторов поля на апертуре. В п. 4.2.3.2 было показано, что поперечное сопротивление зависит не только от угла падения волны на апертуру, но и от поляризации поля.

Учитывая, что для источника Гюйгенса справедливо преобразование Фурье, и полагая  $\vec{n} = \vec{e}_z$ , для функции направленности можем записать

$$\vec{g} = \frac{1}{W_0} [\vec{n} \times \vec{f}] \Rightarrow g_x = -\frac{1}{W_0} f_y, \quad g_y = \frac{1}{W_0} f_x. \quad (4.137)$$

С учетом (4.137) уравнения (4.132) и (4.133) для ИЭП- и ИМП-вариантов можно представить в общем виде:

$$\begin{aligned} E_\theta &= jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} c_\theta [f_x \cos\phi + f_y \sin\phi], \\ E_\phi &= jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} c_\phi [f_y \cos\phi - f_x \sin\phi], \end{aligned} \quad (\text{Поле источника Гюйгенса}) \quad (4.138)$$

где коэффициенты наклона  $c_\theta$  и  $c_\phi$  можно представить соответственно для источника Гюйгенса, электрического вибратора и элементарного магнитного тока

в матричной форме

$$\begin{bmatrix} c_\theta \\ c_\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos \theta \\ 1 + \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Коэффициенты наклона}). \quad (4.139)$$

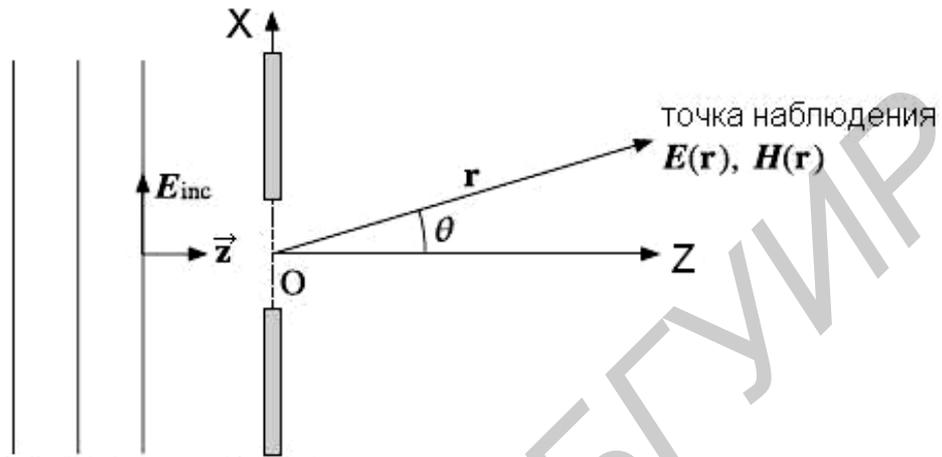


Рис. 4.27. Падение плоской волны на апертурную плоскость

Следует отметить, что коэффициенты наклона при  $\theta = 0^\circ$  равны во всех трех случаях (для электрического, магнитного токов и источника Гюйгенса) и мало отличаются при небольшом отклонении углов  $\theta$  от нуля.

Для модифицированного источника Гюйгенса функция направленности может быть получена из (4.137) путем замены  $W_0$  на его эквивалент  $\eta_T$ :

$$\vec{H}_a = \frac{1}{\eta_T} [\vec{e}_z \times \vec{E}_a] \Rightarrow \vec{g} = \frac{1}{\eta_T} [\vec{e}_z \times \vec{f}]. \quad (4.140)$$

Используя (4.131), несложно получить модифицированные коэффициенты наклона

$$c_\theta = \frac{1}{2} [1 + K \cos \theta], \quad c_\phi = \frac{1}{2} [K + \cos \theta], \quad K = \frac{W_0}{\eta_T}. \quad (4.141)$$

#### 4.8.5. Функция направленности и эффективная поверхность апертуры

В дальней зоне пространственные характеристики поля излучения произвольной апертуры, как следует из (4.131), (4.132), полностью определяются функцией направленности и зависят в общем случае как от формы апертуры, так и от амплитудно-фазового распределения поля на ней. Направленные свойства излучаемых в дальнюю зону полей  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  можно характеризовать норми-

рованной функцией направленности, которую можно рассматривать, как отношение плотности потока мощности, созданного апертурой в заданном направлении  $\Pi_r(\theta, \phi)$ , к максимальному ее значению  $\Pi_{r\max}$ :

$$F_p(\theta, \phi) = \frac{\Pi_r(\theta, \phi)}{\Pi_{r\max}} = \frac{\left[ |E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 \right]}{\left[ |E_{\theta\max}|^2 + |E_{\phi\max}|^2 \right]} = \frac{|E(\theta, \phi)|^2}{|E_{\max}(\theta, \phi)|^2} = F_E^2(\theta, \phi). \quad (4.142)$$

При анализе поля в правом полупространстве  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 4.27). Тогда с учетом (4.138) и (4.139) нормированную функцию направленности апертуры, полагая, что  $\theta = 0^\circ$  соответствует направлению  $\Pi_{r\max}$ , можно представить в виде

$$F_p(\theta, \phi) = \frac{c_\theta^2 |f_x \cos \phi + f_y \sin \phi|^2 + c_\phi^2 |f_y \cos \phi - f_x \sin \phi|^2}{|f|_{\max}^2}, \quad (4.143)$$

где  $|f|_{\max}^2 = \left[ |f_x|^2 + |f_y|^2 \right]_{\theta=0}$ .

Если принять, что коэффициенты наклона, определяемые выражениями (4.139) и (4.141),  $c_\theta = c_\phi = (1 + \cos \theta)/2$ , то уравнение (4.143) упростится:

$$F_p(\theta, \phi) = c_\theta^2 \frac{|f_x|^2 + |f_y|^2}{|f|_{\max}^2} = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{|f|_{\max}^2}. \quad (4.144)$$

Для характеристики направленных свойств апертуры в зоне Фраунгофера можно использовать, как следует из (4.142), нормированную функцию направленности по напряженности поля:

$$F_E(\theta, \phi) = \sqrt{F_p(\theta, \phi)} = \frac{|E(\theta, \phi)|}{|E|_{\max}} = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \frac{|f(\theta, \phi)|}{|f|_{\max}}. \quad (4.145)$$

Эффективность излучения апертур в зоне Фраунгофера принято характеризовать коэффициентом направленного действия  $D$ , под которым следует понимать отношение плотности потока мощности или квадрата напряженности поля, созданного апертурой в заданном направлении (обычно направлении максимального излучения), к плотности потока мощности, или квадрату напряженности поля, усредненного по всем направлениям:

$$D = \frac{\Pi_{r \max}}{\Pi_{r \text{cp}}} = \frac{\left[ |E_{\theta \max}|^2 + |E_{\phi \max}|^2 \right]}{\left[ |E_{\theta \text{cp}}|^2 + |E_{\phi \text{cp}}|^2 \right]} = \frac{|E_{\max}(\theta, \phi)|^2}{|E_{\text{cp}}(\theta, \phi)|^2} =$$

$$= \frac{4\pi \left| \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') dS' \right|^2}{\lambda^2 \int_A |\vec{E}_a(\vec{r}')|^2 dS'} = \frac{4\pi A_{\text{eff}}}{\lambda^2},$$
(4.146)

где эффективная поверхность (максимальная рабочая поверхность) апертуры:

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left| \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') dS' \right|^2}{\int_A |\vec{E}_a(\vec{r}')|^2 dS'}$$
(4.147)

связана с геометрической поверхностью  $A$  через коэффициент использования поверхности (КИП):

$$\nu = \frac{A_{\text{eff}}}{A} = \frac{\left| \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') dS' \right|^2}{A \int_A |\vec{E}_a(\vec{r}')|^2 dS'} \leq 1.$$
(4.148)

Неравенство (4.148) может рассматриваться как частный случай неравенства Коши – Шварца, из которого следует, что равенство выполняется только в случае, если  $\vec{E}_a(\vec{r}')$  имеет постоянное (равномерное) значение на всей апертуре, т. е. не зависит от  $\vec{r}'$ .

Числитель подынтегрального выражения (4.148) зависит от амплитуды и фазы поля  $\vec{E}_a$ , которые в общем случае являются независимыми величинами, и поэтому можно отдельно рассматривать влияние этих параметров на эффективность излучения апертуры и тем самым учитывать неравномерность отдельно амплитудного и фазового распределений в пределах апертуры с помощью фазового КИП и амплитудного КИП:

$$\nu_a = \frac{\left| \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') dS' \right|^2}{A \int_A |\vec{E}_a(\vec{r}')|^2 dS'}, \quad \nu_\phi = \frac{\left| \int_A \vec{E}_a(\vec{r}') dS' \right|^2}{\left| \int_A |\vec{E}_a(\vec{r}')| dS' \right|^2}.$$
(4.149)

Тогда с учетом (4.149) КИП апертуры  $\nu$  может быть представлен в виде произведения  $\nu = \nu_a \nu_\phi$ , который имеет максимальное значение, равно едини-

це, если амплитудный и фазовый КИП  $v_a = v_\phi = 1$ , что соответствует равномерным амплитудным и фазовым распределениям поля в области апертуры.

В теории антенн под апертурой понимают поверхность, через которую происходит излучение основного потока мощности в дальнюю зону. Для сравнительной оценки эффективности апертурных антенн вводится параметр – коэффициент усиления  $G = \eta D$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ , где  $\eta$  – коэффициент полезного действия, зависящий от потерь в материале, из которых изготовлены антенна. Обычно коэффициент полезного действия  $\eta \approx 1$ , и поэтому  $G \approx D$ .

#### 4.8.6. Функции направленности однородных апертур

В однородных апертурах поля  $E_a, H_a$  имеют равномерное амплитудное и фазовое распределение поля по всей площади апертуры (рис. 4.28, а, б).

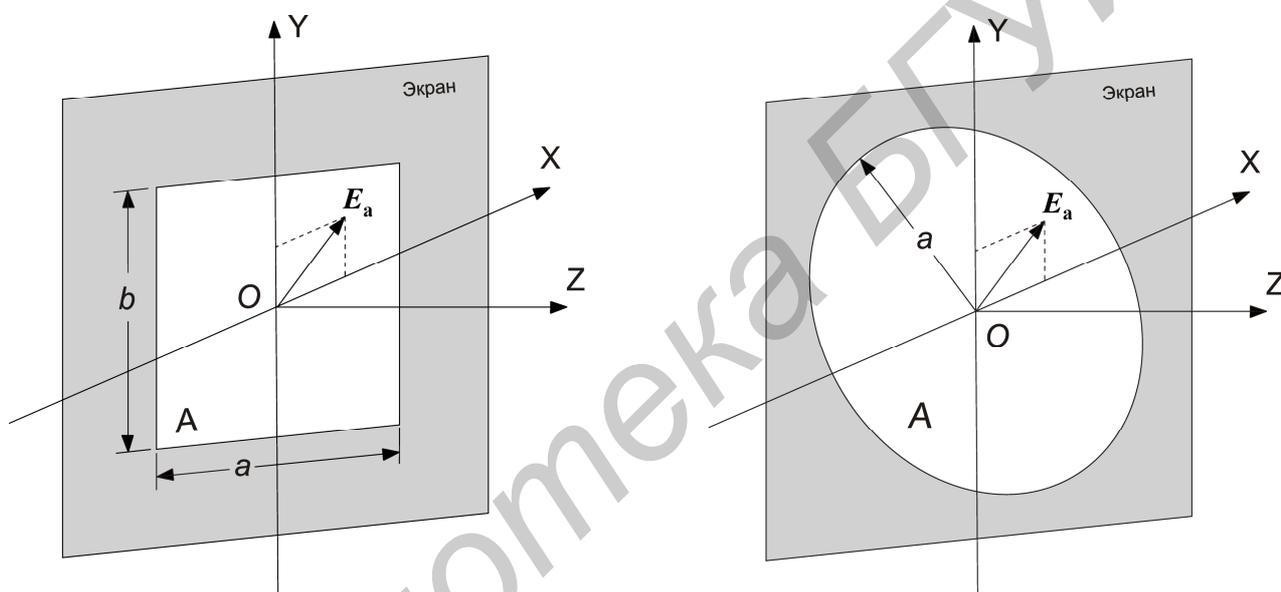


Рис. 4.28. Однородные прямоугольная (а) и круглая (б) апертуры

Для однородных апертур функция направленности с учетом (4.145) может быть представлена в виде произведения двух сомножителей, первый из которых есть коэффициент наклона  $c_\theta = (1 + \cos\theta)/2$ , и характеризует нормированную функцию направленности элемента Гюйгенса, а второй –  $f(\theta, \phi)$  называется дифракционным множителем, или множителем системы излучателей, который учитывает взаимодействие элементарных поверхностных излучателей Гюйгенса, расположенных в области апертуры, в дальней зоне или зоне Фраунгофера:

$$F_E(\theta, \phi) = \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right) |f(\theta, \phi)|. \quad (4.150)$$

#### 4.8.6.1. Дифракционный множитель прямоугольной апертуры

В случае прямоугольной апертуры дифракционный множитель  $f(\theta, \phi)$  имеет вид

$$f_s(\theta, \phi) = \frac{\sin(k_x a/2)}{k_x a/2} \frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2} = \frac{\sin(\pi v_x)}{v_x} \frac{\sin(\pi v_y)}{v_y} \quad (4.151)$$

и безразмерные параметры  $v_x, v_y$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\pi} k_x a = \frac{1}{2\pi} k a \sin \theta \cos \phi = \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \phi, \\ v_y &= \frac{1}{2\pi} k_y b = \frac{1}{2\pi} k b \sin \theta \sin \phi = \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.152)$$

В двух основных секущих плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ , которые соответствуют  $\phi = 0^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$ , множитель системы имеет вид

$$\begin{aligned} f_s(\theta, 0^\circ) &= \frac{\sin(\pi v_x)}{\pi v_x} = \frac{\sin((\pi a/\lambda) \sin \theta)}{(\pi a/\lambda) \sin \theta}, \\ f_s(\theta, 90^\circ) &= \frac{\sin(\pi v_y)}{\pi v_y} = \frac{\sin((\pi b/\lambda) \sin \theta)}{(\pi b/\lambda) \sin \theta}, \end{aligned} \quad (4.153)$$

где  $v_x = a/\lambda$  и  $v_y = b/\lambda$  называются *волновыми размерами апертуры* соответственно по координатам  $X$  и  $Y$ .

На рис. 4.29 показана трехмерная диаграмма как функция независимых переменных  $v_x, v_y$  для апертуры с размерами  $a = 8\lambda$ ,  $b = 4\lambda$ .

При изменении полярных углов в пределах  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  и  $0 \leq \phi \leq 360^\circ$  величины  $v_x$  и  $v_y$  изменяются в пределах  $-a/\lambda \leq v_x \leq a/\lambda$  и  $-b/\lambda \leq v_y \leq b/\lambda$ . В действительности физически реализуемые значения  $v_x, v_y$  – те, которые лежат на поверхности эллипса:

$$\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{Видимая область}). \quad (4.154)$$

Реализуемые значения параметров  $v_x, v_y$  называются *видимой областью*. На рис. 4.29 представлена трехмерная диаграмма дифракционного множителя в области видимых значений параметров  $v_x, v_y$ . Диаграмма излучения состоит из узкого главного лепестка, направленного по  $\theta = 0^\circ$ , и нескольких боковых лепестков.

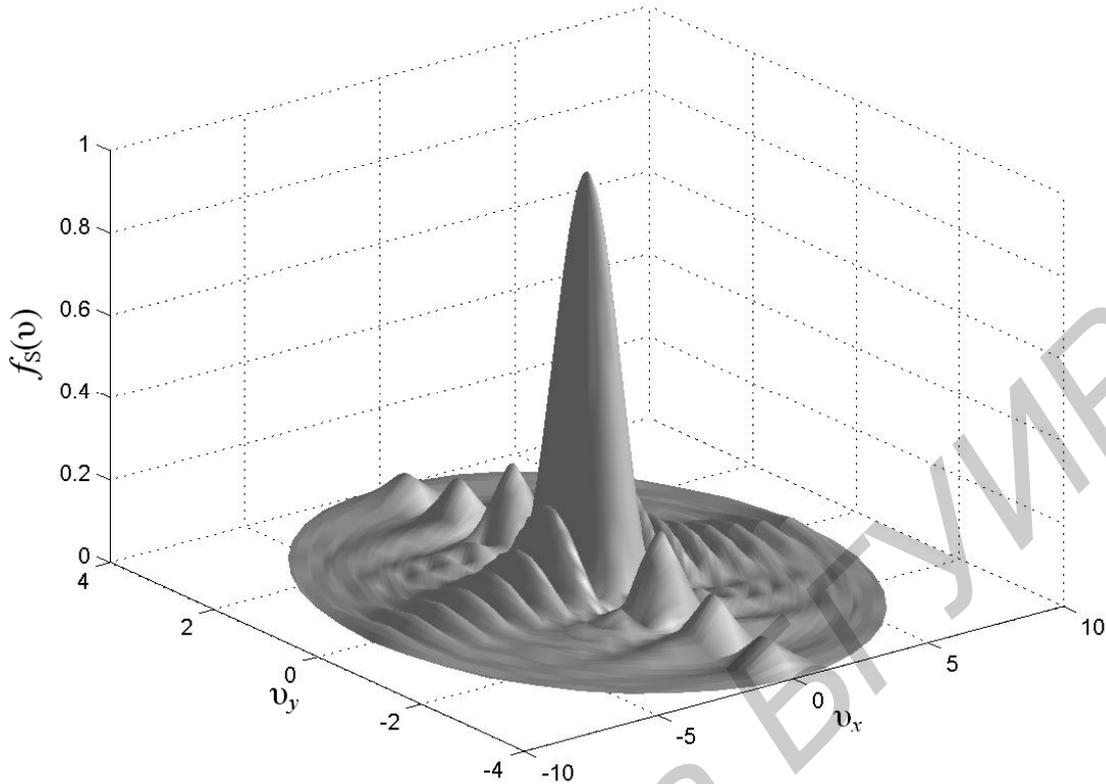


Рис. 4.29. Диаграмма излучения однородной прямоугольной апертуры с размерами  $a = 8\lambda$ ,  $b = 4\lambda$ .

Отметим три специфических свойства, которыми обладают модели в виде  $\text{sinc}(v) = \sin v/v$  - функций:

а) ширина основного (главного) лепестка по уровню  $-3$  дБ в пространстве параметра  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  соответствует изменению его величины до уровня  $\Delta v = 0,866$  в пределах основного максимума или соответственно изменению параметров  $v_x = v_y$  до уровня  $\Delta v_x = \Delta v_y = 0,443$ ;

б) уровень первого бокового лепестка ниже уровня основного максимума на  $-13,26$  дБ и наблюдается при  $v_x = v_y = 1,4303$ ;

в) первый нуль диаграммы соответствует значению  $v_x = v_y = 1$ .

В полярных координатах ширина основного лепестка по уровню  $-3$  дБ может быть получена линеаризацией отношения  $v_x = (a/\lambda)$  в окрестности  $\theta = 0^\circ$ ,

$$\begin{cases} v_x = (a/\lambda)\Delta\theta_x \cos\theta|_{\theta=0} = a\Delta\theta_x/\lambda, \\ v_y = (b/\lambda)\Delta\theta_y \cos\theta|_{\theta=0} = b\Delta\theta_y/\lambda. \end{cases}$$

Следовательно,  $\begin{cases} \Delta\theta_x = \lambda\Delta v_x/a, \\ \Delta\theta_y = \lambda\Delta v_y/b \end{cases}$  и ширина главного лепестка дифракци-

онного множителя по уровню  $-3$  дБ в двух плоскостях составляет (в радианах и градусах):

$$\Delta\theta_x = 0,866 \frac{\lambda}{a} = 50,76^\circ \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta\theta_y = 0,866 \frac{\lambda}{b} = 50,76^\circ \frac{\lambda}{b}. \quad (4.155)$$

Изменение ширины лепестков на  $-3$  дБ соответствует изменению углов наблюдения в два раза, т. е.  $\theta_x = \frac{\Delta\theta_x}{2} = 25,4^\circ \frac{\lambda}{a}$  и  $\theta_y = \frac{\Delta\theta_y}{2} = 25,4^\circ \frac{\lambda}{b}$ .

На рис. 4.30 показаны диаграммы излучения прямоугольной однородной апертуры с размерами  $a = 8\lambda$ ,  $b = 4\lambda$  в двух основных плоскостях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 90^\circ$  в зависимости от угла наблюдения  $\theta$ . Влиянием функции направленности элемента Гюйгенса в данном случае можно пренебречь, по крайней мере в пределах основного лепестка дифракционного множителя.

Из приведенных рисунков видно, что максимум первого бокового лепестка в плоскости  $Y0Z$  расположен на угле  $\theta_a = a \sin(1,4303\lambda/a) = 10,3^\circ$ , а в плоскости  $X0Z$  на  $\theta_b = b \sin(1,4303\lambda/b) = 20,95^\circ$ .

Для апертурных антенн, как отмечалось выше, коэффициент усиления практически равен коэффициенту направленного действия  $G \approx D$ . Поэтому коэффициент усиления однородной прямоугольной апертуры определяется

$$G_{0S} \simeq D_{0S} = 4\pi(ab)/\lambda^2. \quad (4.156)$$

Если распределение амплитуды и фазы поля на апертуре неоднородно, то это можно учесть с помощью коэффициента использования поверхности (КИП):

$$G_S \simeq D_S = 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} v = 4\pi \frac{A}{\lambda^2} v, \quad (4.157)$$

где  $A$  – геометрическая площадь апертуры,  $v$  – КИП.

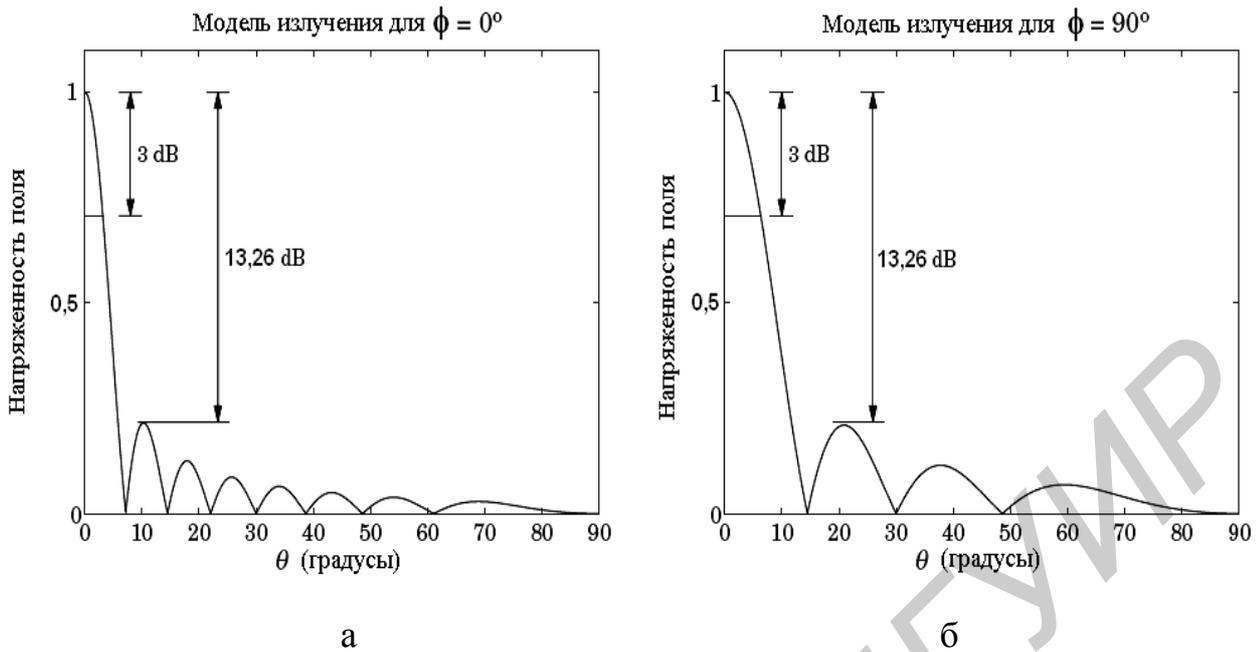


Рис. 4.30. Диаграммы излучения однородной прямоугольной апертуры ( $a = 8\lambda$ ,  $b = 4\lambda$ ) в плоскостях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 90^\circ$

Так как коэффициент направленного действия и следовательно, коэффициент усиления апертуры определяются через плотность потока мощности излучаемого поля в дальнюю зону, то можно ввести величину, характеризующую эффективность излучения поля в единицу телесного угла  $\Delta\Omega = \Delta\theta_x \Delta\theta_y$  и определяемую шириной диаграммы излучения поля по уровню  $-3$  дБ (рис. 4.31):

$$\begin{aligned} \Theta_S &= \Theta_{0S} v = G_{0S} v \cdot \Delta\theta_x \Delta\theta_y = 4\pi v (0,866)^2 = \\ &= 9,8646 \cdot v \text{ (рад}^2\text{)} = 32283 \cdot v \text{ (град}^2\text{)}, \end{aligned} \quad (4.158)$$

где  $\Theta_{0S}$  – эффективность излучения однородной апертурой (равномерное амплитудное и фазовое распределение поля на апертуре) и  $\Delta\theta_x$ ,  $\Delta\theta_y$ , определяется соотношением (4.155).

С учетом (4.158) несложно выразить коэффициент усиления апертуры в зону Фраунгофера через угловую ширину диаграммы излучения поля:

$$G_S = G_{0S} v = \frac{\Theta_{0S} \cdot v}{\Delta\theta_x \Delta\theta_y} = \frac{9,8646}{\Delta\theta_x \Delta\theta_y} \cdot v = \frac{32383}{\Delta\theta_x^0 \Delta\theta_y^0} \cdot v. \quad (4.159)$$

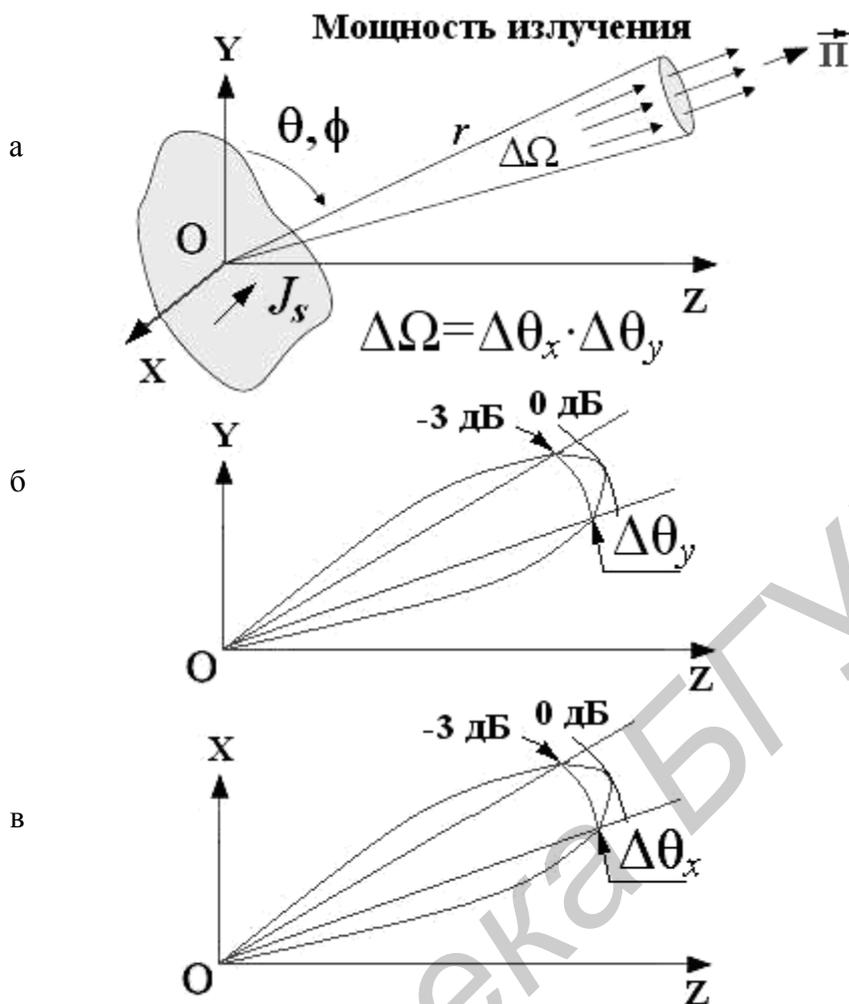


Рис. 4.31. Эффективность излучения  $\Theta$  в единицу телесного угла  $\Delta\Omega$

Таким образом, любые отклонения амплитудно-фазового распределения поля на апертуре от равномерного неизбежно ведут к снижению эффективности излучения, а значит, к расширению главного лепестка диаграммы излучения в дальней зоне.

#### 4.8.6.2. Дифракционный множитель круглой апертуры

Для круглой апертуры радиусом  $a$  дифракционный множитель  $f(\theta, \phi)$  в силу азимутальной симметрии задачи удобнее представить в цилиндрической системе координат. Азимутальная симметрия означает, что  $f(\theta, \phi)$  не зависит от азимутального угла  $\phi$ .

В цилиндрической системе координат дифракционный множитель для круглой апертуры имеет вид

$$f_c(\theta) = 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} = 2 \frac{J_1(2\pi u)}{2\pi u}, \quad (4.160)$$

где  $\frac{J_1(x)}{x} = \int_0^1 J_0(xr) r dr$ ,  $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jx \cos \phi'} d\phi'$  – интегральные преобразования для функций Бесселя нулевого  $J_0(x)$  и первого  $J_1(x)$  порядков,  $u = \frac{1}{2\pi} ka \sin \theta = \frac{a}{\lambda} \sin \theta$  – безразмерный параметр, характеризующий волновые размеры апертуры.

Уравнение (4.160) представляет собой хорошо известную модель Эйри для круглой апертуры. В окрестности малых значений аргумента функция  $f_c(\theta)$  может быть представлена в асимптотическом виде  $J_1(x) \simeq x/2$ , что вполне оправдано, если рассматривать поведение дифракционного множителя в окрестности небольших углов наблюдения  $\theta \approx 0^\circ$ .

На рис. 4.32 представлена трехмерная диаграмма дифракционного множителя как функция независимых переменных  $u_x = (a/\lambda) \sin \theta \cos \phi$  и  $u_y = (a/\lambda) \sin \theta \sin \phi$  для апертуры радиусом  $a = 3\lambda$ .

Видимая область диаграммы излучения представляет собой окружность на плоскости безразмерных волновых параметров  $u_x, u_y$ , которая характеризуется следующим нестрогим неравенством:

$$u_x^2 + u_y^2 \leq \frac{a^2}{\lambda^2}. \quad (4.161)$$

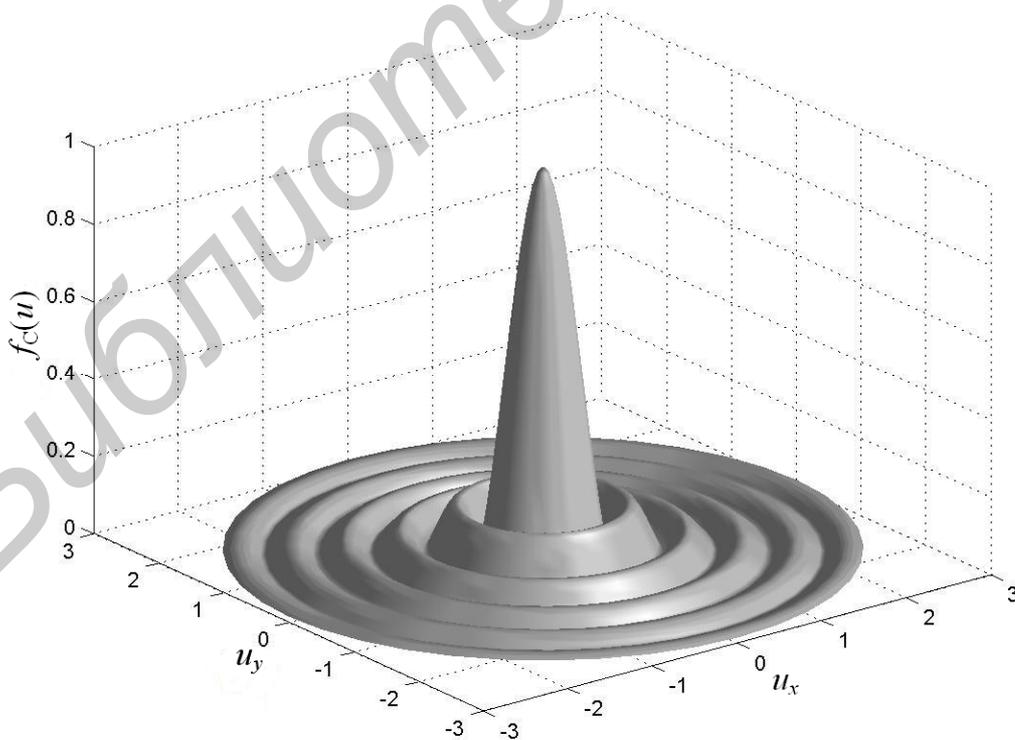


Рис. 4.32. Диаграмма излучения круглой апертуры радиусом  $a = 3\lambda$

Для круглой апертуры определяющими являются следующие характеристики:

а) ширина главного лепестка дифракционного множителя в пространстве волнового параметра  $u$  по уровню  $-3\text{дБ}$  наблюдается при  $u = 0,2572$ , что соответствует  $\Delta u = 2 \times 0,2572 = 0,5144$ ;

б) первый нуль дифракционного множителя имеет место при  $u = 0,6098$ , вследствие этого ширина дифракционного множителя по уровню первого нуля соответствует  $\Delta u = 2 \times 0,6098 = 1,22$ ;

в) уровень первого бокового лепестка наблюдается при  $u = 0,8174$  и составляет  $|f_c(u)| = 0,1323$  или  $-17,56\text{дБ}$  относительно максимального значения дифракционного множителя.

Отмеченные выше характеристики можно представить в угловых параметрах дифракционного множителя. Так, ширину главного лепестка диаграммы направленности можно получить, полагая, что  $\Delta u = a(\Delta\theta)/\lambda$ . Далее

е подставляя соответствующие значения волновых параметров из пунктов (а-в), несложно выразить параметры излучения в угловых единицах:

$$\Delta\theta_{3\text{дБ}} = 0,5144 \frac{\lambda}{a} = 29,47^\circ \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta\theta_{\text{null}} = 1,22 \frac{\lambda}{a} = 70^\circ \frac{\lambda}{a}. \quad (4.162)$$

С учетом (4.162) полуширина главного лепестка диаграммы направленности по уровню  $-3\text{дБ}$  составляет  $\theta_{3\text{дБ}} = \Delta\theta_{3\text{дБ}}/2 = 0,2572\lambda/a = 14,74^\circ \lambda/a$ , а полуширина главного лепестка по уровню первого нуля –  $\theta_{\text{null}} = 0,6098\lambda/a$ .

На рис. 4.33 представлена диаграмма дифракционного множителя (4.160) в зависимости от угла наблюдения  $\theta$  для апертуры с волновым размером ее радиуса  $a = 3\lambda$ , на котором отмечены основные характеристики излучения:  $\theta_a = a \sin(0,817\lambda/a) = 15,8^\circ$ ,  $\theta_{\text{null}} = a \sin(0,6098\lambda/a) = 11,73^\circ$ .

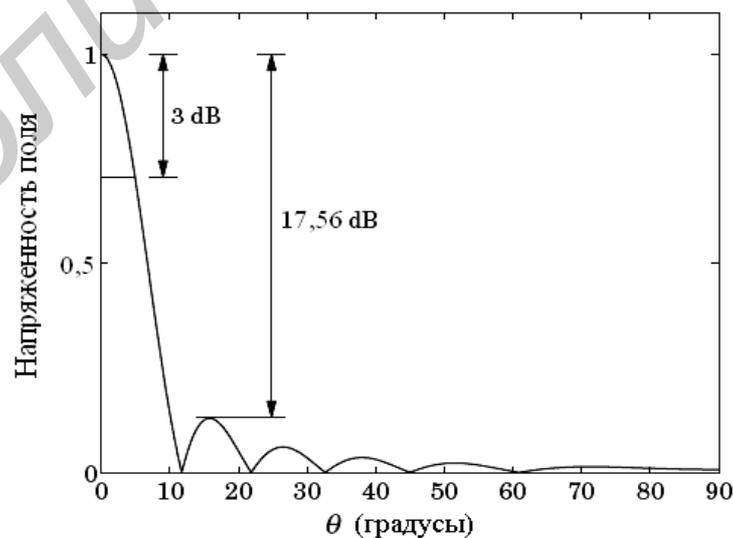


Рис. 4.33. Диаграмма излучения для круглой апертуры ( $a = 3\lambda$ )

Если расчет ширины главного лепестка по уровню первого нуля производить по асимптотической формуле  $\theta_{null} = 0,6098\lambda/a$ , то угол составляет  $11,65^\circ$ .

Аналогично (4.158), (4.159) можно определить эффективность излучения поля в единицу телесного угла  $\Delta\Omega = (\Delta\theta_{3дБ})^2$  для круглой апертуры:

$$\Theta_c = G_{0c} v (\Delta\theta_{3дБ})^2 = \frac{4\pi v (\pi a^2) / \lambda^2}{(0,514\lambda/a)^{-2}} = 4\pi^2 v (0,5144)^2 = \\ = 10,4463 \cdot v \left(\text{рад}^2\right) = 34293 \cdot v \left(\text{град}^2\right).$$

Из приведенного соотношения несложно определить коэффициент усиления для круглой апертуры, если задана ширина главного лепестка диаграммы направленности по уровню  $-3$  дБ:

$$G_c = G_{0c} v = \frac{10,4463}{(\Delta\theta_{3дБ})^2} v = \frac{34293}{(\Delta\theta_{3дБ}^\circ)^2} v. \quad (4.163)$$

Ширину главного лепестка диаграммы направленности по уровню первых нулей в оптике называют *дифракционным пределом Релея*, который характеризует номинальную угловую разрешающую способность оптических приборов (микроскопы, телескопы, объективы), характеризуемых размерами оптической апертуры  $D = 2a$ :

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 70^\circ \frac{\lambda}{D} \quad (\text{дифракционный предел Релея}). \quad (4.164)$$

## 4.9. Дифракция Френеля

### 4.9.1. Дифракция на прямоугольной апертуре

В подразд. 4.8 на основе метода Гюйгенса, в сущности, рассмотрено не что иное, как задача дифракции плоской ЭМВ на апертуре в приближении Фраунгофера. Это приближение предполагает наличие только линейных фазовых изменений поля на апертуре и характеризуется фазовым множителем  $e^{-jkR}$ , что справедливо, строго говоря, только при  $R \rightarrow \infty$ . Однако ситуация кардинально изменяется по мере приближения источника поля или точки наблюдения к апертуре. В этом случае уже необходимо учитывать кривизну волнового фронта и рассматривать волну не как плоскую, а как сферическую. Поэтому в фазовом множителе функции Грина наряду с линейным членом разложения в биномиальный ряд должен, как минимум, учитываться квадратичный член.

Рассмотрим классическую проблему дифракции сферической волны на прямоугольной апертуре в виде прямоугольного отверстия в непрозрачном для

ЭМП экране (рис. 4.34). Для этого воспользуемся интегральной формулировкой метода Кирхгофа, которая справедлива для вычисления поля в точке наблюдения  $P_2$  в произвольной системе координат:

$$E = \int_S \left[ E_1 \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial E_1}{\partial n'} \right] dS', \quad (4.165)$$

где  $E_1 = A_1 \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}$  – напряженность электрического поля в точке  $P_1$  источника сферической волны,  $A_1$  – некоторая постоянная, зависящая от производительности источника поля,  $G = \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2}$  – функция Грина (функция преобразования поля из области апертурных источников в точку  $P'$  в точку наблюдения  $P_2$ ).

Пусть  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  – единичные векторы, направленные из начала координат 0 соответственно к точкам источника и наблюдения. Тогда векторы расстояний от источников Гюйгенса в пределах апертуры  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{r}_1 - r', & R_1 &= |\vec{r}_1 - r'| = \sqrt{r_1^2 - 2\vec{r}_1 \cdot r' + r'^2}, \\ \vec{R}_2 &= \vec{r}_2 - r', & R_2 &= |\vec{r}_2 - r'| = \sqrt{r_2^2 - 2\vec{r}_2 \cdot r' + r'^2}. \end{aligned} \quad (4.166)$$

С учетом (4.166) производные, стоящие под интегралом в уравнении (4.165), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial n'} &= \vec{n} \cdot \nabla' E_1 = -\vec{n} \cdot \vec{R}_{01} \frac{\partial E_1}{\partial R_1} = (\vec{n} \cdot \vec{R}_{01}) \left( jk + \frac{1}{R_1} \right) A_1 \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}, \\ \frac{\partial G}{\partial n'} &= \vec{n} \cdot \nabla' G = -\vec{n} \cdot \vec{R}_{02} \frac{\partial G}{\partial R_2} = (\vec{n} \cdot \vec{R}_{02}) \left( jk + \frac{1}{R_2} \right) \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2}, \end{aligned} \quad (4.167)$$

где  $\nabla' = -\vec{R}_{01} \frac{\partial}{\partial R_1}$ ,  $\nabla' = -\vec{R}_{02} \frac{\partial}{\partial R_2}$ ;  $\vec{R}_{01}$  и  $\vec{R}_{02}$  – единичные векторы в направлениях  $R_1$  и  $R_2$ .

И после несложных преобразований (отбрасываем слагаемые, содержащие квадратичные члены в амплитудных множителях  $1/R^2$ ) уравнение (4.165), описывающее дифракционное поле в точке  $P_2$ , примет вид

$$E = \frac{jkA_1}{4\pi r_1 r_2} [(\vec{n} \cdot \vec{r}_2) - (\vec{n} \cdot \vec{r}_1)] \int_S e^{-jk(R_1+R_2)} dS', \quad (4.168)$$

где величина  $[(\vec{n} \cdot \vec{r}_2) - (\vec{n} \cdot \vec{r}_1)]$ , учитывающая пространственную ориентацию плоскости экрана относительно точек источника и наблюдения, называется *угловым множителем*.

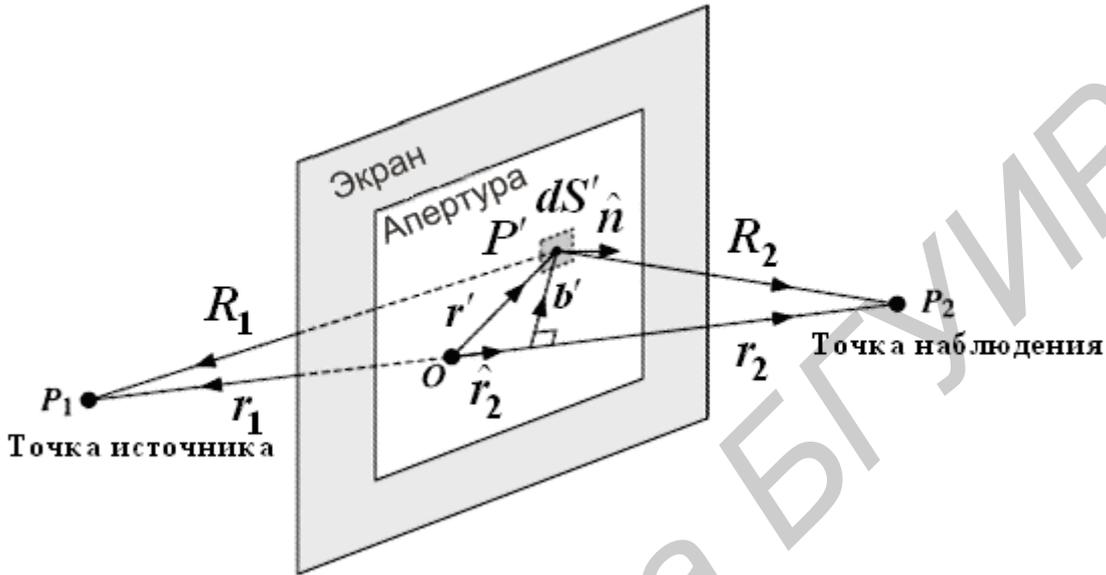


Рис. 4.34. Модель дифракции Френеля на прямоугольной апертуре

В отсутствие экрана поле в точке наблюдения  $P_2$  характеризуется как поле в свободном пространстве

$$E_0 = A_1 \frac{e^{-jk(r_1+r_2)}}{r_1+r_2} = A_1 \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (4.169)$$

Ведем понятие дифракционного множителя  $D = E/E_0$ , который может рассматриваться как функция, учитывающая изменение напряженности поля в точке наблюдения при наличии между источником поля и точкой наблюдения произвольно ориентированного в пространстве экрана в сравнении с полем в отсутствии такового:

$$\Phi = \frac{E}{E_0} = \frac{jk}{4\pi F} [(\vec{n} \cdot \vec{r}_2) - (\vec{n} \cdot \vec{r}_1)] \int_S e^{-jk(R_1+R_2-r_1-r_2)} dS', \quad (4.170)$$

где  $F$  – фокусное расстояние, которое определяется из уравнения

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow F = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (4.171)$$

Используя приближение Френеля, заключающееся в асимптотическом представлении расстояний  $R_1$  и  $R_2$ , в которые входит фазовый множитель, упростим уравнение (4.170). Для этого, используя соотношения (4.166), представим  $R_1$  и  $R_2$  в виде

$$R_1 = r_1 \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}'}{r_1} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r_1^2}}, \quad R_2 = r_2 \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}'}{r_2} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r_2^2}}$$

и, разлагая в ряд Тейлора, сохраним только члены второго порядка малости:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Можем для расстояний  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_1 + R_2 - r_1 - r_2$  записать:

$$\begin{aligned} R_1 &= r_1 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2r_1} \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}' - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}')^2 \right], \\ R_2 &= r_2 - \vec{r}_2 \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2r_2} \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}' - (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}')^2 \right], \\ R_1 + R_2 - r_1 - r_2 &= -(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \cdot \vec{r}' + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \vec{r}' \cdot \vec{r}' - \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}')^2}{r_1} - \frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}')^2}{r_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Сокращая в (4.172) линейные члены и группируя квадратичные, выразим разность хода лучей между точками излучения и наблюдения (рис. 4.35) в виде

$$R_1 + R_2 - r_1 - r_2 = \frac{1}{2F} \left[ \vec{r}' \cdot \vec{r}' - (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}')^2 \right] = \frac{1}{2F} \left| \vec{r}' - \vec{r}_2 (\vec{r}' \cdot \vec{r}_2) \right|^2 = \frac{1}{2F} \vec{b}' \cdot \vec{b}', \quad (4.173)$$

где  $\vec{b}' = \vec{r}' - \vec{r}_2 (\vec{r}' \cdot \vec{r}_2)$ .

Таким образом, с учетом (4.173) дифракционный множитель для произвольной апертуры (4.170) в приближении Френеля имеет вид

$$\Phi = \frac{E}{E_0} = \frac{jk(\vec{n} \cdot \vec{r}_2)}{2\pi F} \int_S e^{-jk(\vec{b}' \cdot \vec{b}')/2F} dS'. \quad (4.174)$$

Уравнение (4.174) можно представить как функцию угла между плоскостью экрана и линией положения терминальных точек  $P_1$  и  $P_2$  (линия терминалов). Для этого запишем скалярное произведение  $\vec{b}' \cdot \vec{b}'$  в виде

$$\vec{b}' \cdot \vec{b}' = \vec{r}' \cdot \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}_2)^2 = x'^2 + y'^2 - (y' \sin \theta)^2 = x'^2 + y'^2 \cos^2 \theta,$$

с учетом которого для дифракционного множителя получим следующее выражение:

$$\Phi = \frac{E}{E_0} = \frac{jk(\vec{n} \cdot \vec{r}_2)}{2\pi F} \int_{-x_1}^{x_2} \int_{-y_1}^{y_2} e^{-jk(x'^2 + y'^2 \cos^2 \theta)/2F} dx' dy', \quad (4.175)$$

где  $x'$  и  $y'$  – текущие координаты интегрирования источников Гюйгенса на апертуре. Диапазон этих источников задается неравенствами

$$-x_1 \leq x' \leq x_2, \quad -y_1 \leq y' \leq y_2. \quad (4.176)$$

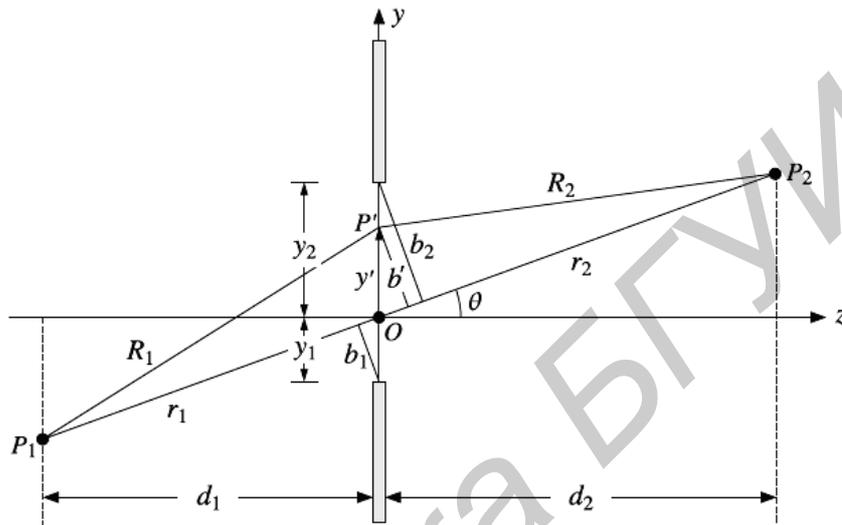


Рис. 4.35. Положение экрана и терминальных точек при дифракции Френеля на прямоугольной апертуре

Граничные точки интегрирования  $y_1$ ,  $y_2$  показаны на рис. 4.35.

Двухмерное интегральное уравнение для прямоугольной апертуры (4.175) может быть представлено в виде комплексной функции

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{j}{2} \int_{-u_1}^{u_2} e^{-j\pi u^2/2} du \int_{-v_1}^{v_2} e^{-j\pi v^2/2} dv = \\ &= \frac{j}{2} [F(u_2) - F(-u_1)] [F(v_2) - F(-v_1)], \end{aligned} \quad (4.177)$$

где

$$\begin{cases} F(u) = C(u) - jS(u) = \int_0^u e^{-j(\pi/2)u^2} du, \\ F(v) = C(v) - jS(v) = \int_0^v e^{-j(\pi/2)v^2} dv, \end{cases} \quad (4.178)$$

– комплексные функции, выражающиеся с помощью интегралов Френеля

$C(u)$ ,  $S(u)$ ,  $C(v)$ ,  $S(v)$  (рис. 4.36),  $u_i = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} x_i$ ,  $v_i = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} y_i \cos \theta = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} b_i$ ,  $i=1,2$  – безразмерные параметры, которые задаются диапазоном изменений (4.177);  $b_1 = y_1 \cos \theta$  и  $b_2 = y_2 \cos \theta$  – длины перпендикуляров относительно линии терминалов (линии, соединяющей точки  $P_1$  и  $P_2$ ).

Учитывая, что  $du \cdot dv = (k \cos \theta / \pi F) dx' dy'$ ;  $j/2 = 1/(1-j)^2$  и функция  $F(x)$  нечетная (рис. 4.37), представим уравнение (4.178) в виде

$$\dot{\Phi} = |\dot{\Phi}| e^{j\Phi} = \frac{E}{E_0} = \frac{F(u_1) + F(u_2)}{1-j} \frac{F(v_1) + F(v_2)}{1-j}. \quad (4.179)$$

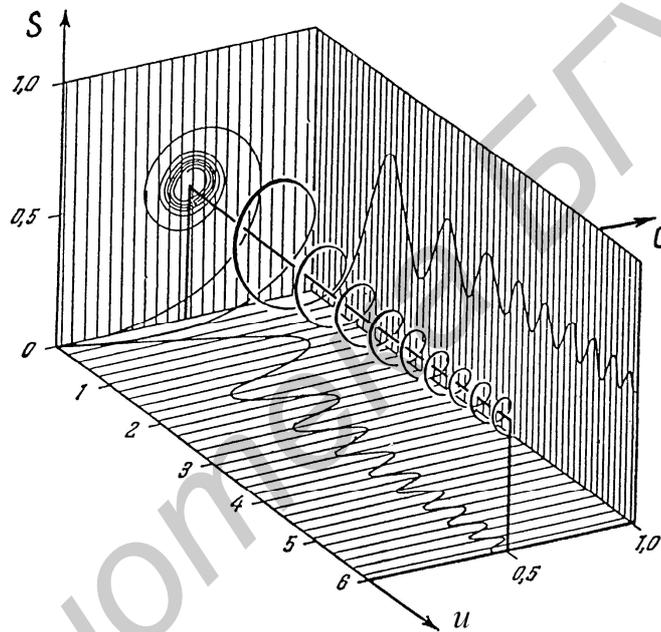


Рис. 4.36. Спираль Корню для положительных значений параметра  $u$

Нормировочные множители  $(1-j)$  соответствуют бесконечным размерам апертуры  $u_1, u_2, v_1, v_2 \rightarrow \infty$ , т. е. для свободного пространства. Поэтому асимптотическое значение  $F(\infty) = (1-j)/2$  для дифракционного множителя равно

$$\Phi_0 = \frac{F(u_1) + F(u_2)}{1-j} \frac{F(v_1) + F(v_2)}{1-j} \rightarrow \frac{F(\infty) + F(\infty)}{1-j} \frac{F(\infty) + F(\theta)}{1-j} = 1.$$

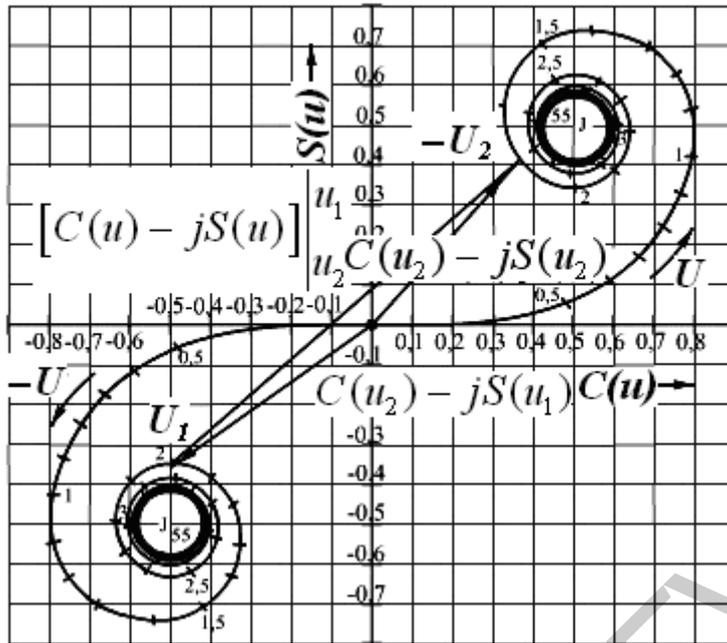


Рис. 4.37. График функции  $F(u)$  в плоскости интегралов Френеля

В случае длинной щели, например, вдоль координаты  $x$  ( $v_1, v_2 \rightarrow \infty$ ) дифракционный множитель имеет вид

$$\dot{\Phi} = \frac{E}{E_0} = \frac{F(u_1) + F(u_2)}{1 - j}. \quad (4.180)$$

#### 4.9.2. Дифракция на полуплоскости

В ряде практически важных случаев представляет интерес задача дифракции на частично закрытых трассах между терминальными точками, которая может рассматриваться как задача дифракции на полуплоскости. Модель такой задачи представлена на рис. 4.38. В аналитическом виде решение может быть получено из (4.179), полагая, например, в пределе  $y_2 \rightarrow \infty$ , или  $u_2 \rightarrow \infty$ , и  $F(u_2) \rightarrow F(\infty) = (1 - j)/2$ , что соответствует наличию только нижней грани апертуры (рис. 4.38).

С учетом сказанного для дифракционного множителя в случае полуплоскости можем записать

$$\dot{\Phi}_{1/2}(u) = \frac{1}{1 - j} \left[ F(u) + \frac{1 - j}{2} \right], \quad (4.181)$$

где  $u = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} b_1$ .

При этом положительным значениям параметра  $u$  соответствуют положительные значения просвета  $b_1$ , и точка наблюдения  $P_2$  расположена в освещенной зоне (облученная область). Отрицательные значения  $u$  соответствуют  $b_1 < 0$ , и точка наблюдения  $P_2$  перемещается в область геометрической тени.

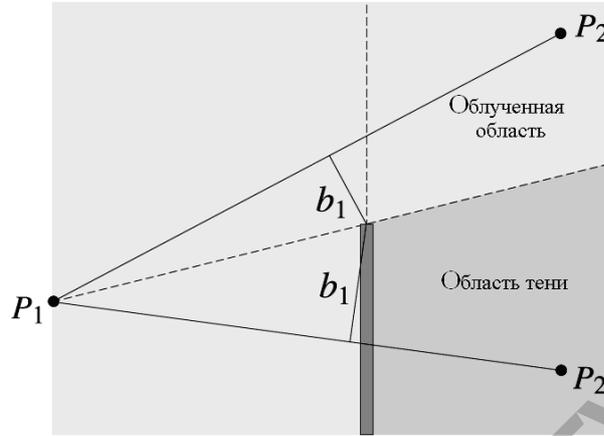


Рис. 4.38. Дифракция на полуплоскости

Квадрат абсолютной величины  $|\dot{\Phi}|^2$  представляет собой интенсивность дифракционного поля относительно интенсивности поля в свободном пространстве. Учитывая, что для свободного пространства интенсивность дифракционного поля составляет  $\Phi_0 = |1 - j|^2 = 2$ , в случае полуплоскости имеем

$$|\dot{\Phi}_{1/2}(u)|^2 = \frac{|E|^2}{|E_0|^2} = \frac{1}{2} \left| F(u) + \frac{1-j}{2} \right|^2. \quad (4.182)$$

После представления  $F(u)$  в компонентах интегралов Френеля и группировки действительной и мнимой частей получим

$$|\dot{\Phi}_{1/2}(u)|^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( C(u) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( S(u) + \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (4.183)$$

Графики зависимостей интенсивности дифракционного поля  $|\dot{\Phi}(u)|^2$  в абсолютном и логарифмическом масштабах приведены на рис. 4.39.

Из представленных графиков видно, что при  $u = 0$  (линия терминалов касается кромки экрана)  $F(0) = 0$ ,  $\dot{\Phi}_{1/2}(0) = 1/2$  и  $|\dot{\Phi}_{1/2}(0)|^2 = 0,25$  (или  $|\dot{\Phi}_{1/2}(0)|_{\text{дБ}} = 10 \lg(|\dot{\Phi}_{1/2}(0)|^2) = 20 \lg(|\dot{\Phi}_{1/2}(0)|) = 6 \text{ дБ}$ ). Первый максимум в облученной области имеет место при  $u = 1,2172$  и при этом  $|\dot{\Phi}_{1/2}(u)|^2 = 1,3704$ .

В относительных единицах это значение соответствует приращению интенсивности излучения поля на  $|\dot{\Phi}_{1/2}(1,2172)|_{\text{дБ}} = 1,371 \text{ дБ}$  в сравнении с интенсивностью поля в свободном пространстве.

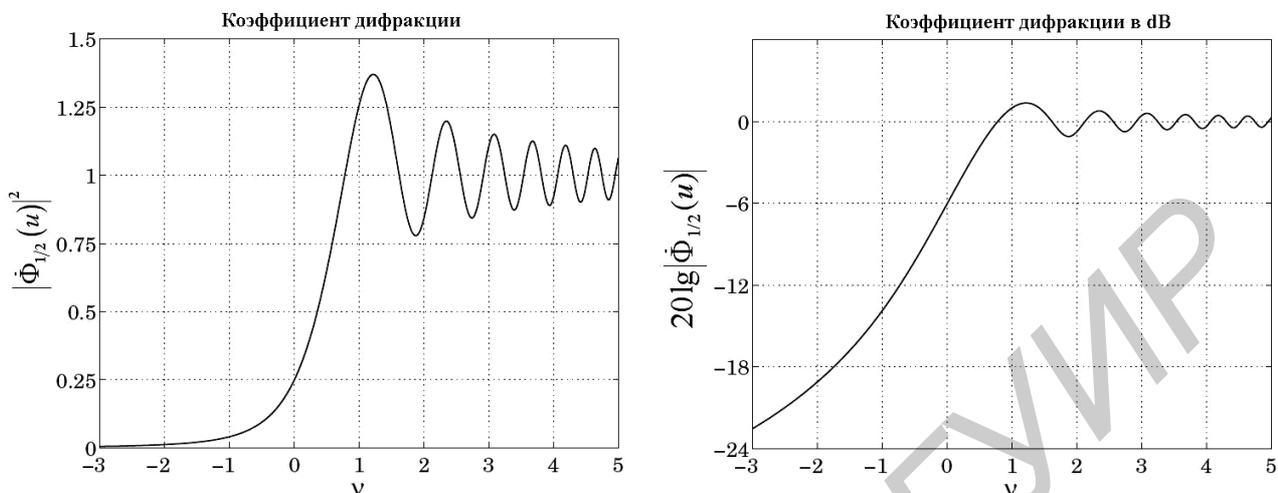


Рис. 4.39. Интенсивность излучения поля как функция просвета  $u$

Выражение для (4.183) можно упростить, если  $|\pm u| \geq 5$ . Тогда для  $F(\pm u)$  можно использовать асимптотическое приближение

$$F(\pm u) \rightarrow \pm \left( \frac{1-j}{2} + \frac{j}{\pi i} e^{-j\pi u^2/2} \right), \quad (4.184)$$

используя которое в случае дифракции на полуплоскости для дифракционного множителя, получим следующую форму записи:

$$\dot{\Phi}_{1/2}(u) = \begin{cases} 1 - \frac{1-j}{2\pi i} e^{-j\pi u^2/2} & \text{для } u \rightarrow \infty, \\ -\frac{1-j}{2\pi i} e^{-j\pi u^2/2} & \text{для } u \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.185)$$

### 4.9.3. Зоны Френеля

При распространении ЭМВ от источника к приемнику необходимо оценить размеры области пространства, в которой сосредоточена основная доля передаваемой энергии и которая оказывает существенное влияние на процессы распространения.

В рамках метода геометрической оптики считается, что эта область вырождается в линию, которая называется *лучом*. Очевидно, что энергия волны не может распространяться вдоль тончайшей ниточки, соединяющей терминальные точки (точки приема и передачи).

Для определения зон Френеля, способ построения которых показан на рис. 4.40, а, проведем из точки  $B$  семейство прямых, пересекающих поверхность сферы в точках, удаленных от точки  $B$  на расстояние  $(l_2 + \lambda/2)$ . Это семейство образует коническую поверхность, пересекающую плоскость рисунка по прямым  $BN_1$  и  $BN'_1$ . Аналогичным образом строятся конические поверхности высших порядков, для которых  $BN_2 = BN'_2 = l_2 + 2\lambda/2$  и вообще  $BN_n = BN'_n = l_2 + n\lambda/2$ . Пересечения конической поверхности со сферой образуют на ее поверхности систему концентрических окружностей. Вид на эти окружности со стороны точки  $B$  показан на рис. 4.40, б. Участки, заключенные между соседними окружностями, получили название *зон Френеля*. Первая зона Френеля представляет собой часть сферы, ограниченную окружностью, а зоны высших порядков имеют форму колец.

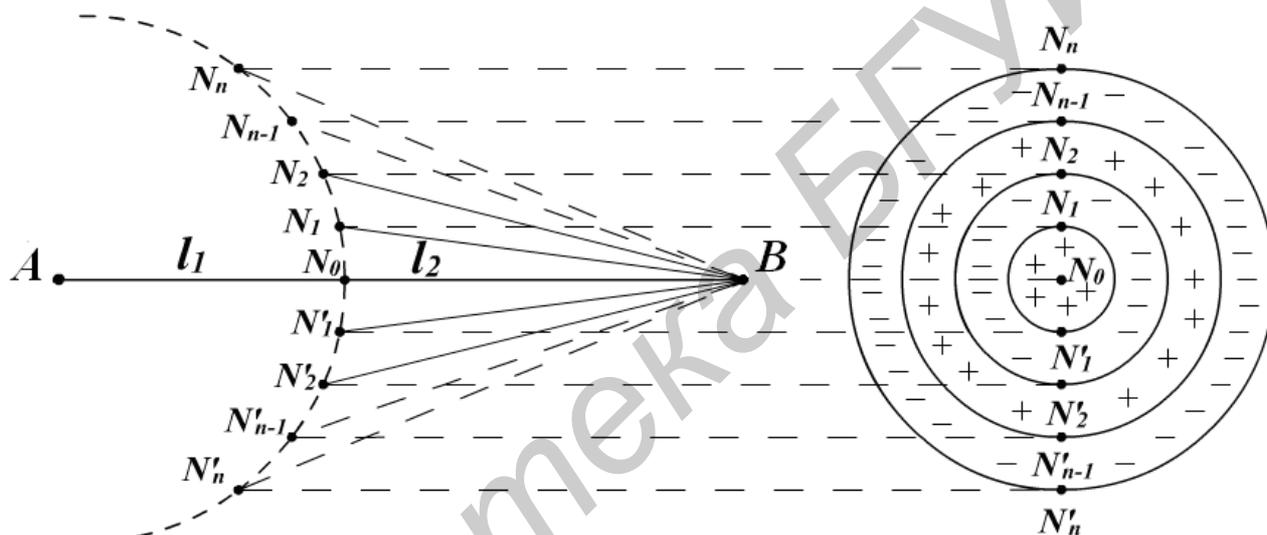


Рис. 4.40. Построение зон Френеля

Воображаемые источники вторичных волн (так называемые виртуальные источники), расположенные в пределах первой зоны, характеризуются тем, что создаваемые ими фазы колебаний в точке  $B$  отличаются от фазы, создаваемой центральным виртуальным излучателем в точке  $N_0$ , не более чем на  $\pi$ , так как разность хода в  $\lambda/2$  соответствует сдвигу фазы на  $180^\circ$ . Фаза колебаний, создаваемых виртуальными излучателями второй зоны, отличается от фазы колебаний источника  $N_0$  на величину от  $\pi$  до  $2\pi$ . Можно показать, что в целом колебания, создаваемые виртуальными источниками второй зоны, стремятся частично скомпенсировать действие излучателей первой зоны. На рис. 4.40, б это обстоятельство условно отмечено тем, что нечетные зоны маркируются знаком «+», а четные – знаком «-». В курсе физической оптики показано, что действия излучателей, расположенных в смежных зонах высших порядков, взаимно компенсируются, притом тем полнее, чем выше порядковый номер смежных зон. В результате такой попарной нейтрализации действие излучателей всех зон эквивалентно действию примерно половины излучателей первой зоны. Таким обра-

зом, первая зона Френеля ограничивает область пространства, существенно участвующую в передаче энергии.

Для определения радиусов зон Френеля воспользуемся рис. 4.41. По определению имеем

$$AN_1 = AN'_1 = r'_1; \quad BN_1 = BN'_1 = r''_1; \quad AN_n = AN'_n = r'_n; \quad BN_n = BN'_n = r''_n;$$

$$r'_1 + r''_n = l_1 + l_2 + \frac{\lambda}{2},$$

$$\dots\dots\dots ;$$

$$r'_n + r''_n = l_1 + l_2 + n\frac{\lambda}{2}.$$
(4.186)

Из треугольников  $AN_nN_0$  и  $BN_nN_0$  находим

$$AN_n = r'_n = \sqrt{l_1^2 + b_n^2}; \quad BN_n = r''_n = \sqrt{l_2^2 + b_n^2}.$$
(4.187)

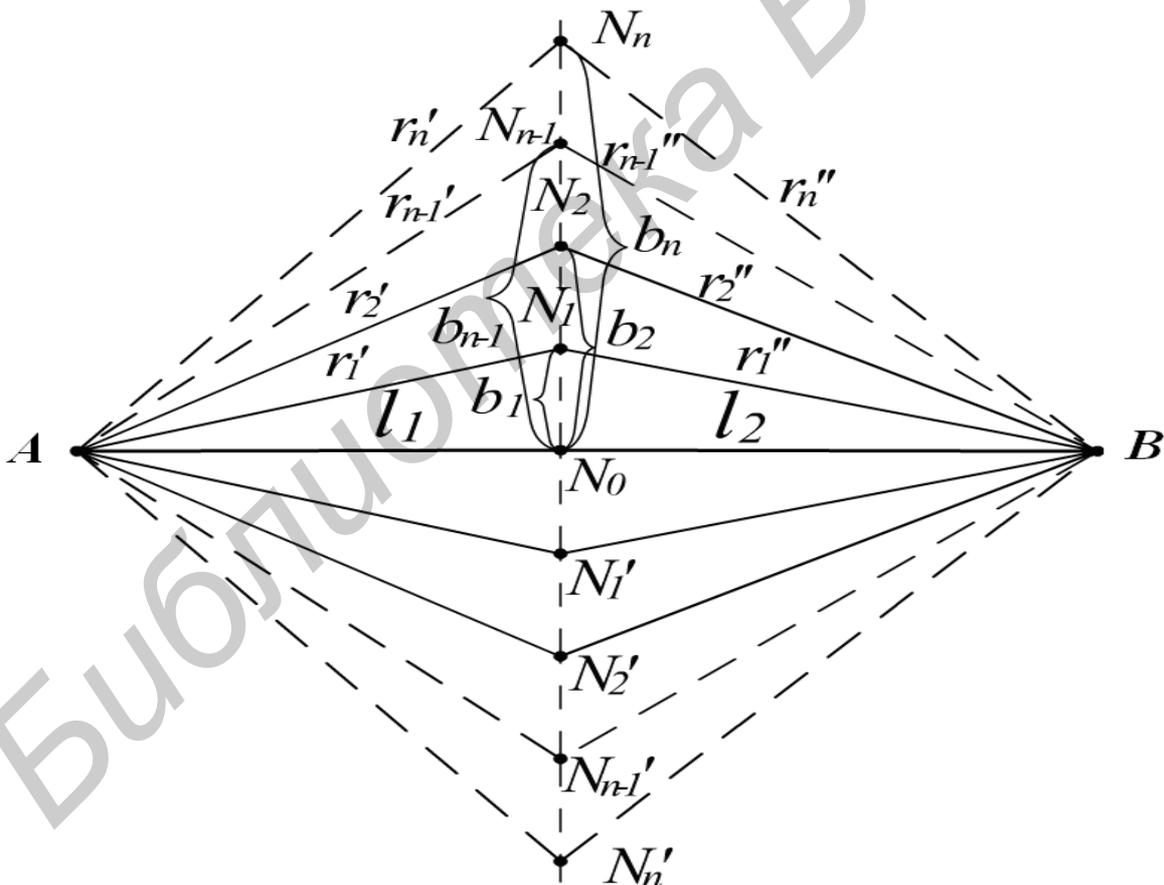


Рис. 4.41. Определение радиусов зон Френеля

Учитывая, что  $b_n \ll l_1$ ;  $b_n \ll l_2$ ; , выражение (4.187) можно разложить в ряд Тейлора и, ограничиваясь только двумя слагаемыми, записать

$$r'_n = l_1 \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{l_1^2}} \approx l_1 + \frac{b_n^2}{2l_1},$$

$$r''_n = l_2 \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{l_2^2}} \approx l_2 + \frac{b_n^2}{2l_2}.$$
(4.188)

Подставляя эти значения в (4.186), получим

$$l_1 + \frac{b_n^2}{2l_1} + l_2 + \frac{b_n^2}{2l_2} \approx l_1 + l_2 + n\lambda/2.$$
(4.189)

Откуда несложно определить радиус зоны Френеля:

$$b_n \approx \sqrt{\frac{nl_1l_2\lambda}{l_1 + l_2}}.$$
(4.190)

Из формулы (4.190) следует, что радиус зоны Френеля определяется произведением  $l_1$  и  $l_2$ , что можно интерпретировать как площадь прямоугольника при заданном значении полупериметра:  $l_1 + l_2 = \text{const}$ . В этом случае максимальной площадью обладает квадрат, т. е.  $l_1 = l_2$ . Следовательно, максимальный радиус соответствующей зоны Френеля расположен посередине трассы. Так как по определению  $r'_n + r''_n = l_1 + l_2 + n\lambda/2 = \text{const}$  характеризует геометрическое место точек, сумма расстояний которых есть величина постоянная, и область на плоскости представляет собой эллипс (рис. 4.42), то существенная для передачи энергии область пространства имеет форму эллипсоида вращения, ограниченного несколькими (обычно 5...7) пространственными зонами Френеля.

Помимо существенной области используется понятие минимальной зоны, определяемой как отверстие минимальной площади, при котором  $|\dot{\Phi}_{1/2}(u)| = 1$ . Это условие выполняется, если площадь первой зоны Френеля перекрыта на 1/3.

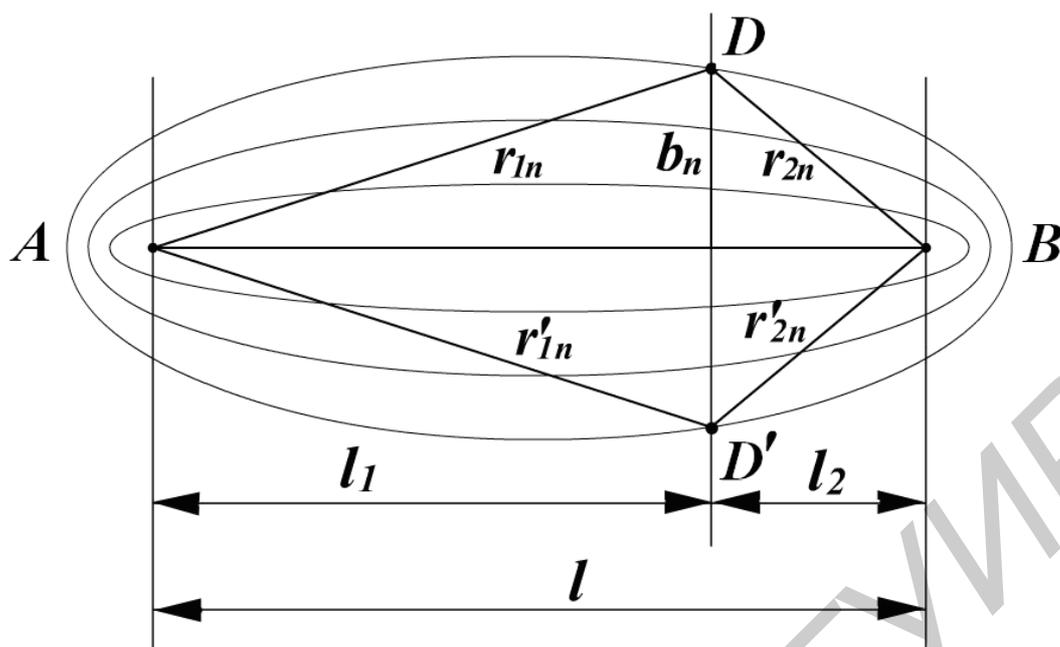


Рис. 4.42. Форма существенной области в плоскости линии терминалов

Как следует из (4.190), радиус существенной области при РРВ зависит от длины волны: с ее укорочением он уменьшается. Поэтому при переходе в оптический диапазон эллипсоид становится узким и вытянутым и напоминает «луч». Такое представление о луче лежит в основе метода геометрической оптики.

Таким образом, если в месте приема необходимо получить поле такой же величины, как в свободном пространстве, то на всем пути РРВ в первую зону Френеля не должны попадать препятствия и сторонние объекты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нефёдов, Е. И. Радиоэлектроника наших дней / Е. И. Нефёдов. – М. : Наука, 1986. – 192 с.
2. Гвоздев, В. И. О возможности использования принципов объемных интегральных схем СВЧ при создании сверхбыстродействующих ЦЭВМ / В. И. Гвоздев, Ю. В. Гуляев, Е. И. Нефёдов // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 290. – №2. – С. 343-345.
3. Гвоздев, В. И. Объемные интегральные схемы СВЧ / В. И. Гвоздев, Е. И. Нефёдов. – М. : Наука, 1985. – 255 с.
4. Электродинамические основы автоматизированного проектирования интегральных схем СВЧ / Е. И. Нефёдов [и др.] ; под ред. Е. И. Нефёдова. – М. : Изд. ИРЭ АН СССР, 1981. – 226 с.
5. Гридин, В. Н. Электродинамика структур крайне высоких частот / В. Н. Гридин, Е. И. Нефёдов, Т. Ю. Черникова. – М. : Наука, 2002. – 360 с.
6. Sophocles J. Orfanidis. Electromagnetic Waves and Antennas. Rutgers University / Sophocles J. Orfanidis. – April, 2003. – 819 p.
7. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
8. Бушминский, И. П. Технология гибридных интегральных схем СВЧ / И. П. Бушминский, Г. В. Морозов. – М. : Высш. шк., 1980. – 287 с.
9. Кураев, А. А. Электродинамика и распространение радиоволн / А. А. Кураев, Т. Л. Попкова, А. К. Сеницын. – Минск : Бестпринт, 2004 – 357 с.
10. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства : Метод. пособие для студ. спец. 45 01 02 «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения» днев. и вечерней форм обуч.: В 2 ч. Ч. 1 : Распространение радиоволн / Д. В. Гололобов, В. Б. Кирильчук. – Минск : БГУИР, 2003. – 124 с.
11. Смоленский, Г. А. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики / Г. А. Смоленский, Н. Н. Крайник. – М. : Наука, 1968. – 184 с.
12. Желудев, И. С. Электрические кристаллы / И. С. Желудев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1979. – 200 с.
13. Струков, Б. А. Сегнетоэлектричество / Б. А. Струков. – М. : Наука, 1979. – 94 с.
14. Барфут, Дж. Полярные диэлектрики и их применения / Дж. Барфут, Дж. Тейлор ; пер. с англ.; под ред. Л. А. Шувалова. – М. : Мир, 1981. – 561 с.
15. Лайнс, М. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы / М. Лайнс, А. Глас ; пер. с англ.; под ред. В. В. Леманова и Г. А. Смоленского. – М. : Мир, 1981. – 736 с.
16. Рез, И. С. Диэлектрики: Основные свойства и применения в электронике / И. С. Рез, Ю. М. Поплавко. – М. : Радио и связь, 1989. – 286 с.
17. Вонсовский, С. В. Магнетизм / С. В. Вонсовский. – М. : Наука, 1984. – 207 с.
18. Каганов, М. И. Природа магнетизма. / М. И. Каганов, В. М. Цукерник. – М. : Наука, 1982. – 192 с.

19. Белов, К. П. Магнетизм на земле и в космосе / К. П. Белов, Н. Г. Бочкарев. – М. : Наука, 1983. – 192с.

20. Никитин, С. А. Магнитные свойства редкоземельных металлов и их сплавов / С. А. Никитин. – М. : МГУ, 1989. – 248 с.

21. Никитин, С. А. Магнитные структуры в кристаллических и аморфных веществах // Физика. Соросовский образовательный журнал. –1996.– N11. – С. 87 – 95.

22. Херд, К. М. Многообразие видов магнитного упорядочения в твердых телах / К. М. Херд // Успехи физ. наук. – 1984. – Т. 142. – N2. – С. 331 – 335.

23. Золотухин, И. В. Физические свойства аморфных металлических материалов / И. В. Золотухин. – М. : Metallurgia, 1986. – 176 с.

24. Металлические стекла. Вып. 2 / пер. под ред. Г. Бека, Г. Гюнтеродта. – М. : Мир, 1986. – 456 с.

Библиотека БГУМР

*Учебное издание*

**Кирильчук Валерий Борисович**  
**Лихачевский Дмитрий Викторович**

**ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВЧ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

В 2-х частях

Часть 1

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Редактор *Т. П. Андрейченко*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная верстка и дизайн обложки *Ю. Ч. Ключкевич*

Подписано в печать 23.09.2011. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,04. Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 100 экз. Заказ 749.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.  
220013, Минск, П. Бровки, 6