ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Чеб Е. С.
Кафедра компьютерных технологий и систем, Факультет прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: cheb@bsu.by

Для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой композицию операторов первого порядка, в аналитическом виде методом характеристик строится классическое решение граничной задачи с условиями на функцию и ее первую производную и выводятся условия согласования входных данных.

При математическом моделировании физических процессов в теории упругости возникают уранения в частных производных четвертого порядка. Поэтому актуальным является корректная по Адамару постановка краевых задач для таких уравнений и аналитические представления решений в конкретных случаях.

Рассмотрим случай, когда оператор четвертого порядка представляет собой композицию операторов первого порядка, т. е. имеет вид

$$\mathcal{L}u = \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i\frac{\partial}{\partial x} + b_i\right)u(t,x) = f(t,x). \quad (1)$$

Поставим корректные по Адамару краевые задачи для (1) и укажем метод их решения. Применим метод характеристик построения классического решения. Суть данного метода заключается в следующем. Используя характеристики уравнения, построим общее решение уравнения, которое зависит от четырех функций. Для определения функций на области задлания используем начальные и граничные условия. В работе [1] таким методом построены классические решения граничных задач для гиперболического уравнения второго порядка. Подмечено, что вид граничных условий напрямую зависит от направления характеристик уравнения. Если характеристики уравнения разнонаправленные, то граничные условия задаются на всей границе, в противном случае лишь на ее части. Данная идея построения решения уже применялась к уравнению четвертого порядка с разделяющимся оператором специального вида. Так, в работе [2] методом характеристик построены классические решения граничных задач для уравнения (1), в случае, когда на коэффициенты уравнения налагаются условия $a_1 = -a_2 = a$, $a_3 = -a_4 = b$, $a \neq b$, $b_i = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. В данном случае уравнение (1) является биволновым и имеет четыре различные характеристики. Если же $a = b$, то (1) иммет кратные характеристики и назывется нестрого гиперболическим. В работе [3] для такого нестрого гиперболического уравнения построено решение и подмечено, что в этом случае повышаются требования на гладкость входных функций. В данной работе рассматривается случай нестрого гиперболического оператора при других ограничениях на коэффициенты уравнения (1). Перейдем к математической постановке задачи.

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to u(t,x)$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega = (0,l)$, рассматривается гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i\frac{\partial}{\partial x} + b_i\right)^2 u(t,x) = 0, \quad (2)$$

здесь $t > 0$, $x \in \Omega$, с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0,1,2,3. \quad (3)$$

Рассматривается случай, когда коэффициенты $a_1 \neq a_2$ и $b_1, b_2 > 0$.

Общее решение уравнения (2) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(t,x) = e^{-b_1 t}g_1(x + a_1 t) + te^{-b_1 t}g_2(x + a_1 t) + \\ + e^{-b_2 t}g_3(x + a_2 t) + te^{-b_2 t}g_4(x + a_2 t), \quad (4)$$

где g_1, g_2, g_3 и g_4 – любые функции из $C^4(\mathbb{R}^2)$. Требуется определить общий вид функций в представлении (4) при условии, что будут выполняться начальные (3) и некоторые граничные условия. При выборе граничных условий мы руководствуемся тем, чтобы соответствующая задача была корректно поставлена по Адамару, т. е. имела единственное решение в соответствующем классе функций, непрерывно зависящее от входных данных. Если $a_1 \neq a_2$, то для определенности будем считать, что $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $|a_1| < |a_2|$. Тогда для уравнения (2) рассматриваются граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t \in [0,\infty), \quad s = 0,2, \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t \in [0, \infty), \quad s = 0, 2. \qquad (6)$$

Требуется найти решение уравнения (2) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций, представимое в виде (4), где $g_1, g_2 : (-\infty, l] \in y \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $g_3, g_4 : (0, \infty] \in y \to g_{i+1}(y) \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, удовлетворяющее начальным условиям (3) и граничным условиям (5), (6).

Изначально функции $g_i, i = 1, 2, 3, 4$ определяются на промежутке $[0, l]$, удовлетворяя (4) начальным условиям (3). На оставшейся части области определения вид функций находится из граничных условий (5), (6). Рассматривая поочередно сначала условие (5), затем (6) построим на определенных области задания функций их представления. В процессе построения требуется непрерывность самих функций и их производных до четвертого порядка включительно в точках стыка отрезков. Тем самым выводятся условия согласования начальных и граничных функций. В случе, когда $b_1 = b_2 = 0$ они имеют вид

$$\left.\frac{d^j \mu_1(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(0), \frac{d^j \mu_2(t)}{dt^j}|_{t=0} = \varphi'_j(0), j = \overline{0,3}$$

$$\mu_1^{(4)}(0) = 2(a_1+a_2)\varphi'_3(0) - (a_1^2+4a_1a_2+a_2^2)\varphi_2"(0) +$$
$$+2a_1a_2(a_1+a_2)\varphi_1^{(3)}(0) - a_1^2a_2^2\varphi_0^{(4)}(0),$$
$$a_1\mu_2^{(4)}(0) - \mu_1^{(5)}(0) = -(a_1{}^2 + 2a_1a_2 + 3a_2^2)\varphi_3"(0) +$$
$$+(a_1{}^3 + 4a_1{}^2a_2 + 7a_1a_2^2 + 2a_2^3)\varphi_2^{(3)}(0) -$$
$$-a_1a_2(2a_1^2 + 5a_1a_2 + 4a_2^2)\varphi_1^{(4)}(0) +$$
$$+a_1a_2^2(a_1 + 2a_2)\varphi_0^{(5)}(0), \qquad (7)$$

$$\left.\frac{d^j \nu_1(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(l), \left.\frac{d^j \nu_2(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \varphi'_j(l), j = \overline{0,3},$$

$$\nu_1^{(4)}(0) = 2(a_1+a_2)\varphi'_3(l) - (a_1^2+4a_1a_2+a_2^2)\varphi_2"(l) +$$
$$+2a_1a_2(a_1+a_2)\varphi_1^{(3)}(l) - a_1^2a_2^2\varphi_0^{(4)}(l),$$
$$a_1\nu_2^{(4)}(0) - \nu_1^{(5)}(0) = -(a_1^2 + 2a_1a_2 + 3a_2^2)\varphi_3"(0) +$$
$$+(a_1^3 + 4a_1^2a_2 + 7a_1a_2^2 + 2a_2^3)\varphi_2^{(3)}(l) -$$
$$-a_1a_2(2a_1{}^2 + 5a_1a_2 + 4a_2{}^2)\varphi_1^{(4)}(l) +$$
$$+a_1a_2^2(a_1 + 2a_2)\varphi_0^{(5)}(l), \qquad (8)$$

Условия согласования получены в общем виде, но они имеют весьма громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся.

Теорема. *Предположим, что $b_1 = b_2 = 0$, функции $\varphi_0 \in C^{(5)}[0, l]$, $\varphi_1 \in C^{(4)}[0, l]$, $\varphi_2 \in C^{(3)}[0, l]$, $\varphi_3 \in C^{(2)}[0, l]$, $\mu_1, \nu_1 \in C^{(5)}[0, \infty)$, $\mu_2, \nu_2 \in C^{(4)}[0, \infty)$ и выполнены условия согласования (7), (8). Тогда в классе функций $C^{(4)}(\overline{Q})$ существует единственное решение задачи (2), (3), (5), (6).*

Пусть коэффициенты a_1 и a_2 одного знака. Для определенности будем считать $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $|a_1| < |a_2|$. В этом случае рассматриваются граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t \in [0, \infty), \quad s = 0, 2, \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t \in \Big[-\frac{l}{a_2}, \infty\Big), \quad s = 0, 2, \quad (10)$$

Отметим, что в этом случае граничные условия задаются не на всей границе, а лишь на части. Это обусловлено требованием корректности кревой задачи. Случаи задания граничных условий на части границы известен в литературе по гиперболическим уравнениям.

Аналогично, для задачи (2), (3), (9), (10) также методом характеристик построено классическое решение в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций и получены условия согласования начальных и граничных условий.

Все расчеты проведены с использованием средств компьютерной алгебры.

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка /В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, А. А.Карпечина //Труды ИМ НАНБ. - 2012. - Т.20, №.2. - С.64–67. // Труды ИМ НАН Беларуси. – 2010, - Т. 18, № 2. - С.36–54.
2. Корзюк, В. И. Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Труды ИМ НАН Беларуси. – 2010, - Т. 18, № 2. - С.36–54.
3. Корзюк, В. И. Решение первой смешанной задачи для нестрого биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Труды ИМ НАН Беларуси. – 2011, - Т. 55, № 4. - С.5–13.