МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В АЛГОРИТМЕ РАЗВЕРТКИ ДЛЯ ПОДСЧЕТА КОЛИЧЕСТВА S_N^2-ОРБИТ КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ

Липницкий В. А., Спичекова Н. В.
Кафедра высшей математики, Военная академия Республики Беларусь, кафедра высшей математики,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: valipnitski@yandex.ru, n.spichekova@gmail.com

Обсуждается использование методов динамического программирования для решения третьей проблемы Кэмерона по вычислению количества S_n^2-орбит квадратных $(0,1)-$ матриц.

Введение

Пусть P_n — множество всех квадратных $(0,1)-$ матриц порядка n, содержащих в точности n единиц. Такие матрицы возникают в дискретной математике, теории графов, теории групп и помехоустойчивом кодировании [1-5]. Мощность класса P_n стремительно растет с ростом n. Поэтому для эффективной работы со этим множеством следует выделять в P_n подклассы некоторым достаточно естественным образом. Приложения класса P_n показывают, что наибольший интерес для пользователей представляют классы эквивалентности — орбиты, — которые образуются под действием группы $S_n^2 = S_n \times S_n$ — квадрата симметрической группы S_n.

Группа подстановок S_n на n элементах находится в центре внимания исследователей с XVIII века [6]. Уже в XXI веке Питер Кэмерон привлек внимание исследователей к этой классической области исследования, сформулировав свои 27 проблем в теории подстановок [7]. Третья из них выглядит следующим образом:

«Найти общую формулу или алгоритм вычисления количества орбит α_n, на которые разбивается множество P_n под действием группы $G = S_n^2$».

В знак уважения вклада Питера Кэмерона в рассматриваемую область в дальнейшем матрицы множества P_n будем называть кэмероновскими.

Одним из возможных подходов к вычислению количества α_n орбит множества P_n является использование формулы Бёрнсайда, которая применительно к рассматриваемой задаче может быть переписана [8] в виде:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{l=1}^{(n!)^2} |Inv(g_l)|. \qquad (1)$$

(1) Здесь $|Inv(g)|$ — это количество матриц из множества P_n, инвариантных относительно действия элемента $g \in G = S_n^2$.

Непосредственное применение формулы (1) связано с перебором всех элементов группы $G = S_n^2$ и влечет за собой значительные вычислительные трудности. Для сокращения количества реально вычисляемых слагаемых формулы (1) могут быть применены идеи динамического программирования.

Динамическое программирование —это способ решения сложных задач путем разбиения их на более простые подзадачи, решения каждой из подзадач в отдельности и объединения решений подзадач в одно общее решение. В реальных задачах многие подзадачи одинаковы. В рамках динамического программирования каждая из подзадач решается только один раз, за счет чего происходит сокращение количества вычислений.

В данной работе излагается основанный на идеях динамического программирования метод вычисления количества S_n^2-орбит кэмероновских матриц. Все приводимые результаты получены авторами. Доказательства и вывод формул содержатся в [8].

I. Основная часть

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ a_{n(n-1)+1} & a_{n(n-1)+2} & \dots & a_{n_2} \end{pmatrix} \in P_n.$$

Тогда для $A \in P_n$ легко построить ее линейную развертку — представление A в виде одной вектор-строки $\bar{x_A} = (a_1, a_2, ..., a_{n^2})$ из векторного пространства размерностью n^2. Для произвольного элемента $g = (g_1, g_2) \in G = S_n^2$ выполняется:

$$g(A) = \begin{pmatrix} a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{m_n} \\ a_{m_{n+1}} & a_{m_{n+2}} & \dots & a_{m_{2n}} \\ a_{m_{n(n-1)+1}} & a_{m_{n(n-1)+2}} & \dots & a_{m_{n_2}} \end{pmatrix}$$

и элементу g можно поставить в соответствие подстановку

$$h(g) = \begin{pmatrix} \dots & m_1 & \dots & m_2 & \dots & m_{n^2} \\ \dots & 1 & \dots & 2 & \dots & n^2 \end{pmatrix},$$

называемую матричной подстановкой, построенной по элементу g Подстановка $h(g)$ допускает разложение в произведение независимых циклов:

$$h(g) = C_1 C_2 ... C_k \qquad (2)$$

Далее будем полагать, что разложение (2) содержит в том числе и все циклы длины 1. Матрица

$A \in Inv(g)$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A, соответствующие отдельному циклу C_j из разложения (2) подстановки $h(g)$, равны между собой, т.е. все равны 0 или все равны 1. Если матрица $A \in P_n$ принадлежит $Inv(g)$, а элементы 1 этой матрицы принадлежат только циклам с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_s$, длины которых соответственно равны $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_s}$, то в таком случае

$$l_{i_1} + l_{i_2} + \ldots + l_{i_s} = n. \qquad (3)$$

Поэтому если имеется полный список всех длин циклов

$$\{l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_k}\}, \qquad (4)$$

из равенства (2), то из чисел этого списка длин следует составить всевозможные, отличающиеся друг от друга хотя бы одним индексом, суммы (3). Количество таких сумм будет совпадать с величиной $|Inv(g)|$.

Зафиксируем n и подстановку $g \in G$. Пусть в равенстве (2) присутствуют все циклы, в том числе и длиной 1, пусть эти циклы упорядочены по возрастанию их длин так, что $l_1 \geq 1$, $l_i < l_j$ при $i < j$. В разложении (2) может встречаться достаточно много циклов одинаковой длины. Пусть в (2) присутствуют циклы t различных длин, $1 \leq t \leq k$. Пусть циклы $C_1, C_2, \ldots C_{i_1}$ имеют длину $l_1 = l_2 = \ldots = l_{i_1} \geq 1$, циклы $C_{i_1+1}, C_{i_1+2}, \ldots C_{i_2}$ имеют длину $l_{i_1+1} = l_{i_1+2} = \ldots = l_{i_2} > l_1$, и так далее, циклы $C_{i_{t-1}+1}, C_{i_{t-1}+2}, \ldots C_{i_t} = C_k$ имеют длину $l_{i_{t-1}+1} = l_{i_{t-1}+2} = \ldots = l_{i_t} = l_k > l_{t-1}$. Также детализируем обозначение элементов последовательности (4) символами $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1c_1}, \ldots, l_{i1}, l_{i2}, \ldots, l_{ic_i}, l_{s1}, l_{s2}, \ldots, l_{sc_s}$, где $l_{i1} = l_{i2} = \ldots = l_{ic_i}$, $1 \leq i < s \leq k$. Через L_i, $1 \leq i \leq k$ условимся обозначать множество $L_i = \{l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1c_1}, \ldots, l_{i1}, l_{i2}, \ldots, l_{ic_i}\}$ — часть циклов последовательности (4), длины которых находятся в пределах от 1 до i включительно.

Через $f_{i,j}$ обозначим количество способов представить число j в виде суммы, используя в качестве слагаемых только числа множества L_i, причем каждый элемент множества L_i может входить в упомянутую сумму не более одного раза. Будем полагать, что $f_{0,0} = 1$, $f_{i,0} = 1$, $i > 1$, $f_{0,j} = 0$, $j \neq 0$. Доказано, что $|Inv(g)| = f_{s,n}$, где s — это количество различных длин циклов в разложении (2), не превосходящих n. При этом справедлива формула

$$f_{i,j} = \sum_{q,j-ql_1 \geq 0} C_{c_i}^{q} f_{i-1,j-ql_1}. \qquad (5)$$

$|Inv(g)|$ оказывается одинаковым для всех подстановок $g \in S_n^2$, имеющих один и тот же цикленный тип (т.е. последовательность $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ мощностей множеств циклов длиной i, $1 \leq i \leq n$ в разложении подстановки g). Цикленный тип подстановки g определяется по цикленным типам подстановок $g_1, g_2 \in S_n$.

В силу результатов, изложенных выше, при вычислении правой части формулы (1) слагаемые, соответствующие подстановкам одного цикленного типа, можно вычислять только один раз, используя формулу (5). Сложность получаемого при этом алгоритма составляет $O(p^2(n)n^2log(n)$, здесь $p(n)$ — это число неупорядоченных разбиений числа n, т.е. количество способов представить n в виде суммы положительных целых чисел.

1. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М.: Наука, 1986. -– 384 с.
2. Оре, О. Теория графов / О. Оре. – М.: Наука, 1980. -– 336 с.
3. Самсонов, Б. Б. Теория информации и кодирование / Б. Б. Самсонов, Е. М. Плохов, А. И. Филоненков, Т. В. Кречет. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2002. -– 288 с.
4. Мак-Вильямс, Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – М.: Связь, 1979. -– 744 с.
5. Цветков, В. Ю. Предсказание, распознавание и формирование образов многоракурсных изображений с подвижных объектов / В. Ю. Цветков, В. К. Конопелько, В. А. Липницкий. – Мн.: Издательский центр БГУ, 2014. — 224 с.
6. Супруненко, Д. А. Группы подстановок / Д. А. Супруненко. – Мн.: Навука і тэхніка, 1996. -– 368 с.
7. Cameron, P. J. Problemsonpermutationgroups / / P. J. Cameron – [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.maths.qmul.ac.uk/ pjc/pgprob.html. -– Дата доступа: 07.02.2017.
8. Липницкий, В. А. Алгоритм развертки при подсчете количества орбит кэмероновских матриц . / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Вестик МГУ. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. –2017. – С. 23–37.