УДК 539.12

Е.М. Овсиюк[1], О.В. Веко[2], Я.А. Войнова[3], В.В. Кисель[4], В.М. Редьков[5]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина
[2]учитель физики гимназии г. Калинковичи
[3]учитель физики Качищанской средней школы Ельского района
[4]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
[5]д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

ЧАСТИЦА ДИРАКА С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА, ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Исследована задача о частице со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом (дополнительно учтено взаимодействие Паули) во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных задача сведена к дифференциальным уравнениям второго порядка для двух радиальных функций с одной регулярной особой точкой и двумя нерегулярными в $r = 0, \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса около точек $r = 0$ и $r = \infty$. По методу Пуанкаре – Перрона показана сходимость возникающих при этом степенных рядов с 5-членными рекуррентными соотношениями; ряды сходятся соответственно внутри и вне круга радиуса 1. На границе двух областей поведение решения вполне регулярное. Вычислены относительные коэффициенты в двух парах решений системы уравнений в зависимости от знака $\pm$ при параметре аномального магнитного момента. Развит еще один способ анализа системы, основанный на полученных дифференциальных уравнениях 4-го порядка, которые имеют в качестве особых точек только точки $r = 0$ и $r = \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса для этих уравнений около точки $r = 0$, возникающие степенные ряды с 7-членными рекуррентными соотношениями для коэффициентов сходятся согласно методу Пуанкаре – Перрона во всей области изменения переменной $r \in [0, \infty)$. Качественный анализ поведения эффективного обобщенного радиального импульса показывает, что финитные движения (т.е. связанные состояния) в такой системе возможны.

Введение

Общепринятым является использование простейших уравнений для фундаментальных частиц со спином 0, 1/2, 1. Между тем известно, что для этого могут быть также предложены уравнения, заданные в пространствах расширенных наборов неприводимых представлений собственной группы Лоренца [1–18]. Такие обобщенные (или расширенные) уравнения позволяют ввести в теорию более сложные объекты, обладающие помимо спина и массы некоторыми дополнительными физическими характеристиками, проявляющими себя в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей. Так, в частности, этот подход позволяет получить волновое уравнение (Петраш и др.) для частицы со спином S = 1/2, ненулевой массой и аномальным магнитным моментом.

В недавних работах [19–21] уравнение Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом было решено для случаев присутствия внешних однородного магнитного и однородного электрического полей. В настоящей работе исследуется задача о спинорной частице с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле; некоторые предварительные результаты были получены также в [23–25]. Используемый формализм позволяет легко выделить представляющий специальный интерес случай незаряженной частицы с аномальным магнитным моментом (нейтрон). В частности, в [23–25] для уравнения Дирака для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле были получены следующие результаты. После разделения переменных задача была приведена к дифференциальному уравнению второго порядка с двумя нерегулярными особыми точками ранга 2 (дважды вырожденному уравнению Гойна). Качественный анализ уравнений показывает, что связанные состояния для нейтрона в кулоновском поле могут существовать только при одном знаке величины аномального магнитного момента. В настоящей работе детально исследуется случай заряженной частицы (электрон) с аномальным магнитным моментом в кулоновском поле.

1. Разделение переменных

Уравнение Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом (в рамках подхода Петраша [3]) при использовании тетрадного формализма может быть представлено так [26]:

$$\left\{\gamma^c [\, i(e^{\beta}_{(c)}\partial_\beta + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{abc}\,) - \frac{e}{\hbar c}A_c\,] - i\lambda\frac{2e}{Mc^2}\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) - \frac{Mc}{\hbar}\right\}\Psi = 0\,. \qquad (1.1)$$

Отметим размерности входящих в уравнение величин:

$$[\frac{Mc}{\hbar}] = l^{-1}, \quad [\frac{e}{\hbar c}A] = l^{-1}, \quad [\frac{e}{\hbar c}F] = l^{-2}, \quad [\frac{eF}{Mc^2}] = l^{-1}; \qquad (1.2)$$

свободный параметр λ является безразмерным. С учетом равенств

$$A_t = -\frac{e}{r}, \quad F_{tr} = -\frac{e}{r^2}, \quad -i\lambda\frac{2e}{Mc^2}\sigma^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) = 2i\lambda\gamma^0\gamma^3\frac{e^2}{r^2}\frac{1}{Mc^2}$$

получаем следующее представление обобщенного уравнения Дирака (пусть $\Psi = r^{-1}\psi$):

$$\left(\gamma^0(i\partial_t - \frac{e}{c\hbar}A_t) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - \frac{Mc}{\hbar} + 2i\lambda\gamma^0\gamma^3\frac{e^2}{r^2}\frac{1}{Mc^2}\right)\psi = 0. \qquad (1.3)$$

Удобно использовать более простые обозначения:

$$\frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M\,, \quad \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}, \quad \frac{\varepsilon}{\hbar c} \Rightarrow \varepsilon, \quad 2\lambda\frac{e^2}{Mc^2} \Rightarrow \Gamma\,, \qquad (1.4)$$

тогда уравнение (1.3) запишется так:

$$\left(\gamma^0(i\partial_t - \frac{\alpha}{r}) + i\gamma^3\partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M + \frac{i\Gamma}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right)\psi = 0. \qquad (1.5)$$

Подстановка для волновой функции с использованием аппарата функций Вигнера [27] имеет вид [28]

$$\psi_{\varepsilon jm}(x) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r}\begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1/2} \\ f_2(r)D_{+1/2} \\ f_3(r)D_{-1/2} \\ f_4(r)D_{+1/2}\end{vmatrix}, \quad D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0). \qquad (1.6)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном представлении, получаем 4 радиальных уравнения:

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r})f_3 - i\frac{d}{dr}f_3 - i\frac{\nu}{r}f_4 - Mf_1 + \frac{i\Gamma}{r^2}f_1 = 0\,,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r})f_4 + i\frac{d}{dr}f_4 + i\frac{\nu}{r}f_3 - Mf_2 - \frac{i\Gamma}{r^2}f_2 = 0\,,$$

$$(\varepsilon + \frac{\alpha}{r})f_1 + i\frac{d}{dr}f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - Mf_3 - \frac{i\Gamma}{r^2}f_3 = 0\,,$$

$$(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})f_2-i\frac{d}{dr}f_2-i\frac{\nu}{r}f_1-Mf_4+\frac{i\Gamma}{r^2}f_4=0\,. \tag{1.7}$$

Уравнения допускают наложение условий [28], вытекающих из требования диагонализации оператора пространственной четности: $f_3=\delta f_2$, $f_4=\delta f_1$, $\delta=\pm 1$; в результате получаем систему из двух уравнений. Чтобы исключить присутствие мнимой единицы в уравнениях, вместо f_1 и f_2 используем другие комбинации функций:

$$f=(f_2+f_1),\, g=i(f_2-f_1)\,.$$

Так получим

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\frac{\delta\Gamma}{r^2})f+(\delta M+\varepsilon+\frac{\alpha}{r})g=0\,,\ (\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\frac{\delta\Gamma}{r^2})g+(\delta M-\varepsilon-\frac{\alpha}{r})f=0\,. \tag{1.8}$$

Отмечаем симметрию в этой системе:

$$g\to f,\quad \nu\to-\nu,\quad \Gamma\to-\Gamma,\quad \varepsilon\to-\varepsilon,\quad \alpha\to-\alpha\,. \tag{1.9}$$

Для определенности дальше будем анализировать случай $\delta=+1$:

$$(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{r}-\frac{\Gamma}{r^2})f+(M+\varepsilon+\frac{\alpha}{r})g=0\,,\quad (\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{r}+\frac{\Gamma}{r^2})g+(M-\varepsilon-\frac{\alpha}{r})f=0\,, \tag{1.10}$$

чтобы перейти ко второй возможности $\delta=-1$, достаточно сделать формальные замены: $M\Rightarrow -M$, $\Gamma\Rightarrow-\Gamma$. Из (1.10) находим уравнение второго порядка для функции $g(r)$:

$$\frac{d^2g}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r-e^2/(M-\varepsilon)}\right)\frac{dg}{dr}+$$
$$+\left(-M^2+\varepsilon^2-\frac{\Gamma^2}{r^4}+\frac{\Gamma(2\nu-1)}{r^3}+\frac{e^6-e^2\nu^2+\Gamma(M-\varepsilon)}{e^2r^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{M-\varepsilon}{e^2}\frac{\Gamma(M-\varepsilon)/e^2-\nu}{r-e^2/(M-\varepsilon)}+\frac{2e^6\varepsilon-e^2\nu(M-\varepsilon)+\Gamma(M-\varepsilon)^2}{e^4r}\right)g=0, \tag{1.11}$$

которое имеет три особые точки. Уравнение для $f(r)$ будет иметь похожий вид:

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+e^2/(M+\varepsilon)}\right)\frac{df}{dr}+$$
$$+\left(-M^2+\varepsilon^2-\frac{\Gamma^2}{r^4}+\frac{\Gamma(2\nu+1)}{r^3}+\frac{e^6-e^2\nu^2+\Gamma(M+\varepsilon)}{e^2r^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{M+\varepsilon}{e^2}\frac{\Gamma(M+\varepsilon)/e^2+\nu}{r+e^2/(M+\varepsilon)}+\frac{2e^6\varepsilon-e^2\nu(M+\varepsilon)-\Gamma(M+\varepsilon)^2}{e^4r}\right)f=0; \tag{1.12}$$

здесь также имеем три особые точки.

В уравнении (1.11) переходим к новой переменной x и вводим специальные обозначения:

$$x=\frac{r}{R}=\frac{r}{e^2/(M-\varepsilon)},\quad \frac{M-\varepsilon}{\alpha}=K,\quad \frac{M+\varepsilon}{\alpha}=L\,, \tag{1.13}$$

в результате получим уравнение в виде:

$$\frac{d^2g}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx}+\left(-\alpha^2\frac{L}{K}+\frac{\nu-\Gamma K}{x-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x}(\frac{2\alpha\varepsilon}{K}-\nu+\Gamma K)+\frac{\alpha^2-\nu^2+\Gamma K}{x^2}+\frac{\Gamma K(2\nu-1)}{x^3}-\frac{K^2\Gamma^2}{x^4}\right)g=0\,. \tag{1.14}$$

Сопутствующая функция f должна устанавливаться из соотношения

$$(\frac{d}{dx}-\frac{\nu}{x}+\frac{\Gamma K}{x^2})g+\alpha\frac{x-1}{x}f=0. \tag{1.15}$$

За основную можно выбрать и функцию $f(r)$; при этом нужно вводить другую переменную:

$$z=-\frac{r}{e^2/(M+\varepsilon)}=-rL, \qquad z=-\frac{L}{K}x. \tag{1.16}$$

Уравнение второго порядка для функции $f(z)$ имеет вид:

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{df}{dz}+\left(-\alpha^2\frac{K}{L}+\frac{-\nu-\Gamma L}{z-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{z}(\frac{-2\alpha\varepsilon}{L}+\nu+\Gamma L)+\frac{\alpha^2-\nu^2+\Gamma L}{z^2}-\frac{\Gamma L(2\nu+1)}{z^3}-\frac{L^2\Gamma^2}{z^4}\right)f=0. \tag{1.17}$$

Отмечаем простую симметрию между уравнениями для $g(x)$ и $f(z)$:

$$x\to z, \quad g(x)\to f(z), \quad \nu\to-\nu, \quad \Gamma\to-\Gamma, \quad L\to-K, \quad K\to-L. \tag{1.18}$$

Это позволяет ограничиться анализом одного уравнения, например, для $g(x)$, а результаты для второго находить с помощью формальных замен (1.18).

Отметим, что в исходном уравнении можно предельным переходом получить описание ситуации с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом [23–25]:

$$e^2\to 0, \quad \lambda\to\infty, \qquad e^2\lambda\to\Lambda=\text{const}; \tag{1.19}$$

параметр Λ теперь размерный. Этот случай будет исследован в другой работе.

2. Решения Фробениуса

Обратимся к общим математическим свойствам уравнения (1.17) для функции $g(x)$:

$$\frac{d^2g}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx}+\left(\frac{\nu-\Gamma K}{x-1}-\alpha^2\frac{L}{K}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x}(\frac{2\alpha\varepsilon}{K}-\nu+\Gamma K)+\frac{\alpha^2-\nu^2+\Gamma K}{x^2}+\frac{\Gamma K(2\nu-1)}{x^3}-\frac{K^2\Gamma^2}{x^4}\right]g=0, \tag{2.1}$$

где

$$x=\frac{r}{e^2/(M-\varepsilon)}, x\in(0,+\infty), \nu=j+\frac{1}{2}, \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}, \quad \frac{M-\varepsilon}{\alpha}=K, \frac{M+\varepsilon}{\alpha}=L; \tag{2.2}$$

связанным состояниям отвечают значения ε из интервала $0<\varepsilon<M$. Уравнение (2.1) имеет три особые точки: регулярную $x=1$ и две нерегулярные $x=0, x=\infty$ (обе ранга 2; [29, 30]), уравнение относится к типу $[1_1, 0_2, \infty_2]$. Для проведения анализа уравнения (2.1) перейдем к обобщенной записи:

$$\frac{d^2g}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx}+\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{A}{x-1}\right)g=0. \tag{2.3}$$

Отметим, что около регулярной сингулярности $x=1$ решение ведет себя так: $g(x)=(x-1)^\rho$, $\rho=0,2$. В соответствии с характером сингулярных точек будем искать локальные решения около точки $x=0$ в следующем виде: $g(x)=x^a e^{bx^{-1}}G(x)$; для функции $G(x)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2G}{dx^2}+\left(\frac{1+2a}{x}-\frac{2b}{x^2}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dG}{dx}+$$
$$+\left(A_0+\frac{A_1+a-b}{x}+\frac{A_2+a^2-b}{x^2}+\frac{A_3-2ab+b}{x^3}+\frac{A_4+b^2}{x^4}+\frac{A-a+b}{x-1}\right)G=0.$$

Накладываем ограничения $A_3-2ab+b=0$, $A_4+b^2=0$; отсюда находим две возможности (отмечаем, что $A_4=-K^2\Gamma^2<0$)

$$1,\qquad b_1=+\sqrt{-A_4},\quad a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{b}+1\right)=\frac{1}{2}\left(+\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}}+1\right);$$

$$2,\qquad b_2=-\sqrt{-A_4},\quad a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{b}+1\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}}+1\right). \tag{2.4}$$

В явном виде эти два линейно независимых решения строятся так:

$$g_1(x)=x^{\nu}e^{+K\Gamma/x}G_1(x),\qquad g_2(x)=x^{-\nu+1}e^{-K\Gamma/x}G_2(x); \tag{2.5}$$

конечным в нуле решениям (связанным состояниям) отвечают решения типа $g_1(x)$ (при $\Gamma<0$) и $g_2(x)$ (при $\Gamma>0$).

Уже отмечалось, что за основную можно выбрать и функцию $f(r)$, но при этом нужно вводить другую переменную z:

$$z=-\frac{L}{K}x,\quad x=-\frac{K}{L}z,\quad z\in(-\infty,0);$$

уравнение для $f(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{df}{dz}+\left(-\alpha^2\frac{K}{L}+\frac{-\nu-\Gamma L}{z-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{z}\left(\frac{-2\alpha\varepsilon}{L}+\nu+\Gamma L\right)+\frac{\alpha^2-\nu^2+\Gamma L}{z^2}-\frac{\Gamma L(2\nu+1)}{z^3}-\frac{L^2\Gamma^2}{z^4}\right)f=0, \tag{2.6}$$

или в краткой записи:

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{df}{dz}+\left(A'_0+\frac{A'_1}{z}+\frac{A'_2}{z^2}+\frac{A'_3}{z^3}+\frac{A'_4}{z^4}+\frac{A'}{z-1}\right)f=0. \tag{2.7}$$

Уравнения для $g(x)$ и $f(z)$ связаны преобразованием симметрии

$$x\to z,\quad g(x)\to f(z),\quad \nu\to-\nu,\quad \Gamma\to-\Gamma,\quad L\to-K,\quad K\to-L. \tag{2.8}$$

Поэтому без дополнительных ограничений вычислением можно описать структуру двух линейно независимых решений для функции $f(z)$:

$$f_1(z)=z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}F_1(z),\qquad f_2(z)=x^{\nu+1}e^{-L\Gamma/z}F_2(z). \tag{2.9}$$

Обращаемся к уравнению для функции $G(x)$ (следим сразу за двумя вариантами G_1,G_2):

$$\frac{d^2G}{dx^2}+\left(\frac{1+2a}{x}-\frac{2b}{x^2}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dG}{dx}++\left(A_0+\frac{A_1+a-b}{x}+\frac{A_2+a^2-b}{x^2}+\frac{A-a+b}{x-1}\right)G=0.$$

Удобно использовать сокращенную запись уравнения (2.10):

$$\frac{d^2G}{dx^2}+\left(\frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{x^2}+\frac{n_3}{x-1}\right)\frac{dG}{dx}+\left(m+\frac{m_1}{x}+\frac{m_2}{x^2}+\frac{m_3}{x-1}\right)G=0.$$

Умножим уравнение на $x^2(x-1)$:

$$x^3\frac{d^2G}{dx^2}-x^2\frac{d^2G}{dx^2}+[x^2(n_1+n_3)-x(n_1-n_2)-n_2]\frac{dG}{dx}+$$
$$+[x^3m-x^2m+x^2(m_1+m_3)-x(m_1-m_2)-m_2]G=0.$$

Будем строить решения уравнения в виде степенного ряда:

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\quad G'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1},\quad G''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}.$$

Из уравнения для $G(x)$ получаем:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)c_{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+$$
$$+(n_1+n_3)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)c_{n-1}x^n-(n_1-n_2)\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-n_2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+$$
$$+m\sum_{n=3}^{\infty}c_{n-3}x^n+(-m+m_1+m_3)\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n-(m_1-m_2)\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n-m_2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0.$$

Приравниваем нулю коэффициенты при всех степенях x^n:

$$n=0,\quad -n_2c_1-m_2c_0=0,$$
$$n=1,\quad -(n_1-n_2)c_1-n_2 2c_2-(m_1-m_2)c_0-m_2c_1=0,$$
$$n=2,\quad -2c_2+(n_1+n_3)c_1-(n_1-n_2)2c_2-n_2 3c_3+$$
$$+(-m+m_1+m_3)c_0-(m_1-m_2)c_1-m_2c_2=0,$$
$$n=3,\quad 2c_2-3\cdot 2c_3+(n_1+n_3)2c_2-(n_1-n_2)3c_3-n_2 4c_4+$$
$$+mc_0+(-m+m_1+m_3)c_1-(m_1-m_2)c_2-m_2c_3=0,$$

....

$n=4,5,6,\ldots$

$$(n-1)(n-2)c_{n-1}-n(n-1)c_n+$$
$$+(n_1+n_3)(n-1)c_{n-1}-(n_1-n_2)nc_n-n_2(n+1)c_{n+1}+$$
$$+mc_{n-3}+(-m+m_1+m_3)c_{n-2}-(m_1-m_2)c_{n-1}-m_2c_n=0.$$

Таким образом, приходим к 5-членным рекуррентным соотношениям

$n=4,5,6,\ldots$

$$mc_{n-3}+(-m+m_1+m_3)c_{n-2}+$$
$$+[(n-1)(n-2)+(n_1+n_3)(n-1)-(m_1-m_2)]c_{n-1}+$$
$$+[-n(n-1)-(n_1-n_2)n-m_2]c_n-n_2(n+1)c_{n+1}=0. \qquad (2.10)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре – Перрона [30]. Для этого разделим рекуррентное соотношение (2.10) на c_{n-3}:

$$m+(-m+m_1+m_3)\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}+$$
$$+[(n-1)(n-2)+(n_1+n_3)(n-1)-(m_1-m_2)]\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}+$$
$$+[-n(n-1)-(n_1-n_2)n-m_2]\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}-n_2(n+1)\frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{n-2}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}.=0.$$

Радиус сходимости степенного ряда R_{conv} – это величина, обратная к $|R|$:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_n}, \quad R_{conv} = \frac{1}{|R|}. \tag{2.11}$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для r, полученное равенство умножаем на n^{-2} и устремляем $n \to \infty$. В результате находим уравнение

$$R^2 - R^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0, \quad R = 1. \tag{2.12}$$

Следовательно, радиус сходимости ряда равен либо 1, либо бесконечности. Гарантированный радиус сходимости равен $R_{conv} = 1$ (до ближайшей особой точки в $x = 1$). В случае уравнения для функции $f(z)$ анализ полностью аналогичен.

Выполним аналогичное исследование локальных решений Фробениуса около точки $x = \infty$. Для этого возвратимся к уравнению (2.3):

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx} + \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \frac{A}{x-1}\right) g = 0;$$

установим вид этого уравнения в переменной $y = 1/x$:

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dy} = -y^2 \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = y^2 \frac{d}{dy} y^2 \frac{d}{dy} = y^4 \frac{d^2}{dy^2} + 2y^3 \frac{d}{dy}.$$

Уравнение преобразуется в следующее:

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y-1}\right)\frac{dg}{dy} + \left(A_4 + \frac{A_3 + A}{y} + \frac{A_2 + A}{y^2} + \frac{A_1 + A}{y^3} + \frac{A_0}{y^4} - \frac{A}{y-1}\right) g = 0;$$

вид уравнения означает, что точка $x = \infty$ ($y = 0$) является нерегулярной особенностью ранга 2. Делаем подстановку $G(y) = y^{\alpha} e^{\beta/y} G(y)$, уравнение для $G(y)$ имеет вид:

$$G'' + \left(\frac{2\alpha + 2}{y} - \frac{2\beta}{y^2} - \frac{1}{y-1}\right) G' + \left(A_4 + \frac{A_3 + A + \alpha - \beta}{y} + \frac{A_2 + A + \alpha(\alpha+1) - \beta}{y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_1 + A - 2\alpha\beta}{y^3} + \frac{A_0 + \beta^2}{y^4} + \frac{\beta - \alpha - A}{y-1}\right) G = 0. \tag{2.13}$$

Накладываем ограничения

$$A_1 + A - 2\alpha\beta = 0, \quad A_0 + \beta^2 = 0;$$

отсюда находим две возможности (отмечаем, что $A_0 = \varepsilon^2 - M^2 < 0$):

$$\beta_1 = +\sqrt{-A_0} = +\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(+\frac{A_1 + A}{\sqrt{-A_0}}\right) = +\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}; \tag{2.14}$$

$$\beta_2 = -\sqrt{-A_0} = -(\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{A_1 + A}{\sqrt{-A_0}}\right) = -\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}. \tag{2.15}$$

Учитывая, что исходная подстановка имеет вид

$$g = x^{-\alpha} e^{\beta x} G(y),$$

заключаем, что для описания связанных состояний годится только случай α_2, β_2:

$$g_2 = x^{\frac{\alpha\varepsilon/K}{\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}}} e^{-\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\, x} G_2(y). \tag{2.16}$$

При указанном выборе параметров α, β (в первую очередь, интересен относящийся к связанным состояниям случай α_2, β_2) уравнение для функции G упрощается (формально следим сразу за двумя вариантами):

$$\frac{d^2G}{dy^2}+\left(\frac{2\alpha+2}{y}-\frac{2\beta}{y^2}-\frac{1}{y-1}\right)\frac{dG}{dy}+$$
$$+\left(A_4+\frac{A_3+A+\alpha-\beta}{y}+\frac{A_2+A+\alpha(\alpha+1)-\beta}{y^2}+\frac{\beta-\alpha-A}{(y-1)}\right)G=0.$$

Удобно использовать сокращенную запись уравнения:

$$\frac{d^2G}{dy^2}+\left(\frac{N_1}{y}+\frac{N_2}{y^2}+\frac{N_3}{y-1}\right)\frac{dG}{dy}+\left(M+\frac{M_1}{y}+\frac{M_2}{y^2}+\frac{M_3}{y-1}\right)G=0.$$

Повторять заново проделанные выше вычисления при построении локальных решений Фробениуса около точки $r=0$ нет необходимости. Можно сразу воспользоваться полученными ранее результатами, изменив обозначения. В частности, приходим к 5-членным рекуррентным соотношениям:

$n=4,5,6,...$

$$Mc_{n-3}+(-M+M_1+M_3)c_{n-2}+$$
$$+[(n-1)(n-2)+(N_1+N_3)(n-1)-(M_1-M_2)]c_{n-1}+$$
$$+[-n(n-1)-(N_1-N_2)n-M_2]c_n-N_2(n+1)c_{n+1}=0. \qquad (2.17)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применяем метод Пуанкаре – Перрона [30]. Для этого разделим рекуррентное соотношение на c_{n-3}:

$$M+(-M+M_1+M_3)\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}+$$
$$+[(n-1)(n-2)+(N_1+N_3)(n-1)-(M_1-M_2)]\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}+$$
$$+[-n(n-1)-(N_1-N_2)n-M_2]\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}-N_2(n+1)\frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}.=0.$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для R, полученное равенство умножаем на n^{-2} и устремляем $n\to\infty$. В результате получим:

$$R^2-R^3=0 \quad\Rightarrow\quad R=0,\quad R=1. \qquad (2.18)$$

Следовательно, радиус сходимости ряда для функции $G(y)$ равен либо 1, либо бесконечности. Выбираем гарантированный радиус сходимости $R_{conv}(y)=1$.

Таким образом, локальные решения Фробениуса около точки $x=0$ гарантированно сходятся внутри круга радиуса 1, в то время как локальные решения Фробениуса около точки $x=\infty$ гарантированно сходятся в кольце $|x|\in(1,+\infty)$. На границе между двумя областями решения ведут себя следующим образом: $(x-1)^\rho,\quad \rho=0,\quad \rho=2$.

3. Вычисление относительных коэффициентов для функций $f-g$

Для функций $g(x)$ и $f(z)$ имеем по два решения:

$$g_1(x)=x^\nu e^{+K\Gamma/x}G_1(x),\qquad g_2(x)=x^{-\nu+1}e^{-K\Gamma/x}G_2(x),$$
$$f_1(z)=z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}F_1(z),\qquad f_2(z)=z^{\nu+1}e^{-L\Gamma/z}F_2(z). \qquad (3.1)$$

Вторая пара решений может быть преобразована к переменной x:

$$f_1(z)=(-\frac{L}{K}x)^{-\nu}e^{-K\Gamma/x}F_1(-\frac{L}{K}x),\quad f_2(z)=(-\frac{L}{K}x)^{\nu+1}e^{+K\Gamma/x}F_2(-\frac{L}{K}x). \qquad (3.2)$$

Сопоставляя полученные соотношения, заключаем, что в пары решений должны связываться следующие функции:

$$g_1(x)---\bar{f}_1(z)=Cf_2(z)\,,\qquad g_2(x)---\bar{f}_2(z)=Df_1(z)\,.$$

Будем из $g_1(x)$ находить выражение для $\bar{f}_1(z)$ – пользуемся уравнением

$$\left(-\frac{K}{L}\frac{d}{dx}+\nu\frac{K}{L}\frac{1}{x}-\frac{\Gamma K^2}{x^2}\right)g_1(x)=\alpha\left(\frac{K}{L}+\frac{1}{z}\right)Cf_2(z)\,.$$

После простого вычисления получаем

$$-\frac{K}{L}x^{\nu+1}e^{+K\Gamma/x}\,\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^n=\alpha(\frac{K}{L}+\frac{1}{z})C\,(-\frac{L}{K}x)^{\nu+1}e^{+K\Gamma/x}\,\sum_{n=0}^{\infty}c'_n(-\frac{L}{K}x)^n\,,$$

что после сокращения на общий множитель дает

$$-\frac{K}{L}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^{n-1}=\alpha C(\frac{K}{L}+\frac{1}{z})\,(-\frac{L}{K})^{\nu+1}e\sum_{n=0}^{\infty}c'_n(-\frac{L}{K})^n x^n\,.$$

Достаточно ограничиться учетом первых нескольких членов рядов (полагаем $c'_0=1$):

$$-\frac{K}{L}[\frac{c_1}{x}+c_2+c_3x+...]=(-1)^{\nu+1}\alpha C(\frac{L}{K})^{\nu}\,(1-\frac{1}{x})\,[c'_0-c'_1\frac{L}{K}x+c'_2\frac{L^2}{K^2}x^2+...]\,;$$

отсюда находим

$$-\frac{K}{L}[\frac{c_1}{x}+c_2+c_3x+...]=(-1)^{\nu+1}\alpha C(\frac{L}{K})^{\nu}\left[-\frac{1}{x}+(c'_0+c'_1\frac{L}{K})+(-c'_1\frac{L}{k}-c'_{2z}\frac{L^2}{K^2})+...\right].$$

Для установления коэффициента C достаточно воспользоваться членами x^{-1} – так находим

$$C=(-1)^{\nu+1}(K/L)^{\nu+1}\frac{c_1}{\alpha}\,. \tag{3.3}$$

Теперь установим относительный коэффициент для пары $g_2(x)--f_1(z)$. Исходим из уравнения

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}+\frac{\Gamma L}{z^2}\right)f_1-\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)Dg_2=0\,,$$

где $f_1(z)=z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}F_1(z),\quad g_2(x)=x^{-\nu+1}e^{-K\Gamma/x}G_2(x)$. Вычисляем

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}+\frac{\Gamma L}{z^2}\right)z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}F_1(z)=-\nu z^{-\nu-1}e^{+L\Gamma/z}F_1(z)-L\Gamma z^{-\nu-2}e^{+L\Gamma/z}F_1(z)+z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}F'_1(z)+$$

$$+\nu z^{-\nu-1}e^{+L\Gamma/z}F_1(z)+\Gamma L z^{-\nu-2}e^{+L\Gamma/z}F_1(z)=z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}\frac{d}{dz}F_1(z)\,;$$

т.е.

$$z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}\frac{d}{dz}F_1(z)=\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)D\,x^{-\nu+1}e^{-K\Gamma/x}G_2(x)\,,$$

или

$$z^{-\nu}e^{+L\Gamma/z}\frac{d}{dz}F_1(z)=\alpha\left(1-\frac{1}{z}\right)D\,(-\frac{K}{L}z)^{-\nu+1}e^{+L\Gamma/z}G_2(-\frac{K}{L}z)\,;$$

значит

$$\frac{d}{dz}F_1(z)=\alpha D\,(-\frac{K}{L})^{-\nu+1}\,(z-1)G_2(-\frac{K}{L}z)\,. \tag{3.4}$$

Отсюда, учитывая структуру двух рядов:

$$F_1(z)=(1+c'_1z+c'_2z^2+...)\,,\quad G_2(x)=[1+c_1(-\frac{K}{L}z)+c_2(-\frac{K}{L}z)^2+...]\,,$$

получаем

$$c'_1 + 2c'_2 z + ... = (-1)^{-\nu+1} \alpha D (\frac{K}{L})^{-\nu} [-1 + (1 + c_1 \frac{K}{L}) Z + ...];$$

относительный коэффициент D должен удовлетворять равенству

$$c'_1 = (-1)^{-\nu} \alpha D (\frac{K}{L})^{-\nu} \quad \Rightarrow \quad D = (-1)^{\nu} (K/L)^{\nu} \frac{c'_1}{\alpha}. \tag{3.5}$$

Таким образом, имеем два линейно независимых решения:

$$\{ g_1(x), Cf_2(z) \}, \quad \text{где} \quad C = (-1)^{\nu+1} (\frac{K}{L})^{\nu+1} \frac{c_1}{\alpha}; \tag{3.6}$$

$$\{ g_2(x), Df_1(z) \}, \quad \text{где} \quad D = (-1)^{\nu} (\frac{K}{L})^{\nu} \frac{c'_1}{\alpha}. \tag{3.7}$$

Из этих двух решений связанным состояниям отвечает в зависимости от знака параметра Γ только одна пара: либо $g_1(z) - Cf_2(z)$, либо $g_2(z) - Df_1(z)$.

4. Сведение задачи к анализу уравнения 4-го порядка

Можно развить другой способ анализа и привести задачу к уравнению 4-го порядка только с двумя особыми точками. Запишем уравнения для функций f_1, f_2

$$[i\frac{d}{dr} + (\varepsilon + \frac{\alpha}{r})] f_1 + [i\frac{\nu}{r} - \delta(M + \frac{i\Gamma}{r^2})] f_2 = 0,$$

$$[i\frac{d}{dr} - (\varepsilon + \frac{\alpha}{r})] f_2 + [i\frac{\nu}{r} + \delta(M - \frac{i\Gamma}{r^2})] f_1 = 0; \tag{4.1}$$

с использованием обозначений

$$\hat{a} = i\frac{d}{dr} + (\varepsilon + \frac{e^2}{r}), \quad \hat{b} = i\frac{d}{dr} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})$$

их можно представить в другом виде:

$$\hat{a} f_1 - \delta(M - i\delta\frac{\nu}{r} + i\frac{\Gamma}{r^2}) f_2 = 0, \quad \hat{b} f_2 + \delta(M + i\delta\frac{\nu}{r} - \frac{i\Gamma}{r^2}) f_1 = 0. \tag{4.2}$$

На первое уравнение в (4.2) действуем оператором $\hat{b}$, а на второе – оператором $\hat{a}$; получаем

$$\hat{b}\hat{a} f_1 + \delta(M - i\delta\frac{\nu}{r} + i\frac{\Gamma}{r^2})\delta(M + i\delta\frac{\nu}{r} - i\frac{\Gamma}{r^2}) f_1 + \delta(\delta\frac{\nu}{r^2} - \frac{2\Gamma}{r^3}) f_2 = 0,$$

$$\hat{a}\hat{b} f_2 + \delta(M + i\delta\frac{\nu}{r} - i\frac{\Gamma}{r^2})\delta(M - i\delta\frac{\nu}{r} + i\frac{\Gamma}{r^2}) f_2 + i\delta(-i\delta\frac{\nu}{r^2} + i\frac{2\Gamma}{r^3}) f_1 = 0.$$

Таким образом, получаем систему

$$\hat{b}\hat{a} f_1 + [M^2 + (\delta\frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2] f_1 + (\frac{\nu}{r^2} - \delta\frac{2\Gamma}{r^3}) f_2 = 0,$$

$$\hat{a}\hat{b} f_2 + [M^2 + (\delta\frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2] f_2 + (\frac{\nu}{r^2} - \delta\frac{2\Gamma}{r^3}) f_1 = 0. \tag{4.3}$$

Учитываем равенства

$$\hat{a}\hat{b} = -\frac{d^2}{dr^2} + i\frac{e^2}{r^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2, \quad \hat{b}\hat{a} = -\frac{d^2}{dr^2} - i\frac{e^2}{r^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2,$$

тогда уравнения приводим к виду

$$[-\frac{d^2}{dr^2} - (\varepsilon + \frac{e^2}{r})^2 + M^2 + (\delta\frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2})^2] f_1 + (-i\frac{e^2}{r^2} f_1 + \frac{\nu}{r^2} f_2) - 2\delta\frac{\Gamma}{r^3} f_2 = 0,$$

$$[-\frac{d^2}{dr^2}-(\varepsilon+\frac{e^2}{r})^2+M^2+(\delta\frac{\nu}{r}-\frac{\Gamma}{r^2})^2]f_2+(+\frac{\nu}{r^2}f_1+i\frac{e^2}{r^2}f_2)-2\delta\frac{\Gamma}{r^3}f_1=0\,. \qquad (4.4)$$

Если перейти к компонентам $F_1=f_1+f_2, \quad F_2=i(f_2-f_1)$, то система (4.4) дает:

$$[-\frac{d^2}{dr^2}-(\varepsilon+\frac{e^2}{r})^2+M^2+(\frac{\nu}{r}-\frac{\delta\Gamma}{r^2})^2+\frac{\nu}{r^2}-2\frac{\delta\Gamma}{r^3}]F_1+\frac{e^2}{r^2}F_2=0\,,$$

$$[-\frac{d^2}{dr^2}-(\varepsilon+\frac{e^2}{r})^2+M^2+(\frac{\nu}{r}-\frac{\delta\Gamma}{r^2})^2-\frac{\nu}{r^2}+2\frac{\delta\Gamma}{r^3}]F_2-\frac{e^2}{r^2}F_1=0\,. \qquad (4.5)$$

Пусть для определенности $\delta=+1$:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}-(\varepsilon+\frac{e^2}{r})^2+M^2+(\frac{\nu}{r}-\frac{\Gamma}{r^2})^2+\frac{\nu}{r^2}-2\frac{\Gamma}{r^3}\right)F_1+\frac{e^2}{r^2}F_2=0\,,$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}-(\varepsilon+\frac{e^2}{r})^2+M^2+(\frac{\nu}{r}-\frac{\Gamma}{r^2})^2-\frac{\nu}{r^2}+2\frac{\Gamma}{r^3}\right)F_2-\frac{e^2}{r^2}F_1=0\,. \qquad (4.6)$$

Сингулярными здесь являются только две точки $r=0,\infty$, и нет дополнительной сингулярности в физически ничем не мотивированной точке r_0.

5. Анализ уравнения 4-го порядка с двумя сингулярными точкам

Из (4.6) следует уравнение 4-го порядка для F_2:

$$\frac{d^4F_2}{dr^4}+\frac{4}{r}\frac{d^3F_2}{dr^3}+\left[-2M^2+2\varepsilon^2+\frac{4e^2\varepsilon}{r}+\frac{2(e^4-\nu^2+1)}{r^2}+\frac{4\Gamma\nu}{r^3}-\frac{2\Gamma^2}{r^4}\right]\frac{d^2F_2}{dr^2}+$$

$$+\left[\frac{4(\varepsilon^2-M^2)}{r}+\frac{4e^2\varepsilon}{r^2}-\frac{4\Gamma(\nu-1)}{r^4}+\frac{4\Gamma^2}{r^5}\right]\frac{dF_2}{dr}+$$

$$+\Bigg[\left(M^2-\varepsilon^2\right)^2-\frac{4e^2\varepsilon\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r}+\frac{-2M^2e^4+6e^4\varepsilon^2+2M^2\nu^2-2\nu^2\varepsilon^2-2M^2+2\varepsilon^2}{r^2}+$$

$$+\frac{4e^6\varepsilon-4e^2\nu^2\varepsilon-4\Gamma M^2\nu+4\Gamma\nu\varepsilon^2}{r^3}+\frac{e^8-2e^4\nu^2+8\Gamma e^2\nu\varepsilon+2\Gamma^2M^2-2\Gamma^2\varepsilon^2+e^4+\nu^4-\nu^2}{r^4}-$$

$$-\frac{4\Gamma\left(-e^4\nu+\Gamma e^2\varepsilon+\nu^3-2\nu+1\right)}{r^5}-\frac{2\Gamma^2\left(e^4-3\nu^2+5\right)}{r^6}-\frac{4\Gamma^3\nu}{r^7}+\frac{\Gamma^4}{r^8}\Bigg]F_2=0. \qquad (5.1)$$

Следует обратить внимание на то, что это уравнение 4-го порядка имеет особенности только в двух точках: $r=0,\infty$. Уравнение 4-го порядка для функции F_1 выглядит аналогично и получается из приведенного с использованием замен:

$$F_2\Rightarrow F_1, \qquad \Gamma\Rightarrow-\Gamma, \qquad \nu\Rightarrow-\nu\,.$$

Представим два уравнения (для F_2 и F_1) в обобщенной форме так:

$$\frac{d^4F}{dr^4}+\frac{d}{r}\frac{d^3F}{dr^3}+(a_0+\frac{a_1}{r}+...\frac{a_4}{r^4})\frac{d^2F}{dr^2}+(b_0+\frac{b_1}{r}+...\frac{a_5}{r^5})\frac{dF}{dr}+(c_0+\frac{c_1}{r}+...+\frac{c_8}{r^8})F=0\,.$$

Ищем решение в следующем виде $F=r^Ae^{B/r}f(r)$, получаем выражения для производных:

$$F'=r^Ae^{B/r}\left(\frac{A}{r}f-\frac{B}{r^2}f+f'\right),$$

$$F'' = r^A e^{B/r}\left\{\left(\frac{A(A-1)}{r^2} - \frac{BA + B(A-2)}{r^3} + \frac{B^2}{r^4}\right) f + \left(\frac{2A}{r} - \frac{2B}{r^2}\right) f' + f''\right\},$$

$$\begin{aligned} F''' = r^A e^{B/r}\Bigg\{\Bigg(&\frac{A^3 - 3A^2 + 2A}{r^3} + \frac{9AB - 3A^2B - 6B}{r^4} + \frac{3AB^2 - 6B^2}{r^5} - \frac{B^3}{r^6}\Bigg) f + \\ &+\left(\frac{3A^2 - 3A}{r^2} + \frac{-6BA + 6B}{r^3} + \frac{3B^2}{r^4}\right) f' + \left(\frac{3A}{r} - \frac{3B}{r^2}\right) f'' + f'''\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'''' = r^A e^{B/r}\Bigg\{ & f'''' + \left[\frac{4A}{r} - \frac{4B}{r^2}\right] f''' + \left[\frac{6A(A-1)}{r^2} - \frac{12B(A-1)}{r^3} + \frac{6B^2}{r^4}\right] f'' + \\ & + \left[\frac{12B^2(A-2)}{r^5} - \frac{4B^3}{r^6} + \frac{4A\left(A^2 - 3A + 2\right)}{r^3} - \frac{12B\left(A^2 - 3A + 2\right)}{r^4}\right] f' + \\ & + \Bigg[\frac{A\left(A^3 - 6A^2 + 11A - 6\right)}{r^4} - \frac{4B\left(A^3 - 6A^2 + 11A - 6\right)}{r^5} + \\ & + \frac{6B^2\left(A^2 - 5A + 6\right)}{r^6} + \frac{B^4}{r^8} - \frac{4B^3(A-3)}{r^7}\Bigg] f\Bigg\}. \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в уравнение 4-го порядка и находим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 f}{dr^4} + \left[-\frac{4B}{r^2} + \frac{4(1+A)}{r}\right]\frac{d^3 f}{dr^3} + \\ & + \left[-2(M^2 - \varepsilon^2) + \frac{4e^2\varepsilon}{r} + \frac{2e^4 - 2\nu^2 + 2 + 6A(1+A)}{r^2} + \frac{-12AB + 4\Gamma\nu}{r^3} + \frac{6B^2 - 2\Gamma^2}{r^4}\right]\frac{d^2 f}{dr^2} + \\ & + \Bigg[-\frac{\left(4M^2 - \varepsilon^2\right)(1+A)}{r} + \frac{4e^2\varepsilon(2A+1) - 4B\left(-M^2 + \varepsilon^2\right)}{r^2} + \frac{4Ae^4 - 8Be^2\varepsilon + 4A^3 - 4A\nu^2}{r^3} + \\ & + \frac{-4e^4B - 12A^2B + 8\Gamma\nu A + 4B\nu^2 + 12AB - 4B - 4\Gamma(\nu - 1)}{r^4} + \\ & + \frac{12AB^2 - 4A\Gamma^2 - 8B\Gamma\nu - 12B^2 + 4\Gamma^2}{r^5} - \frac{4B\left(B^2 - \Gamma^2\right)}{r^6}\Bigg]\frac{df}{dr} + \\ & + \Bigg[\left(M^2 - \varepsilon^2\right)^2 - \frac{4e^2\varepsilon\left(M^2 - \varepsilon^2\right)}{r} + \frac{2\left(3e^4 + A(1+A) - \nu^2 + 1\right)\varepsilon^2 - 2M^2\left(e^4 + A(1+A) - \nu^2 + 1\right)}{r^2} + \\ & + \frac{4e^6\varepsilon + 4A^2e^2\varepsilon - 4e^2\nu^2\varepsilon + 4AB(M^2 - \varepsilon^2) - 4\Gamma\nu(M^2 - \varepsilon^2)}{r^3} + \\ & + \frac{1}{r^4}\Big[A^4 - 2A^3 + \left(2e^4 - 2\nu^2 + 1\right)A^2 + \left(-8Be^2\varepsilon - 2e^4 + 2\nu^2\right)A + \\ & + e^8 - \left(2\nu^2 - 1\right)e^4 + 4\varepsilon(2\Gamma\nu + B)e^2 + \nu^2\left(\nu^2 - 1\right) - 2\left(M^2 - \varepsilon^2\right)\left(B^2 - \Gamma^2\right)\Big] + \\ & + \frac{1}{r^5}\Big[4B^2e^2\varepsilon - 4(A-1)\left(e^4 + A^2 - \nu^2 - 2A + 1\right)B + \end{aligned}$$

$$+4\left(A^2\nu-\left(2\nu-1\right)A+e^4\nu-\Gamma e^2\varepsilon-\nu^3+2\nu-1\right)\Gamma\Big]+$$

$$+\frac{\left(2e^4+6A^2-2\nu^2-18A+14\right)B^2-8\left(A\nu-3/2\nu+1/2\right)\Gamma B-2\Gamma^2\left(e^4+A^2-3\nu^2-3A+5\right)}{r^6}-$$

$$-4\frac{\left(\left(A-2\right)B-\Gamma\nu\right)\left(B^2-\Gamma^2\right)}{r^7}+\frac{\left(B^2-\Gamma^2\right)^2}{r^8}\Bigg]f=0. \qquad (5.2)$$

Отмечаем: при $B=\pm\Gamma$ члены со степенями r^{-8}, r^{-7} исчезают. Пусть $B=+\Gamma$, тогда, приравнивая к нулю коэффициент при степени r^{-6}, получим:

$$\left(2e^4+6A^2-2\nu^2-18A+14\right)\Gamma^2-8\left(A\nu-3/2\nu+1/2\right)\Gamma^2-2\Gamma^2\left(e^4+A^2-3\nu^2-3A+5\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\Gamma^2(A-\nu)(A-\nu-3)=0 \quad \Rightarrow \quad A=\nu, \nu+3. \qquad (5.3)$$

Пусть $B=-\Gamma$, тогда для A найдем:

$$A=-\nu+1, -\nu+2. \qquad (5.4)$$

Таким образом, появляется возможность построить 4 линейно независимых решения:

$$F_i(r)=r^{A_i}e^{B_i r^{-1}}f_i(r), \quad i=1,2,3,4;$$

$$B_1=-\Gamma, A_1=-\nu+1, \quad B_2=-\Gamma, \quad A_2=-\nu+2,$$

$$B_3=+\Gamma, A_3=\nu, \quad B_4=+\Gamma, \quad A_4=\nu+3. \qquad (5.5)$$

При $\Gamma>0$ для описания связанных состояний интерес представляют случаи 1 и 2; при $\Gamma<0$ для описания связанных состояний интерес представляют случаи 3 и 4. Для определенности рассмотрим варианты 1 и 2.

Пусть $B_1=-\Gamma, \quad A_1=-\nu+1$:

$$\frac{df_1^4}{dr^4}+\left[\frac{4(2-\nu)}{r}+\frac{4\Gamma}{r^2}\right]\frac{df_1^3}{dr^3}+$$

$$+\left[-2(M^2-\varepsilon^2)+\frac{4e^2\varepsilon}{r}+\frac{2e^4+4\nu^2-18\nu+14}{r^2}-\frac{4\Gamma\left(2\nu-3\right)}{r^3}+\frac{4\Gamma^2}{r^4}\right]\frac{d^2f_1}{dr^2}+$$

$$+\Bigg[\frac{4\left(\nu-2\right)\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r}+\frac{-4e^2\varepsilon\left(2\nu-3\right)-4\Gamma\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r^2}+$$

$$+\frac{-4e^4\nu+8\Gamma e^2\varepsilon+4e^4+8\nu^2-12\nu+4}{r^3}+\frac{4\Gamma\left(e^4-2\nu+2\right)}{r^4}\Bigg]\frac{df_1}{dr}+$$

$$+\Bigg[\left(M^2-\varepsilon^2\right)^2-\frac{4e^2\varepsilon\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r}+\frac{\left(6e^4-6\nu+6\right)\varepsilon^2-2M^2\left(e^4-3\nu+3\right)}{r^2}+$$

$$+\frac{4e^6\varepsilon-8e^2\varepsilon\nu-4\Gamma M^2+4\Gamma\varepsilon^2+4e^2\varepsilon}{r^3}+\frac{e^2\left(e^6-2e^2\nu+4\Gamma\varepsilon+e^2\right)}{r^4}\Bigg]f_1=0. \qquad (5.6)$$

Пусть $B_2=-\Gamma, \quad A_2=-\nu+2$:

$$\frac{df_2^4}{dr^4}+\left[\frac{4(3-\nu)}{r}+\frac{4\Gamma}{r^2}\right]\frac{df_2^3}{dr^3}+$$

$$+\left[-2(M^2-\varepsilon^2)+\frac{4e^2\varepsilon}{r}+\frac{2e^4+4\nu^2-30\nu+38}{r^2}-\frac{8\Gamma(-3+\nu)}{r^3}+\frac{4\Gamma^2}{r^4}\right]\frac{df_2^2}{dr^2}+$$

$$+\left[\frac{4\left(M^2-\varepsilon^2\right)(-3+\nu)}{r}+\frac{-4e^2\varepsilon(2\nu-5)-4\Gamma\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{-4e^4\nu+8\Gamma e^2\varepsilon+8e^4+16\nu^2-48\nu+32}{r^3}+\frac{4\Gamma\left(e^4-6\nu+8\right)}{r^4}+\frac{8\Gamma^2}{r^5}\right]\frac{df_2}{dr}+$$

$$+\left[\left(M^2-\varepsilon^2\right)^2-\frac{4e^2\varepsilon\left(M^2-\varepsilon^2\right)}{r}+\frac{\left(6e^4-10\nu+14\right)\varepsilon^2-2M^2\left(e^4-5\nu+7\right)}{r^2}+\right.$$

$$+\frac{4e^6\varepsilon-16e^2\varepsilon\nu-8\Gamma M^2+8\Gamma\varepsilon^2+16e^2\varepsilon}{r^3}+$$

$$\left.+\frac{e^8-6e^4\nu+12\Gamma e^2\varepsilon+5e^4+8\nu^2-12\nu+4}{r^4}+\frac{4\Gamma\left(e^4-2\nu+2\right)}{r^5}\right]f_2=0. \qquad (5.7)$$

Вводим обозначения коэффициентов в виде букв (можно следить за обоими вариантами):

$$f''''+(\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2})f'''+(b_0+\frac{b_1}{r}+...\frac{b_4}{r^4})f''+(\frac{c_1}{r}+...\frac{c_5}{r^5})f'+(d_0+\frac{d_1}{r}+...\frac{d_5}{r^5})f=0\,. \qquad (5.8)$$

Будем строить решения в виде степенного ряда

$$f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n r^n,\qquad f'(r)=\sum_{n=1}^{\infty}nD_n r^{n-1}\,,$$

$$f''(r)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)D_n r^{n-2},\qquad f'''(r)=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)D_n r^{n-3}\,,$$

$$f''''(r)=\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)D_n r^{n-4}\,. \qquad (5.9)$$

Подставляя эти ряды в уравнение 4-го порядка, получим

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)D_n r^{n-4}+\left(\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)D_n r^{n-3}+$$

$$+\left(b_0+\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\frac{b_4}{r^4}\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)D_n r^{n-2}+\left(c_0+\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\frac{c_3}{r^3}+\frac{c_4}{r^4}+\frac{c_5}{r^5}\right)\sum_{n=1}^{\infty}nD_n r^{n-1}+$$

$$+\left(d_0+\frac{d_1}{r}+\frac{d_2}{r^2}+\frac{d_3}{r^3}+\frac{d_4}{r^4}+\frac{d_5}{r^5}\right)\sum_{n=0}^{\infty}D_n r^n=0.$$

Раскрывая скобки, после простых преобразований приходим к уравнению на результирующий степенной ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_5\,(k+1)D_{k+1}r^k+\sum_{k=0}^{\infty}d_5\,D_k r^k+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}b_4\,(k+1)kD_{k+1}r^k+\sum_{k=1}^{\infty}c_4\,kD_k r^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_4\,D_{k-1}r^k+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}b_3\,k(k-1)D_k r^k+\sum_{k=2}^{\infty}c_3\,(k-1)D_{k-1}r^k+\sum_{k=2}^{\infty}d_3\,D_{k-2}r^k+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty} a_2\, k(k-1)(k-2)D_k r^k + \sum_{k=3}^{\infty} b_2\,(k-1)(k-2)D_{k-1}r^k + \sum_{k=3}^{\infty} c_2\,(k-2)D_{k-2}r^k + \sum_{k=3}^{\infty} d_2\, D_{k-3}r^k +$$

$$+\sum_{k=4}^{\infty} a_1\,(k-1)(k-2)(k-3)D_{k-1}r^k + \sum_{k=4}^{\infty} b_1\,(k-2)(k-3)D_{k-2}r^k + \sum_{k=4}^{\infty} c_1\,(k-3)D_{k-3}r^k + +\sum_{k=4}^{\infty} d_1\, D_{k-4}r^k +$$

$$+\sum_{k=5}^{\infty} (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)D_{k-1}r^k + \sum_{k=5}^{\infty} b_0\,(k-3)(k-4)D_{k-3}r^k +$$

$$+\sum_{k=5}^{\infty} c_0\,(k-4)D_{k-4}r^k + \sum_{k=5}^{\infty} d_0\, D_{k-5}r^k = 0.$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r^k:

$$k=0, \qquad c_5\, D_1 + d_5\, D_0 = 0\,,$$

$$k=1, \qquad c_5\, 2D_2 + d_5\, D_1 + b_4\, 2D_2 + c_4\, D_1 + d_4\, D_0 = 0,$$

$$k=2, \qquad c_5\, 3D_3 + d_5\, D_2 + b_4\, 3\cdot 2D_3 + c_4\, 2D_2 + d_4\, D_1 + b_3\, 2D_2 + c_3\, D_1 + d_3\, D_0 = 0\,,$$

$$k=3, \qquad c_5\, 4D_4 + d_5\, D_3 + b_4\, 4\cdot 3D_4 + c_4\, 3D_3 + d_4\, D_2 +$$

$$+b_3\, 3\cdot 2D_3 + c_3\, 2D_2 + d_3\, D_1 + a_2\, 3\cdot 2\cdot 1D_3 + b_2\, 2\cdot 1D_2 + c_2\, D_1 + d_2\, D_0 r^k = 0\,,$$

$$k=4, \qquad c_5\, 5D_5 + d_5\, D_4 + b_4\, 5\cdot 4D_5 + c_4\, 4D_4 + d_4\, D_3 + b_3\, 4\cdot 3D_4 + c_3\, 3D_3 + d_3\, D_2 +$$

$$+a_2\, 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1D_4 + b_2\, 3\cdot 2\cdot 1D_3 + c_2\, 2D_2 + d_2\, D_1 + a_1\, 3\cdot 2\cdot 1D_3 + b_1\, 2\cdot 1D_2 + c_1\, D_1 + d_1\, D_0 r^k;$$

$k = 5, 6, \ldots.$

$$c_5\,(k+1)D_{k+1} + d_5\, D_k + b_4\,(k+1)kD_{k+1} + c_4\, kD_k + d_4\, D_{k-1} +$$

$$+b_3\, k(k-1)D_k + c_3\,(k-1)D_{k-1} + d_3\, D_{k-2} +$$

$$+a_2\, k(k-1)(k-2)D_k + b_2\,(k-1)(k-2)D_{k-1} + c_2\,(k-2)D_{k-2} + d_2\, D_{k-3} +$$

$$+a_1\,(k-1)(k-2)(k-3)D_{k-1} + b_1\,(k-2)(k-3)D_{k-2} + c_1\,(k-3)D_{k-3} + +d_1\, D_{k-4} +$$

$$+(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)D_{k-1} + b_0\,(k-3)(k-4)D_{k-3} +$$

$$+c_0\,(k-4)D_{k-4} + d_0\, D_{k-5} = 0. \qquad (5.10)$$

Таким образом, степенной ряд характеризуется 7-членными рекуррентными соотношениями:

$$\{\, D_{k-5}, D_{k-4}, \quad ,......, \quad D_k, D_{k+1} \,\} \qquad (k = 5, 6, 7, \ldots)\,.$$

Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре – Перрона. Для этого получим алгебраическое уравнение для величины, определяющей возможные радиусы сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{D_{k-4}}{D_{k-5}}, \qquad R_{conv} = \frac{1}{|\,R\,|}\,. \qquad (5.11)$$

Для величины R находим следующее алгебраическое уравнение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{k^4} \frac{D_{k-1}}{D_{k-2}} \frac{D_{k-2}}{D_{k-3}} \frac{D_{k-3}}{D_{k-4}} \frac{D_{k-4}}{D_{k-5}} = R^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{conv} = \infty\,.$$

Заключение

Исследована задача о частице со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом (дополнительно учтено взаимодействие Паули) во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных задача сведена к дифференциальным уравнениям второго порядка для двух радиальных функций с одной регулярной особой точкой и двумя нерегулярными в $r = 0, \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса около точек $r = 0$ и $r = \infty$. По методу Пуанкаре – Перрона показана сходимость возникающих при этом степенных рядов с 5-членными рекуррентными соотношениями; ряды сходятся соответственно внутри и вне круга радиуса 1. На границе двух областей поведение решения вполне регулярное. Вычислены относительные коэффициенты в двух парах решений системы уравнений в зависимости от знака $\pm$ при параметре аномального магнитного момента. Развит еще один способ анализа системы, основанный на полученных дифференциальных уравнениях 4-го порядка, которые имеют в качестве особых точек только точки $r = 0$ и $r = \infty$ ранга 2. Построены локальные решения Фробениуса для этих уравнений около точки $r = 0$, возникающие степенные ряды с 7-членными рекуррентными соотношениями для коэффициентов сходятся согласно методу Пуанкаре – Перрона во всей области изменения переменной $r \in [0, \infty)$. Качественный анализ поведения эффективного обобщенного радиального импульса показывает, что финитные движения (т.е. связанные состояния) в этой системе возможны.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20. – С. 27–38.
2. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В. Я. Файнберг // Тр. Физ. ин-та АН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
3. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czehc. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
4. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином 1/2 / И. Улегла // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.
5. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – №. 6. – С. 81–88; Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83; Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85; Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 1 // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
6. Capri, A. Z. Nonuniqueness of the spin 1/2 equation / A. Z. Capri // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178. – № 5. – P. 1811–1815; First-order wave equations for half-odd-integral spin // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178. – P. 2427–2433; Electromagnetic properties of a new spin-1/2 field // Progr. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 48. – P. 1364–1374.
7. Shamaly, A. First-order wave equations for integral spin / A. Shamaly, A. Z. Capri // Nuovo Cimento. B. – 1971. – Vol. 2. – P. 235–253; Unified theories for massive spin 1 fields // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51. – P. 1467–1470.
8. Khalil, M. A. K. Properties of a 20-component spin 1/2 relativictic wave equation / M. A. K. Khalil // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15. – P. 1532–1539; Barnacle equivalence structure in relativistic wave equation // Progr. Theor. Phys. – 1978. – Vol. 60. – P. 1559–1579; An equivalence of relativistic field equations // Nuovo Cimento. A. – 1978. – Vol. 45. – P. 389–404; Reducible relativistic wave equations // J. Phys. A. Math. and Gen. – 1979. – Vol. 12. – P. 649–663.
9. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

10. Богуш, А. А. Уравнения с кратными представлениями группы Лоренца и взаимодействие типа Паули / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1979. – № 3. – С. 61–65; Описание свободной частицы различными волновыми уравнениями // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28, № 8. – С. 702–705; Уравнение для частицы со спином 1/2, обладающей аномальным магнитным моментом // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

11. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности / Ин-т физики АН БССР. – Минск, 1981. – С. 81–90.

12. Богуш, А. А. Об интерпретации дополнительных компонент волновых функций при электромагнитном взаимодействии / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 277, № 2. – С. 343–346.

13. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

14. Kisel, V. V. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a curved space-time, non-relativistic approximation / V. V. Kisel, N. G. Tokarevskaya, V. M. Red’kov // Proceedings of 11-th International School and Conference «Foundation and Advances in Nonlinear Science» ; eds.: V. I. Kuvshinov, G. G. Krylov. – Minsk, 2004. – P. 36–42.

15. Petras Theory of a Spin-1/2 Particle in Electromagnetic and Gravitational Fields [Electronic resource] / A. A. Bogush [and al.] // ArXiv.org. – 18 Apr 2006. – arXiv:hep-th/0604109. – 44 p.

16. Kisel, V. V. Relativistic wave equations with extended sets of representations : Kandid. dissertation / V. V. Kisel. – Minsk, 1984.

17. Kisel, V. V. Shamaly-Capri equation and additional interaction of a vector particle with gravitational field / V. V. Kisel, V. M. Red’kov // Covariant methods in theoretical physics. Elementary particles physics and relativity theory / Institute of Physics, NAS of Belarus. – Minsk, 2001. – P. 107–112.

18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

19. Кисель, В. В. Частица Дирака с аномальным магнитным моментом во внешнем магнитном поле, построение решений методом квадрирования / В. В. Кисель, Я. А. Войнова, В. М. Редьков // Proceedings of the IX International Conference «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai – Gauss – Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 nov. 2015 / Ed. by Yu. Kurochkin, V. Red’kov. – Minsk, 2015. – P. 431–440.

20. Квантовая механика электрона в магнитном поле, учет аномального магнитного момента / Е. М. Овсиюк [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 4. – С. 67–73.

21. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk [and al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.

22. Частица со спином 1/2 и аномальным моментом в однородном электрическом поле / Е. М. Овсиюк [и др.] // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 22–28.

23. Veko, O. V. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in the Coulomb field / O. V. Veko, Y. A. Voynoa, E. M. Ovsiyuk // XXIII International Seminar «Nonlinear Phenomena in Complex Systems», Minsk, May 24–27, 2016.

24. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in external fields (uniform magnetic and electric, or Coloumb): exact solutions and physical effects / E. M. Ovsiyuk

[and al.] // The X-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems DGDS-2016, Mangalia, Romania, 28 August – 3 September 2016.

25. Веко, О. В. Частица со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом в кулоновском поле / О. В. Веко, Я. А. Войнова, Е. М. Овсиюк // Вес. НАНБ. Сер. фiз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 48–56.

26. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.

27. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 385 с.

28. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск, 2011. – 339 с.

29. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000.

30. Heun's differential equation / A. Ronveaux (ed.). – Oxford : Oxford University Press, 1995.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.02.2017

Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Y.A., Kisel V.V., Red'kov V.M. **Dirac Particle with Anomalous Magnetic Moment, Properties of Exact Solutions in the Coulomb Field**

The problem of a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment – the Pauli interaction is taken into account – in presence of external Coulomb field is studied. After separation of the variables the task is reduced to 2-nd order differential equations for two functions, with one regular singularity and two irregular singularities at $r = 0, \infty$ *of the rank 2. Local Frobenius solutions near the points* $r = 0$ *and* $r = \infty$ *are constructed. By Poincaré – Perrone method, convergence of arising power series with 5-term recurrent formulas for coefficients is proved; the series converge inside and outside of the circle of the radius 1; on the boundary of two domains behavior of the solutions is quite regular. The relative coefficients for two pairs of solutions are found, depending on the sign* $\pm$ *at the parameter of anomalous moment either one or other pair is appropriate to describe bound states in the system. An additional method to examine the problem is developed which is based on deriver two of 4-th order differential equations – they have onto two singular points, irregular and of the rank 2 in* $r = 0$ *and* $r = \infty$. *Its Frobenius solutions near the points* $r = 0$ *are constructed, and their convergence arising power series is proved in the whole interval* $r \in [0, \infty)$. *Qualitative analysis shows existence of finite motions (bound states) in the system under consideration.*