МАТЕМАТИКА

УДК 519.85

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВПОЛНЕ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

О.И. Костюкова[1], **М.В. Кулагина**[2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

OPTIMALITY CRITERION FOR SEMI-INFINITE PROGRAMMING PROBLEMS WITH FAITHFULLY CONVEX CONSTRAINT FUNCTIONS

O.I. Kostyukova[1], **M.V. Kulahina**[2]

[1]*Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Рассматриваются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов и вполне выпуклыми функциями ограничений. Для указанного класса задач формулируется и доказывается явный критерий оптимальности. Проводится сравнительный анализ данного критерия с известными ранее условиями оптимальности. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: *полубесконечное программирование*, *выпуклое программирование*, *неподвижный индекс*, *порядок неподвижности*, *вполне выпуклость*.

Convex semi-infinite programming problem with polyhedral index sets and faithfully convex constraint functions are considered. An explicit optimality criterion is formulated and proved for the given class of problems. A comparative analysis of this criterion with known optimality conditions is performed. An illustrative example is presented.

Keywords: *semi-infinite programming*, *convex programming*, *immobile index*, *immobility order*, *faithfully convex function*.

Введение

Полубесконечное программирование в последнее время является областью активных исследований [1], [2]. К задачам полубесконечного программирования относятся задачи нахождения экстремума некоторой функции с конечным числом переменных на множестве, заданном бесконечным числом ограничений.

Условия оптимальности являются одним из основных вопросов при исследовании задач полубесконечной оптимизации [3], [4]. Большинство известных условий оптимальности для полубесконечного программирования предполагают выполнение некоторых условий регулярности [5], [6]. Однако хорошо известно, что эти условия могут нарушаться. Поэтому актуальной является проблема получения условий оптимальности при выполнении наиболее слабых условий регулярности либо вообще без них.

В [7] был предложен подход для исследования задач полубесконечной оптимизации, который позволяет свести проверку оптимальности заданного допустимого плана в задаче полубесконечного программирования к его проверке на оптимальность во вспомогательной задаче нелинейного программирования. На основе данного подхода в [8] был сформулирован и доказан неявный критерий оптимальности для выпуклых задач полубесконечного программирования.

В статье рассматривается случай, когда ограничения задачи полубесконечного программирования являются вполне выпуклыми. Понятие вполне выпуклой функции было введено Роккафеллором [9]. Исследуются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Учитывая вполне выпуклость функции ограничений данной задачи, формулируется явный критерий оптимальности, не требующий выполнения известных условий регулярности. Приводится пример применения данного критерия оптимальности. Анализируется взаимосвязь полученного критерия оптимальности для задачи полубесконечного программирования с вполне выпуклыми функциями ограничений с уже известными условиями оптимальности.

1 Постановка задачи, необходимые определения и обозначения

Рассмотрим задачу полубесконечного программирования вида

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c(x) \tag{1.1}$$

$$f(x,t)\le 0,\ \forall t\in T,$$

где

$$T=\{t\in\mathbb{R}^s : h_k^T t\le \Delta h_k,\ k\in K\}$$

– ограниченный многогранник, содержащий более одного элемента, K – конечное множество индексов, вектора $h_k \in \mathbb{R}^s$ и числа $\Delta h_k, k \in K,$ заданы, функции $f(x,t)$ для каждого $t \in T$ и $c(x)$ выпуклые по $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f(x,t)$ достаточно гладкая по t и x и функция $c(x)$ достаточно гладкая по x.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Любой вектор – вектор-столбец; если $r(t) \in \mathbb{R},$ то $\dfrac{\partial r(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^s$ – вектор-столбец; если $r(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец, то $\dfrac{\partial r(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^{s \times m},$ а $\dfrac{\partial r^T(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^{m \times s}$. Здесь и далее символ ^{T} означает транспонирование.

Обозначим через X множество допустимых планов задачи (1.1):

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x,t) \le 0, \forall t \in T\}.$$

Для данного $t \in T$ обозначим через $K_a(t) \subset K$ множество активных ограничений в t:

$$K_a(t) = \{k \in K : h_k^T t = \Delta h_k\}$$

и через $L(t)$ – множество допустимых направлений для индекса t в T:

$$L(t) := \{l \in \mathbb{R}^s : h_k^T l \le 0, k \in K_a(t)\}. \qquad (1.3)$$

Для данного $x \in X$ обозначим через $T_a(x) \subset T$ множество активных индексов в x:

$$T_a(x) = \{t \in T : f(x,t) = 0\}.$$

Введем согласно работе [7] следующие определения:

***Определение* 1.1.** *Индекс $t \in T$ называется неподвижным в задаче* (1.1), *если* $f(x,t) = 0,$ $\forall x \in X$.

Обозначим через T^* множество всех неподвижных индексов задачи (1.1).

***Определение* 1.2** *Будем говорить, что неподвижный индекс $t \in T^*$ имеет порядок неподвижности $q(t,l) \in \{0,1,...\},$ вдоль допустимого направления $l \in L(t), l \ne 0,$ если*

$$1^0 \left.\frac{d^i f(x,t+\alpha l)}{d\alpha^i}\right|_{\alpha=+0} = 0, \forall x \in X, i = 0,...,q(t,l);$$

2^0 *существует вектор $\tilde{x} = x(t,l) \in X$ такой, что* $\left.\dfrac{d^{q(t,l)+1} f(\tilde{x},t+\alpha l)}{d\alpha^{(q(t,l)+1)}}\right|_{\alpha=+0} \ne 0.$

Здесь предполагаем, что

$$\left.\frac{d^0 f(x,t+\alpha l)}{d\alpha^0}\right|_{\alpha=+0} = f(x,t).$$

***Предположение* 1.1** *Предположим, что* $X \ne 0$ и $q(t,l) \le 1, l \in L(t) \setminus \{0\}, \forall t \in T^*$.

Согласно работе [8] из Предположения 1.1 следует, что множество индексов T^* состоит из конечного числа элементов. Следовательно, множество T^* допускает представление

$$T^* = \{t_j, j \in J_*\},$$

где J_* – некоторое конечное множество индексов.

Для каждого $t \in T$ множество допустимых направлений, определенное в (1.3), может быть представлено в следующем виде:

$$L(t) = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i \in P(t)} \beta_i b_i(t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in I(t)} \alpha_i a_i(t), \alpha_i \ge 0, i \in I(t) \right\},$$

где вектора $b_i(t), i \in P(t)$ – двунаправленные лучи, $a_i(t), i \in I(t)$ – однонаправленные лучи, $P(t)$ и $I(t)$ – конечные множества индексов. В работе [10] изложен алгоритм построения векторов $b_i(t), i \in P(t),$ $a_i(t), i \in I(t),$ и множеств $P(t)$ и $I(t)$ для любого $t \in T$.

В [11] был описан и обоснован алгоритм построения неподвижных точек $T^* = \{t_j, j \in J_*\}$ и их порядков неподвижности для задачи (1.1). Поэтому далее считаем, что известны: множество неподвижных индексов, вектора и множества $a_i(j) := a_i(t_j),$ $i \in I(j) := I(t_j),$ $b_i(j) := b_i(t_j),$ $i \in P(j) := P(t_j), j \in J_*,$ и порядки неподвижности $q(t_j, a_i(t_j)), i \in I(t_j), j \in J_*,$ вдоль допустимых направлений $a_i(t_j), i \in I(t_j), j \in J_*$.

Обозначим

$$I_0(j) = \{i \in I(j) : q(t_j, a_i(j)) = 1\}, \quad I_*(j) = I(j) \setminus I_0(j),$$

$$L_j^0 = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i \in P(j)} \beta_i b_i(j) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i \in I_0(j)} \alpha_i a_i(j), \alpha_i \ge 0, i \in I_0(j) \right\},$$

$$B(j) = (b_i(j), i \in P(j), a_i(j), i \in I_0(j))^T, \ j \in J_*.$$

Следующую теорему сформулируем, основываясь на работе [12]:

***Теорема* 1.1.** *Пусть для выпуклой задачи* (1.1) *выполняется Предположение* 1.1. *Тогда допустимый план $x^0 \in X$ является оптимальным для задачи* (1.1) *тогда и только тогда, когда существуют конечные наборы активных индексов $\{t_j, j \in J^{**}\} \subset T_a(x^0) \setminus T^*$, и допустимых направлений*

$$l_{ji} \in L_j^0, i = 1,...,d_j, \ j \in J_*, \left|J^{**}\right| + \sum_{j \in J_*} d_j \le n,$$

такие, что вектор x^0 является оптимальным для вспомогательной задачи

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c(x), \qquad (1.4)$$

$$f(x,t_j) = 0, \ B(j)\frac{\partial f(x,t_j)}{\partial t} = 0, \ j \in J_*, \ x \in G, \qquad (1.5)$$

где

$$G=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{\partial f^T(x,t_j)}{\partial t}a_i(j)\le 0,\ i\in I_*(j),\right.$$

$$l_{ji}^T\frac{\partial^2 f(x,t_j)}{\partial t^2}l_{ji}\le 0,\ i=\overline{1,d_j},\ j\in J_*,$$

$$\left.f(x,t_j)\le 0,\ j\in J^{**}\right\}.$$

Задача (1.4)–(1.5) – задача выпуклого программирования с конечным числом ограничений.

Из данной теоремы следует, что проверку оптимальности некоторого допустимого плана в задаче (1.1) можно свести к проверке оптимальности данного плана в задаче (1.4)–(1.5).

Целью данного исследования является формулировка явного критерия оптимальности для задачи (1.1) в случае, когда функция ограничений вполне выпуклая по $x\in\mathbb{R}^n$.

2 Вполне выпуклость

Согласно работе [9] введем понятие вполне выпуклой функции.

***Определение* 2.1.** *Говорят, что выпуклая функция $g(x)$ является вполне выпуклой по $x\in\mathbb{R}^n$, когда для нее выполняется следующее условие: если она линейна на некотором интервале, то она линейна и на всей прямой, содержащей данный интервал.*

В [9] было показано, что функция $g(x)$ вполне выпукла по $x\in\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$g(x)=\psi(z(x))+w^Tx+\beta,\ \ z(x)=Ax+v,$$

где $\psi(z):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ – строго выпуклая по z функция, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $v\in\mathbb{R}^m$, $w\in\mathbb{R}^n$, $\beta\in\mathbb{R}$.

***Предположение* 2.1.** *Предположим, что функция ограничений $f(x,t),x\in\mathbb{R}^n,t\in T$ задачи* (1.1) *допускает представление*

$$f(x,t)=\psi(t,z(x,t))+w(t)^Tx+\beta(t),\quad z(x,t)=A(t)x+v(t), \tag{2.1}$$

где функция $\psi(t,z):\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ является строго выпуклой по z функцией при любом $t\in T$, функции $A(t),v(t),w(t),\beta(t)$, $\psi(t,z)$ достаточно гладкие по t, функция $\psi(t,z)$ достаточно гладкая по z.

Из Предположения 2.1 следует, что функция $f(x,t),t\in T$, будет вполне выпукла по $x\in\mathbb{R}^n$.

***Утверждение* 2.1.** *Пусть выполняется Предположение* 2.1, *$\tilde{Y}\subset\mathbb{R}^n$ – некоторое выпуклое множество, $\overline{t}\in T$. Тогда условие*

$$f(x,\overline{t})=0,\ \forall x\in\tilde{Y}, \tag{2.2}$$

эквивалентно условию

$$A(\overline{t})x+v(\overline{t})=\overline{z},\quad w(\overline{t})^Tx=-\beta(\overline{t})-\overline{\psi},\ \forall x\in\tilde{Y}, \tag{2.3}$$

где

$$\overline{z}=z(\overline{x},\overline{t})=A(\overline{t})\overline{x}+v(\overline{t}),\quad \overline{\psi}=\psi(\overline{t},\overline{z}), \tag{2.4}$$

$\overline{x}$ *– некоторый вектор из $\tilde{Y}$, а условие*

$$B\frac{\partial f(x,\overline{t})}{\partial t}=0,\ \forall x\in\tilde{Y}, \tag{2.5}$$

при выполнении (2.2), *эквивалентно условию*

$$B(\overline{Q}^Tx+\overline{u})=0,\forall x\in\tilde{Y}, \tag{2.6}$$

где B – некоторая матрица размерности $\overline{m}\times s$,

$$\overline{Q}=Q(\overline{t},\overline{z})=\sum_{r=1}^m\overline{\nu}_r\frac{\partial A_r(\overline{t})}{\partial t}+\frac{\partial w^T(\overline{t})}{\partial t},$$

$A_r(\overline{t})$ – r-я строка матрицы $A(\overline{t})$,

$$\overline{u}=u(\overline{t},\overline{z})=\overline{\varphi}+\frac{\partial v(\overline{t})}{\partial t}\overline{\nu}+\frac{\partial\beta(\overline{t})}{\partial t}, \tag{2.7}$$

$$\overline{\varphi}=\varphi(\overline{t},\overline{z})=\frac{\partial\psi(\overline{t},\overline{z})}{\partial t},$$

$$\overline{\nu}_r=\nu_r(\overline{t},\overline{z})=\frac{\partial\psi(\overline{t},\overline{z})}{\partial z_r},$$

$$r=\overline{1,m},\ \overline{\nu}=\overline{\nu}(\overline{t},\overline{z})=(\overline{\nu}_r,r=\overline{1,m})^T.$$

Доказательство. Докажем вначале эквивалентность соотношений (2.2) и (2.3).

Пусть выполняется соотношение (2.2). Перепишем его в следующем виде

$$\psi(\overline{t},z(x,\overline{t}))=-(w(\overline{t})^Tx+\beta(\overline{t})),\quad z(x,\overline{t})=A(\overline{t})x+v(\overline{t}),\forall x\in\tilde{Y}. \tag{2.8}$$

Покажем, что $z(x,\overline{t})=const,\ \forall x\in\tilde{Y}$. Предположим противное, т. е. $\exists x_1,x_2\in\tilde{Y}$ такие, что $z(x_1,\overline{t})\ne z(x_2,\overline{t})$.

Рассмотрим функции $x(\lambda)=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\tilde{Y}$ и

$$z(x(\lambda),\overline{t}):=A(\overline{t})x(\lambda)+v(\overline{t})=$$
$$=\lambda z(x_1,\overline{t})+(1-\lambda)z(x_2,\overline{t}),\ \lambda\in[0,1].$$

Учитывая строгую выпуклость функции ψ, имеем

$$\psi(\overline{t},z(x(\lambda),\overline{t}))<\lambda\psi(\overline{t},z(x_1,\overline{t}))+$$
$$+(1-\lambda)\psi(\overline{t},z(x_2,\overline{t})),$$
$$\lambda\in(0,1),\ z(x_1,\overline{t})\ne z(x_2,\overline{t}).$$

С учетом соотношения (2.8) получим

$$-(w(\overline{t})^Tx(\lambda)+\beta(\overline{t}))<-\lambda(w(\overline{t})^Tx_1+\beta(\overline{t}))-$$
$$-(1-\lambda)(w(\overline{t})^Tx_2+\beta(\overline{t})),\ \lambda\in(0,1)\Rightarrow$$
$$w(\overline{t})^Tx(\lambda)>w(\overline{t})^Tx(\lambda),\ \lambda\in(0,1).$$

Полученное противоречие доказывает, что $z(x,\overline{t})=const,\ \forall x\in\tilde{Y}$.

Поскольку $\overline{x}\in\tilde{Y}$, то в качестве данной константы возьмем значение $\overline{z}=z(\overline{x},\overline{t})$, тогда имеем

$$A(\overline{t})x+v(\overline{t})=\overline{z},\ \forall x\in\tilde{Y},$$

из чего следует

$$\psi(\bar t, z(x,\bar t)) = \psi(\bar t,\bar z) := \bar\psi,\ \forall x\in\tilde Y.$$

С учетом этого, перепишем соотношение (2.8) в следующем виде

$$\bar\psi + w(\bar t)^T x + \beta(\bar t) = 0,\ \forall x\in\tilde Y \Rightarrow$$

$$w(\bar t)^T x = -\beta(\bar t) - \bar\psi,\ \forall x\in\tilde Y.$$

Таким образом получили соотношения (2.3).

Пусть выполняются соотношения (2.3). Из условия $A(\bar t)x + v(\bar t) = \bar z,\ \forall x\in\tilde Y$ следует, что

$$\psi(\bar t, z(x,\bar t)) = \psi(\bar t,\bar z) = \bar\psi,\ \forall x\in\tilde Y. \qquad (2.9)$$

Тогда, учитывая (2.3) и (2.9), получаем

$$f(x,\bar t) = \psi(\bar t, z(x,\bar t)) + w(\bar t)^T x + \beta(\bar t) =$$

$$= \bar\psi - \beta(\bar t) - \bar\psi + \beta(\bar t) = 0,\ \forall x\in\tilde Y.$$

Таким образом получили соотношение (2.2).

Докажем теперь вторую часть утверждения.

Пусть выполняются соотношения (2.2) *и* (2.5). С учетом того, что выполняется Предположение 2.1 перепишем соотношение (2.5) в виде

$$B\frac{\partial(\psi(\bar t, z(x,\bar t)) + w(\bar t)^T x + \beta(\bar t))}{\partial t} = 0,\ \forall x\in\tilde Y.$$

С учетом правил дифференцирования по векторному аргументу получим

$$\begin{gathered} B\left(\frac{\partial\psi(\bar t, z(x,\bar t))}{\partial t} + \left(\frac{\partial A(\bar t)x}{\partial t} + \frac{\partial v(\bar t)}{\partial t}\right)\times\right. \\ \left.\times\frac{\partial\psi(\bar t, z(x,\bar t))}{\partial z} + \frac{\partial w(\bar t)}{\partial t}x + \frac{\partial\beta(\bar t)}{\partial t}\right) = 0, \forall x\in\tilde Y. \end{gathered} \qquad (2.10)$$

Выше было показано, что функция $z(x,\bar t) = const,\ \forall x\in\tilde Y$ при выполнении (2.2). Учитывая данный факт, можем утверждать, что

$$\begin{gathered} \frac{\partial\psi(\bar t, z(x,\bar t))}{\partial t} = \frac{\partial\psi(\bar t,\bar z)}{\partial t} =: \bar\varphi, \\ \frac{\partial\psi(\bar t, z(x,\bar t))}{\partial z} = \frac{\partial\psi(\bar t,\bar z)}{\partial z} =: \bar\nu,\ \forall x\in\tilde Y. \end{gathered} \qquad (2.11)$$

Учитывая это, перепишем соотношение (2.10) в следующем виде

$$B\left(\bar\varphi + \frac{\partial A(\bar t)x}{\partial t}\bar\nu + \frac{\partial v(\bar t)}{\partial t}\bar\nu + \frac{\partial w(\bar t)}{\partial t}x + \frac{\partial\beta(\bar t)}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\forall x\in\tilde Y. \qquad (2.12)$$

С учетом обозначений (2.7) последние равенства принимают вид (2.5), что доказывает их справедливость.

Пусть выполняются соотношения (2.2) *и* (2.6). Тогда, учитывая $z(x,\bar t) = const,\ \forall x\in\tilde Y$ и (2.11), получаем

$$B\frac{\partial f(x,\bar t)}{\partial t} =$$

$$= B\left(\bar\varphi + \frac{\partial A(\bar t)x}{\partial t}\bar\nu + \frac{\partial v(\bar t)}{\partial t}\bar\nu + \frac{\partial w(\bar t)}{\partial t}x + \frac{\partial\beta(\bar t)}{\partial t}\right) =$$

$$= B(\bar Q^T x + \bar u) = 0,\ \forall x\in\tilde Y.$$

Утверждение доказано.

На основании доказанного утверждения можем сделать вывод, что задача (1.4)–(1.5) эквивалентна задаче

$$\min_{x\in Y} c(x), \qquad (2.13)$$

где $Y = H\bigcap G,$ G определено согласно (1.6),

$$\begin{gathered} H = \{x\in\mathbb{R}^n:\ A(t_j)x + v(t_j) = \bar z(j), \\ w(t_j)^T x = -\beta(t_j) - \bar\psi(j), \\ B(j)(\bar Q^T(j)x + \bar u(j)) = 0,\ j\in J_*\}, \\ \bar z(j) := A(t_j)\bar x + v(t_j), \\ \bar\psi(j) = \psi(t_j, \bar z(j)),\ \bar x\in Y, \\ \bar Q(j) := Q(t_j,\bar z(j));\ \ \bar u(j) := u(t_j,\bar z(j)), \\ \bar\varphi(j) := \frac{\partial\psi(t_j,\bar z(j))}{\partial t},\ \bar\nu(j) := \bar\nu(t_j,\bar z(j)), \end{gathered} \qquad (2.14)$$

а функции $Q(\bar t,\bar z),$ $u(\bar t,\bar z),$ $\bar\nu(\bar t,\bar z)$ определены согласно (2.7). Поскольку задача (1.4)–(1.5), при выполнении Предположения 2.1, эквивалентна задаче (2.13), следовательно исследование оптимальности некоторого допустимого плана в задаче (1.4)–(1.5) эквивалентно проверке оптимальности этого плана в задаче (2.13), которая является задачей нелинейного программирования с линейными ограничениями равенствами.

***Замечание* 2.1.** *Предположение* 2.1 *можно ослабить, заменив его следующим*:

Предположим, что существует такое число $\varepsilon > 0,$ *что для любого* $j\in J_*$ *в окрестности* $\Omega_j = \{t\in T: \|t - t_j\| \le \varepsilon\}$ *точки* t_j *функция* $f(x,t),$ $t\in\Omega_j,$ *допускает представление*

$$f(x,t) = \psi_j(t, z_j(x,t)) + w_j(t)^T x + \beta_j(t),$$

$$z_j(x,t) = A_j(t)x + v_j(t),$$

где функция $\psi_j(t,z_j):\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{m_j}\to\mathbb{R}$ *является строго выпуклой функцией по* z_j *для любого* $t\in T.$

3 Условия оптимальности

В предыдущем пункте было показано, что задача (1.4)–(1.5) при выполнении Предположения 2.1 эквивалентна задаче (2.13), которая является задачей выпуклого программирования, в которой ограничения-равенства являются линейными.

В [11] было показано, что существует допустимый план $\tilde x\in X,$ такой, что

$$\begin{gathered} T^* = T_a(\tilde x), \\ \frac{\partial f^T(\tilde x, t_j)}{\partial t}a_i(j) < 0,\ i\in I_*(j), \\ l^T\frac{\partial^2 f(\tilde x, t_j)}{\partial t^2}l < 0,\ \forall l\in L_j^0,\ j\in J_*; \\ f(\tilde x, t) < 0,\ t\in T\setminus\{t_j,\ j\in J_*\}. \end{gathered} \qquad (3.1)$$

Из соотношений (3.1), выпуклости множества G и доказанной эквивалентности задач (2.13) и (1.4)–(1.5) следует справедливость следующего критерия оптимальности.

***Теорема* 3.1.** *Пусть выполняется Предположение* 2.1. *Допустимый план* $x^0 \in Y$ *является оптимальным в задаче* (1.4)–(1.5) *тогда и только тогда*, *когда существуют вектора и числа*

$$\begin{gathered}\tau_j \in \mathbb{R}^m, \lambda_j \in \mathbb{R}^{\overline{m}_j}, \overline{m}_j = |P(j)| + |I_0(j)|,\\ \eta_{ji} \geq 0, i \in I_*(j), \mu_{ji} \geq 0, i = \overline{1, d_j},\\ \gamma_j, j \in J_*, \xi_j \geq 0, j \in J^{**},\end{gathered} \tag{3.2}$$

такие, *что*

$$\begin{gathered}\nabla_x c(x^0) + \sum_{j \in J_*} \Bigg(A^T(t_j)\tau_j + \gamma_j w(t_j) + \overline{Q}(j) B^T(j)\lambda_j +\\ + \sum_{i \in I_*(j)} \eta_{ji} \nabla_x \left(\frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) \right) +\\ + \sum_{i=1}^{d_j} \mu_{ji} \nabla_x \left(l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} \right) \Bigg) +\\ + \sum_{j \in J^{**}} \xi_j \nabla_x f(x^0, t_j) = 0,\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\eta_{ji} \frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_*(j),$$

$$\mu_{ji} l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} = 0, i = \overline{1, d_j}, j \in J_*,$$

$$\xi_j f(x^0, t_j) = 0, j \in J^{**}.$$

Основываясь на Теоремах 1.1 и 3.1, можем сформулировать следующий результат для задачи полубесконечного программирования (1.1).

***Теорема* 3.2.** *Пусть выполняются Предположения* 1.1 *и* 2.1. *Допустимый план* $x^0 \in X$ *является оптимальным в задаче* (1.1) *тогда и только тогда*, *когда существуют вектора и числа* (3.2) *такие*, *что выполняются условия* (3.3).

4 Сравнительный анализ полученных результатов с известными в литературе

Покажем взаимосвязь полученных выше условий оптимальности с условиями из [4], где был исследован случай, когда функция ограничений $f(x,t)$ при любом $t \in T$ является выпуклой и аналитической по $x \in \mathbb{R}^n$. Приведем далее некоторые уже известные факты из [4], которые будем использовать.

В [4] доказана следующая теорема.

***Теорема* 4.1.** *Пусть выполняется Предположение* 1.1 *и функция* $f(x,t)$ *является аналитической функцией в* $\mathbb{R}^n \times T$. *Допустимый план* $x^0 \in X$ *является оптимальным в задаче* (1.1) *тогда и только тогда*, *когда существуют числа* $\overline{\eta}_{ji} \geq 0, i \in I_*(j), \overline{\mu}_{ji} \geq 0, i = \overline{1, d_j}, j \in J_*, \overline{\xi}_j \geq 0, j \in J^{**}$, *такие*, *что*

$$\Phi^T \Bigg(\nabla_x c(x^0) + \sum_{j \in J_*} \Bigg(\sum_{i \in I_*(j)} \overline{\eta}_{ji} \nabla_x \left(\frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d_j} \overline{\mu}_{ji} \nabla_x \left(l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} \right) \Bigg) + \sum_{j \in J^{**}} \overline{\xi}_j \nabla_x f(x^0, t_j) \Bigg) = 0,$$

$$\overline{\xi}_j f(x^0, t_j) = 0, j \in J^{**},$$

$$\overline{\eta}_{ji} \frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_*(j),$$

$$\overline{\mu}_{ji} l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} = 0, \overline{1, d_j}, j \in J_*,$$

где $\Phi = (\phi_i, i = 1, ..., r)$; $\{\phi_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., r\}$ – *максимальное* (*по количеству элементов*) *множество векторов удовлетворяющее соотношениям*

$$rank(\phi_i, i = \overline{1, r}) = r, \tag{4.1}$$

$$M_j^k(\tilde{x}, \phi_i) = 0, k = 1, 2, ...; i = \overline{1, r}, j \in J_*,$$

$$M_j^1(x, \phi) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x, t_j)}{\partial x} \phi \\ \dfrac{\partial \left(B(j) \frac{\partial f(x, t_j)}{\partial t} \right)}{\partial x} \phi \end{pmatrix},$$

$$M_j^k(x, \phi) := \frac{\partial M_j^{k-1}(x, \phi)}{\partial x} \phi, k = 2, 3, ..., j \in J_*,$$

где $\tilde{x}$ *вектор*, *удовлетворяющий* (3.1).

Основываясь на вышеизложенном, можно легко доказать следующее утверждение.

***Утверждение* 4.1.** *Предположим*, *что функция* $f(x,t)$ *аналитичная в* $R^n \times T$ *и удовлетворяет Предположению* 2.1. *Пусть* $\overline{\phi}_i, i = 1, ..., r^*$ – *максимально возможное множество векторов*, *удовлетворяющее условиям*

$$rank(\overline{\phi}_i, i = 1, ..., r^*) = r^*,$$

$$\begin{pmatrix} A(t_j) \\ w^T(t_j) \\ B(j)\overline{Q}^T(j) \end{pmatrix} \overline{\phi}_i = 0, i = 1, ..., r^*, j \in J_*. \tag{4.2}$$

Тогда данная система векторов $\overline{\phi}_i, i = 1, ..., r^*$ *удовлетворяет условиям* (4.1).

Таким образом, если известно представление (2.1), то систему векторов $\phi_i, i = \overline{1, r}$, необходимую для проверки условий оптимальности из теоремы 4.1, можно найти более удобным способом: найдя все линейно независимые решение однородной линейной системы уравнений (4.2).

Из всего выше изложенного также можем сделать вывод, что если найдены множители $\xi_j, j \in J^{**}, \eta_{ji}, i \in I_*(j), \mu_{ji}, i = \overline{1, d_j}, j \in J_*$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2, то они совпадут с множителями

$$\overline{\xi}_j, j \in J^{**}, \overline{\eta}_{ji}, i \in I_*(j), \overline{\mu}_{ji}, i = \overline{1, d_j}, j \in J_*$$

из теоремы 4.1.

***Замечание* 4.1.** *Выше изложенные утверждения являются справедливыми и для задачи полубесконечного программирования с ограничениями вида*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c(x),$$
$$f_i(x,t)\le 0,\ \forall t\in T_i,\ i=\overline{1,k},$$
где $0<k<\infty$, каждое T_i – многогранник.

5 Пример

Рассмотрим задачу
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} x_1^2+2x_1-4x_3+(x_4-1)^2, \qquad (5.1)$$
$$f(x,t)\le 0,\ \forall t\in T,$$
где
$$f(x,t)=-t_1^4x_1+1.5(x_1+x_2+1)^2t_1^3-$$
$$-9t_1^2-t_2^4x_4+4x_4t_2^3-4x_4t_2^2+(x_1-1)^2t_2^2-$$
$$-x_2t_2^2+x_2^2t_2+(3t_1+2)x_3^2+t_1t_2x_3,$$
$$T=\{t\in\mathbb{R}^2:-t_1\le 0,-t_2\le 0,\ t_1+t_2\le 3\},$$
и $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in\mathbb{R}^4$, $t=(t_1,t_2)^T\in\mathbb{R}^2$. Требуется проверить, является ли допустимый план $x^0=(1,0,0,1)$ оптимальным в задаче (5.1).

Легко проверить, что для плана x^0 множесво активных индексов имеет вид $T_a(x^0)=\{t^{(1)},t^{(2)},t^{(3)}\}$, где $t^{(1)}=(0,0)^T,\ t^{(2)}=(0,2)^T,\ t^{(3)}=(3,0)^T$.

Применяя алгоритм [11], убеждаемся, что индексы $T^*=\{t^{(1)},t^{(2)}\}$, $J_*=\{1,2\}$, являются неподвижными в данной задаче. Используя правила построения экстремальных лучей, получим
$$a_1(1)=(1,0)^T,\ a_2(1)=(0,1)^T,$$
$$b_1(2)=(0,1)^T,\ a_1(2)=(1,0)^T.$$

Легко показать, что
$$q(t_j,l)\le 1,\ l\in L(t_j)\setminus\{0\},\ j\in J_*$$
и
$$q(t^{(1)},a_i(1))=1,\ i\in I_0(1)=\{1,2\};$$
$$q(t^{(2)},a_1(2))=1,\ i\in I_0(2)=\{1\},$$

Определим
$$B(1):=(a_1(1),a_2(1))=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$
$$B(2):=(b_1(2),a_1(2))=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Положим $J^{**}=\{3\}$. Поскольку
$$l^T\frac{\partial^2 f(x^0,t^{(j)})}{\partial t^2}l<0,\ \forall l\in L(t^{(j)})\setminus 0,$$
то можем положить $d_j=0,\ j\in J_*$.

Рассмотрим функцию $f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^s$. Она удовлетворяет Предположению 2.1, поскольку для $f(x,t)$ справедливо представление
$$f(x,t)=\psi(t,z(t,x))+w^T(t)x+\beta(t),$$
$$z(t,x)=A(t)x+v(t),$$
где
$$w(t)=\begin{pmatrix}0\\-t_2^2\\t_1t_2\\-t_1^4-t_2^4+4t_2^3-4t_2^2\end{pmatrix},\ \beta(t)=-9t_1^2,$$

$$\psi(t,z)=z^T\begin{pmatrix}1{,}5&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}z,\quad z(t,x)=\begin{pmatrix}(x_1+x_2+1)t_1^{\frac32}\\(x_1-1)t_2\\x_2t_2^{\frac12}\\x_3(3t_1+2)^{\frac12}\end{pmatrix},$$

$$A(t)=\begin{pmatrix}t_1^{\frac32}&t_1^{\frac32}&0&0\\t_2&0&0&0\\0&t_2^{\frac12}&0&0\\0&0&(3t_1+2)^{\frac12}&0\end{pmatrix},\ v(t)=\begin{pmatrix}t_1^{\frac32}\\-t_2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.2, план x^0 будет оптимальным в задаче (5.1) тогда и только тогда, когда найдутся такие
$$\tau_j\in\mathbb{R}^4,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^2,\ \gamma_j\in\mathbb{R},\ j\in J_*;$$
$$\xi_j\ge 0,\ j\in J^{**}, \qquad (5.2)$$
что выполняются следующие соотношения
$$\nabla_x c(x^0)+\sum_{j\in J_*}\Big(A^T(t^{(j)})\tau_j+\gamma_j w(t^{(j)})+$$
$$+\bar{Q}(j)B^T(j)\lambda_j\Big)+\sum_{j\in J^{**}}\xi_j\nabla_x f(x^0,t^{(j)})=0. \qquad (5.3)$$

Положив $\bar{x}=(1,0,0,1)$ и используя формулы (2.14), подсчитаем $\bar{Q}(j),\ j\in J^*$:
$$\bar{Q}(j)=\begin{pmatrix}6(t_1^{(j)})^2&0\\6(t_1^{(j)})^2&0\\t_2^{(j)}&t_1^{(j)}\\-4(t_1^{(j)})^3&-4(t_2^{(j)})^3+12(t_2^{(j)})^2-8t_2^{(j)}\end{pmatrix}.$$

Для $t^{(1)}=(0,0)$ имеем
$$A(t^{(1)})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2^{\frac12}&0\end{pmatrix},\ w(t^{(1)})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$\bar{Q}(1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \bar{Q}(1)B^T(1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Для $t^{(2)}=(0,2)$
$$A(t^{(2)})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&2^{\frac12}&0&0\\0&0&2^{\frac12}&0\end{pmatrix},\ w(t^{(2)})=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\end{pmatrix},$$
$$\bar{Q}(2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-4\\2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \bar{Q}(2)B^T(2)=\begin{pmatrix}0&0\\-4&0\\0&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

Для проверки условий (5.2) определим еще следующие значения

$$\nabla_x f(x,t^{(3)}) = \begin{pmatrix} 81(x_1+x_2+1) \\ 81(x_1+x_2+1) \\ 18x_3 \\ -81 \end{pmatrix}, \nabla_x c(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+2 \\ 0 \\ -4 \\ 2(x_4-1) \end{pmatrix},$$

$$\nabla_x f(x^0,t^{(3)}) = (162,162,0,-81)^T,$$

$$\nabla_x c(x^0) = (4,0,-4,0).$$

Тогда условие (5.2) и условие (5.3) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tau_1 + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda_1 + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tau_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda_2 + \xi_3 \begin{pmatrix} 162 \\ 162 \\ 0 \\ -81 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\xi_3 0 = 0, \xi_3 \geq 0.$$

Эти условия выполняются при $\xi_3 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, x^0 – оптимальный план задачи (5.1).

Заключение

В данной работе были рассмотрены задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов и вполне выпуклой по *x* функцией ограничений.

Используя свойство вполне выпуклости функции ограничений, было показано, что задача (1.4)–(1.5) эквивалентна задаче (2.13), которая является задачей выпуклого программирования, ограничения-равенства которой являются линейными. На основе проведенных исследований был сформулирован и доказан критерий оптимальности (см. Теорему 3.2) для задачи (1.1) с вполне выпуклыми функциями ограничений. Приведен пример, иллюстрирующий применение данного критерия. Проведен сравнительный анализ критериев оптимальности для задачи (1.1) с вполне выпуклыми функциями ограничений и аналитичными функциями ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lopez*, *M*. Semi-infinite programming: theory, methods and applications / M. Lopez, G. Still // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 180. – P. 491–518.

2. *Shapiro*, *A*. Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions / A. Shapiro // Optimization. – 2009. – Vol. 58, № 2. – P. 133–161.

3. *Stein*, *O*. On optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems / O. Stein, G. Still // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2000. – Vol. 104, № 2. – P. 443–458.

4. *Kostyukova*, *O.I.* Study of a Special Nonlinear Problem Arising in Convex Semi-Infinite Programming / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 161, № 6. – P. 878–892.

5. *Klatte*, *D*. Stable local minimizers in semi-infinite optimization: regularity and second-order conditions / D. Klatte // J. Comput. Appl. Math. – 1994. – Vol. 56. – P. 137–157.

6. *Moldovan*, *A*. On Regularity for Constrained Extremum Problems. Part 2: Necessary Optimality Conditions / A. Moldovan, L. Pellegrini // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 142. – P. 165–183.

7. *Kostyukova*, *O.I.* On the algorithm of determination of immobile indices for convex SIP problems / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // International Journal on Mathematics and Statistics. – 2008. – Vol. 13, № 8. – P. 13–33.

8. *Kostyukova*, *O.I.* Implicit optimality criterion for convex SIP problem with box constrained index set / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 20. – P. 475–502.

9. *Rockafellar*, *R.T.* Some convex programs whole duals are linearly constrained, in "Nonlinear Programming" / R.T. Rockafellar (J.B. Rosen, O.L. Mangasarian, and K. Ritter, Eds.). – Academic Press, New York, 1970. – P. 293–322.

10. *Kostyukova*, *O.I.* A constructive algorithm for determination of immobile indices in convex SIP problems with polyhedral index sets / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova. – Aveiro, 2012. – 17 p. – (Preprint / Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Mathematical Department, University of Aveiro).

11. *Кулагина*, *М.В*. Алгоритм определения неподвижных индексов в выпуклых задачах полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов / М.В Кулагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 65–76.

12. *Kostyukova*, *O.I.* Convex SIP Problems with Finitely Representable Compact Index Sets: Immobile Indices and the Properties of the Auxiliary NLP Problem / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Set-Valued and Variational Analysis. – 2015. – Vol. 23. – P. 519–546.

Поступила в редакцию 21.10.16.