

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ БИНАРНЫХ ОПЦИОНОВ НА ОСНОВЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА АРИФМЕТИЧЕСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Андрончик И. А., Жук Е. Е.

Кафедра математического моделирования и анализа данных, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь

E-mail: vanya.andronchik@gmail.com, zhukee@mail.ru

В данной работе излагаются особенности бинарного опциона, его определение и правила игры, выявляются стратегии игры на бинарных опционах. Авторами предложена модель прогнозирования бинарных опционов на основе случайного процесса арифметического броуновского движения, а также рассмотрены реальные данные и приведены примеры реализации стратегий игры на бинарных опционах.

ВВЕДЕНИЕ

Бинарный опцион — опцион, который в зависимости от выполнения оговоренного условия в оговоренное время либо обеспечивает фиксированный размер дохода, либо не приносит ничего. Обычно речь идёт о том, будет ли биржевая цена на базовый актив выше или ниже определённого уровня. Фиксированная выплата производится в случае выигрыша опциона, независимо от степени изменения цены, то есть, если за выбранный промежуток времени прогноз оказывается успешным и цена на актив будет на оговоренном уровне или лучше его, трейдер получает фиксированную прибыль. В отличие от обычного опциона, бинарный опцион не предполагает покупки или продажи актива. Время, на которое ставится прогноз, является временем исполнения бинарного опциона. Опцион считается реализованным, когда к моменту времени его исполнения появляется официальная информация о состоянии того или иного актива, на котором сделана ставка. В зависимости от текущей рыночной ситуации цена покупки/продажи бинарного опциона может меняться в широких пределах. Стоимость бинарного опциона определяется исходя из спроса и предложения. Сейчас появляется большее число брокеров, которые предлагают торговлю бинарными опционами по несколько иной схеме, то есть все зависит от контракта, который вам предлагают. Так, например, прогноз может определяться на то, что цена на актив достигнет определённого уровня или интервала за данный промежуток времени хотя бы один раз [1, 2].

1. СТРАТЕГИИ ИГРЫ НА БИНАРНЫХ ОПЦИОНАХ

Пусть случайный процесс $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, тогда для фиксированных моментов времени t и τ величину $\Delta W(t) = W(t) - W(\tau)$ назовем приращением стандартного винеровского процесса $W(t)$.

Модель арифметического броуновского движения имеет вид:

$$\Delta X(t) = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t), \quad (1)$$

где μ и σ — две константы. Тогда говорят, что процесс $X(t)$ следует арифметическому броуновскому движению с математическим ожиданием (дрейфом) μ и дисперсией σ^2 [4].

Для построения оценок математического ожидания μ и дисперсии σ^2 воспользуемся функцией максимального правдоподобия. Так как

$$\Delta X(t_j) = X(t_j) - X(t_{j-1}) \sim N_1(\mu \Delta t_j, \sigma^2 \Delta t_j),$$

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad j = \overline{1, n},$$

то плотности имеют вид:

$$p_j(\Delta X(t_j)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\Delta t_j}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta X(t_j) - \mu \Delta t_j)^2}{\sigma^2 \Delta t_j}}.$$

Запишем логарифмическую функцию правдоподобия и исследуем на максимум относительно μ и σ^2 :

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln \prod_{j=1}^n (p_j(\Delta X(t_j))) \rightarrow \max_{\mu, \sigma^2}.$$

Оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров μ и σ^2 имеют вид:

$$\hat{\mu} = \frac{X(t_n) - X(t_0)}{t_n - t_0}, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\Delta X(t_j))^2}{\Delta t_j} - 2\Delta X(t_j)\hat{\mu} + \hat{\mu}^2 \Delta t_j \right).$$

При этом оценка $\hat{\mu}$ является несмещенной $E[\hat{\mu}] = \mu$, $D[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{t_n - t_0}$, а $\hat{\sigma}^2$ — асимптотически несмещенной: $E[\hat{\sigma}^2] = \frac{\sigma^2(n+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma^2$ [5].

Пусть мы имеем реализацию временного ряда $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$, которая определяет цену какого-либо актива на рынке в моменты времени $\{t_i\}_{i=0}^n$. Построим нормированные величины следующим образом ($i = \overline{1, n}$):

$$\Delta Y(t_i) = \frac{X(t_i) - X(t_{i-1}) - \hat{\mu}(t_i - t_{i-1})}{\hat{\sigma} \sqrt{t_i - t_{i-1}}}, \quad (3)$$

где в качестве оценок параметров μ и σ используются их ОМП $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ из (2).

Далее проверяем гипотезу о согласии со стандартным нормальным распределением вероятностей для построенной выборки (3). Если гипотеза о согласии не отклоняется, то можно считать, что исходный процесс $X(t)$ может быть

описан моделью арифметического броуновского движения (1).

Воспользуемся ОМП (2) и подстановочным принципом в (1) :

$$\Delta \hat{X}(t) = \hat{\mu} \Delta t + \hat{\sigma} \Delta W(t).$$

Оценим вероятность процесса $X(t)$ оказаться выше уровня x через промежуток времени T :

$$\alpha = P \{X(t_n + T) > x\} = \quad (4)$$

$$P \left\{ \frac{X(t_n + T) - X(t_n) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} > \frac{x - X(t_n) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right\}.$$

Оценим вероятность процесса $X(t)$ оказаться ниже уровня x через промежуток времени T :

$$\alpha = P \{X(t_n + T) < x\} = \quad (5)$$

$$P \left\{ \frac{X(t_n) - X(t_n + T) + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} > \frac{X(t_n) - x + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right\}.$$

Для игры на бинарных опционах предлагается установить вероятность α и фиксированное время исполнения T , при которой будет достигнут уровень x или результат лучше уровня x .

Так как величина $\frac{X(t_n+T)-X(t_n)-\hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ имеет в асимптотике $T \rightarrow +\infty$ стандартное нормальное распределение, то для случая (4) $x = X(t_n) + \hat{\mu}T + \Phi^{-1}(1 - \alpha) \hat{\sigma}\sqrt{T}$ и для случая (5) $x = X(t_n) + \hat{\mu}T - \Phi^{-1}(1 - \alpha) \hat{\sigma}\sqrt{T}$, где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ - функция распределения стандартного нормального закона.

Таким образом, для игры на бинарных опционах необходимо определить вероятность, на которую согласен трейдер для достижения уровня, и время, которое трейдер готов ожидать, тем самым определяется уровень, который достигнет процесс или улучшит его.

II. ПРИМЕНЕНИЕ СТРАТЕГИЙ ИГРЫ НА БИНАРНЫХ ОПЦИОНАХ

В качестве примера применим вторую стратегию игры на бинарных опционах. Рассмотрим бинарный опцион на фондовый индекс CBOE Volatility Index (VIX), предлагаемый Чикагской фондовой биржей. Данные рассматриваются в период с 10.04.2017 по 12.05.2017 с интервалом в один день [3]. Данные представляют собой коэффициент стоимости одного опциона. Чтобы получить стоимость опциона, необходимо коэффициент стоимости умножить на 100\$, при этом максимальная стоимость этого бинарного опциона равна 100\$.

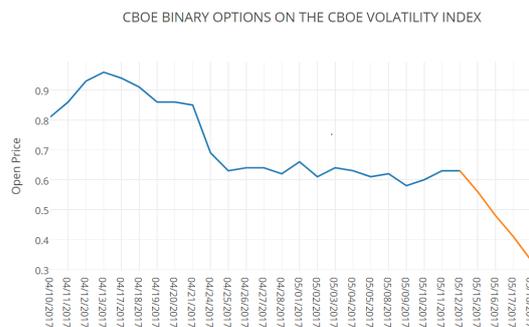


Рис. 1 – Показатель индекса CBOE Binary Options On The CBOE Volatility Index (VIX) с 10.04.2017 по 12.05.2017 и его прогноз на 18.05.2017

Оценка дрейфа: $\hat{\mu} = -0.0075$, оценка волатильности: $\hat{\sigma} = 0.045$. Составим прогноз на $T = 4$ дня: $\hat{X}(t_n + T) = 0.33$

Так как оценка дрейфа отрицательная, то есть тренд убывающий, то имеет смысл продать бинарный опцион, чтобы минимизировать потери.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе изучен бинарный опцион, его суть, правила игры на бирже, предложены стратегии получения прибыли на бинарных опционах, которые будут изучаться в дальнейшем. Рассмотрено арифметическое броуновское движение как модель для прогнозирования поведения цены бинарного опциона. В работе изучено применение модели арифметического броуновского движения для одного фондового индекса, однако планируется рассмотреть применение модели ко множеству видов активов и поставить вопрос о применении некоторых иных моделей для прогнозирования бинарных опционов.

1. Cory Mitchell. A Guide To Binary Options In The U.S. [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.investopedia.com/articles/active-trading/061114/guide-trading-binary-options-us.asp>. – Date of access: 16.05.2017
2. Maverick, J. B. What is the history of binary options? [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.investopedia.com/ask/answers/040715/what-history-binary-options.asp>. – Date of access: 16.05.2017
3. CBOE Binary Options On The Volatility Index (VIX) data. [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.cboe.com/delayedquote/quote-table?ticker=BVZ>. – Date of access: 16.05.2017
4. Матылицкий, М. А. Вероятность и случайные процессы: теория, примеры, задачи / М. А. Матылицкий. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 588с.
5. Жук Е. Е. Статистический анализ случайных процессов броуновского движения, возвращающихся на фиксированный уровень // Весці НАН Беларусі. – мат. навук. – 2009. – № 3. – С. 4–9.