УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 511.42

ЛАМЧАНОВСКАЯ
Марина Валерьевна

РЕГУЛЯРНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В КРУГАХ МАЛЫХ РАДИУСОВ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2016

Работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Научный руководитель	**Берник Василий Иванович,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории чисел Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».
Официальные оппоненты:	**Беняш-Кривец Валерий Вацлавович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета;
	Васильев Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий отделом теории чисел Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Оппонирующая организация – учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова».

Защита состоится 24 ноября 2016 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 24 октября 2016 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.12.01 Д.А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

многочлен с целыми коэффициентами. Если $a_n \neq 0$, то степень $P(x)$ – это $\deg P = n$. Высотой многочлена $P(x)$ называют величину $H(P) = \max\limits_{0\le i\le n}|a_i|$. Действительное или комплексное число α называется алгебраическим, если существует $P(x) \in \mathbb{Z}[z]$, что $P(\alpha) = 0$. Для алгебраического числа α найдем многочлен $T(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ наименьшей степени с $d(b_0, b_1, ...) = 1$, корнем которого является α. Тогда $\deg\alpha = m$, а $H(\alpha) = \max\limits_{0\le j\le m}|b_j|$.

Проблемы, решаемые в диссертации, восходят к классификации действительных и комплексных чисел, предложенных К. Малером и Дж.Ф. Коксмой. Первый из них построил классификацию действительных и комплексных чисел t в зависимости от величин $|P(t)|$, $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, а второй – на основе разрешимости неравенств

$$|t - \alpha| < H(\alpha)^{-w}, \quad w > 0$$

в алгебраических числах α.

Многие свойства классификаций были изучены самими К. Малером и Дж.Ф. Коксмой. Центральной проблемой классификации К. Малера стала проблема Малера 1932 года[1].

Требуется доказать, что при любом $v > n$ неравенства

$$|P(x)| < H(P)^{-v} \tag{1}$$

имеют бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$, $\deg P = n$, только на множестве $x \in B_1$, $\mu_1 B_1 = 0$, где $\mu_1 B_1$ – мера Лебега измеримого множества $B_1 \subset \mathbb{R}$.

Проблема Малера была поставлена и в поле комплексных чисел с заменой неравенств (1) на неравенства

$$|P(z)| < H(P)^{-u}, \quad u > \frac{n-1}{2}, \tag{2}$$

[1] Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106, № 1. – P. 131–139.

и множества B_1 на множество $B_2 \subset \mathbb{C}$, $\mu_2 B_2 = 0$, где μ_2 – мера Лебега на комплексной плоскости.

На протяжении более 30 лет решить проблемы, связанные с неравенствами (1) и (2), не удавалось, хотя продвижениями в разрешимости этих проблем занимались такие крупные математики, как Й. Кубилюс, В. Левек, В. Шмидт, Б. Фолькман[2]. И только в 1964 году молодой белорусский математик В.Г. Спринджук доказал обе гипотезы о мерах множеств, на которых разрешимы неравенства (1) и (2), создав при этом первые общие методы подсчета количества алгебраических чисел заданной степени и ограниченной высоты.

Неравенства (1) и (2) можно заменить на неравенства

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi_1(H); \tag{3}$$

$$|P(z)| < H^{-\frac{n-2}{2}}\psi_2(H), \tag{4}$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – монотонно убывающие функции положительного аргумента *t*. При $n = 1$ относительно неравенств (3) была известна классическая теорема А.Я. Хинчина[3].

Обозначим через $L_1(\psi_1)$ множество точек *x* из некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенства (3) имеют бесконечное число решений. Тогда

$$\mu_1 L_1(\psi_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi_1(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi_1(H) = \infty. \end{cases}$$

Теорема Хинчина была обобщена на многочлены произвольной степени. В этом случае множество решений (3) обозначим через $L_n(\psi_1)$:

$$\mu_1 L_n(\psi_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi_1(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi_1(H) = \infty. \end{cases}$$

[2] Volkmann, B. The real cubic case of Mahler's conjecture / B. Volkmann // Mathematika. – 1961. – Vol. 8. – P. 55–57.

[3] Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 93, № 1–2. – P. 115–125.

Случай сходимости ряда был доказан В.И. Берником[4], а расходимости – В.В. Бересневичем[5].

Д.В. Васильев[6] доказал комплексный аналог теоремы Хинчина для неравенств (4).

Э.И. Ковалевская доказала метрическую теорему для аналитических функций комплексной переменной при показателе степени порядка n^2, получив тем самым аналог теоремы Пяртли.

В последние годы рассматриваются эффективные версии задач, связанные с неравенствами вида (3), (4). Рассматриваются значения $H(P)$, $1 \le H(P) \le Q$, где Q – достаточно большое натуральное число. При этом для мер множеств типа $L_n(\psi_1)$ указываются оценки вида $\varepsilon(Q)$, где $\varepsilon(Q) \to 0$ при $Q \to \infty$.

При $Q > 1$ рассмотрим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \left\{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \ge 2,\, H(P) \le Q\right\}.$$

Обозначим через $c_1 = c_1(n)$, $c_2(n)$, $\ldots$ – величины, зависящие от n, но не зависящие от H и Q.

Распределение значений дискриминантов и результантов целочисленных многочленов. Работы по распределению значений дискриминантов и результантов целочисленных многочленов начались в шестидесятых годах прошлого века. Х. Давенпорт получил оценку для суммы дискриминантов многочленов $P(x)$ третьей степени, $H(P) \le Q$, а Б. Фолькман использовал ее при доказательстве кубического случая в проблеме Малера.

В.Г. Спринджук[7,8] широко использовал дискриминанты при доказательстве проблемы Малера.

В 2008 году В.И. Берником, Ф. Гётце и О.С. Куксо были получены нижние оценки количества многочленов с заданными высотами и ограниченными дискриминантами. В серии работ Д.В. Коледа[9] получил точные по порядку оценки сверху и снизу для количества многочленов второй и третьей степени с задан-

[4] Берник, В. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.

[5] Бересневич, В.В. Точный порядок приближения действительных чисел алгебраическими / В.В. Бересневич // Докл. Российской акад. наук. – 1999. – Т. 366, № 5. – С. 583–586.

[6] Васильев, Д.В. Об аналоге теоремы Шмидта для кривых в пространстве $\mathbb{C}^3$ / Д.В. Васильев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 4. – С. 28–32.

[7] Спринджук, В.Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений / В.Г. Спринджук // Успехи матем. наук. – 1980. – Т. 35, вып. 2. – С. 3–68.

[8] Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.

[9] Коледа, Д.В. Об оценке сверху для числа целочисленных многочленов третьей степени с заданной границей для дискриминантов / Д.В. Коледа // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 10–16.

ными дискриминантами. В работах В.В. Бересневича, В.И. Берника и Ф. Гётце точные оценки снизу доказаны не только для многочленов производной степени с заданными дискриминантами, но и для пар многочленов с заданными результантами. Отметим, что рассматриваемые в диссертации задачи встречаются в проблеме малых знаменателей[10].

Расстояния между сопряженными алгебраическими числами. Алгебраические числа в коротких интервалах. Пусть $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и $\alpha_1,\ \alpha_2$ – корни $P(x)$. Вопрос о том, насколько малой может быть величина $|\alpha_1 - \alpha_2|$ в зависимости от $\alpha_1,\ \alpha_2$, исследовался К. Малером[11], М. Миньётом и Я. Бюжо. В работе В.В. Бересневича, В.И. Берника и Ф. Гётце[12] их оценки были улучшены, причем была указана оценка снизу для количества многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, для которых эти оценки достигаются. Совсем недавно Я. Бюжо и А. Дужела получили оценки близкие к гипотетическим, а Н.В. Бударина[13] нашла оценку снизу для количества $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с заданным произведением расстояний между корнями.

Рассмотрим фиксированный интервал $I \subset [0,1)$ длины $\mu I = c_1 Q^{-\gamma},\ \ 0 \le \gamma$. Ответ на естественный вопрос о величинах c_1 и γ, при которых на интервале I есть корни $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, дан в работе В.И. Берника и Ф. Гётце[14]. Оказалось, что при $\gamma > 1$ и $Q > Q_0(n, \gamma)$ существуют такие интервалы, на которых корней нет, а при $\gamma \le n$ и достаточно большом c_1 таких корней не менее $c_2 Q^{n+1} \mu I$.

Интересны также задачи о количестве точек с рациональными и алгебраическими координатами вблизи гладких кривых. Такие задачи рассматривались А. Бейкером, Р. Бейкером, М. Хаксли, В.В. Бересневичем, С. Велани, Е. Зориным для рациональных точек и В.И. Берником, Ф. Гётце, О.С. Куксо для алгебраических точек с сопряженными действительными координатами.

В диссертации рассматриваются описанные выше задачи для алгебраических чисел в поле комплексных и в поле p-адических чисел.

---

[10] Арнольд, В.И. Малые знаменатели. Об отображении окружности на себя / В.И. Арнольд // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1961. – Т. 25, № 1. – С. 21–86.

[11] Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106, № 1. – P. 131–139.

[12] Beresnevich, V. The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Compos. Math. – 2010. – Vol. 146, № 5. – P. 1165–1179.

[13] Бударина, Н.В. Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в кластерах / Н.В. Бударина, Ф. Гетце // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 5. – С. 780–783.

[14] Берник, В.И. Эффективные оценки мер множеств действительных чисел с большой мерой трансцендентности / В.И. Берник, Ф. Гетце, О.С. Куксо // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 3. – С. 36–44.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Результаты диссертации были получены в рамках выполнения Государственной программы научных исследований «Конвергенция», задание «Применение диофантовых приближений в различных метриках в теории трансцендентных чисел, диофантовых уравнениях, распределении алгебраических чисел, дискриминантов и результантов» (Конвергенция 01.01.2004), НИР «Многоточечные и нелокальные задачи для уравнений с частными производными и связанные с ними распределения резонансных точек гладких функций в областях малой меры» по договору Ф13К-155 с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, НИР «Метрические проблемы геометрии чисел и теории диофантовых приближений» Ф14Р-034 от 23 мая 2014 года (совместно с Хабаровским отделением Учреждения РАН Института прикладной математики ДВО РАН, Россия, Хабаровск).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является исследование распределения комплексных алгебраических чисел в комплексной плоскости и в поле p-адических чисел; получение эффективных количественных результатов в этих направлениях.

Основные ***задачи*** диссертации: получение асимптотических соотношений для количества алгебраических чисел с заданной верхней границей для высот при больших значениях этой границы; исследование степени точности данных соотношений и нерегулярностей в распределении; получение асимптотически точных оценок для количества целочисленных многочленов заданной степени и с ограниченной высотой; исследование параметров многочленов, вносящих основной вклад в распределение алгебраических чисел.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Они получены по актуальной тематике с использованием последних результатов крупнейших специалистов в области диофантовых приближений А.Я. Хинчина, К. Малера, В. Шмидта, А. Бейкера, В.Г. Спринджука. В представленном в диссертации виде они уже могут использоваться в университетских курсах алгебры и теории чисел, а также в спецкурсах по теории чисел.

Положения, выносимые на защиту

1. Получение оценок снизу для количества алгебраических чисел в кругах малых радиусов на комплексной плоскости.

2. Доказательство свойства регулярности комплексных алгебраических чисел в кругах малых радиусов.

3. Доказательство свойства регулярности систем p-адических алгебраических чисел из $\mathbb{Q}_p$.

4. Нахождение закона совместного распределения комплексных алгебраических чисел.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, выносимые на защиту, были получены автором самостоятельно. В совместной работе с научным руководителем В.И. Берником им была поставлена задача и предложена методика исследования. В совместно опубликованных работах [1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11] вклад авторов равнозначен.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации докладывались соискателем на международных и отечественных конференциях:

– на Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 2012);

– на Международной научно-практической конференция «Математика в современном техническом университете» (Киев, 2013);

– на Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2015);

– на Международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 2016);

– на семинарах по теории чисел в Институте математики НАН Беларуси (руководитель – профессор В.И. Берник);

– на семинаре кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины.

Опубликование результатов диссертации

Все основные результаты, выносимые на защиту, опубликованы в 11 работах. Из них 5 журнальных статей [1, 2, 3, 4, 5] размещены в научных изданиях (из них 2 без соавторов), включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, 6 тезисов выступлений на математических конференциях и семинарах. Общий объем опубликованных материалов – 50 страниц, что соответствует приблизительно 2,5 авторским листам.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных библиографических источников, включающего 95 наименований.

Полный объем диссертации составляет 78 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во **введении** дается обзор литературы по теме диссертации. Приведены известные задачи метрической теории диофантовых приближений и история их решения. Обоснована связь с задачами диссертационного исследования.

В **первой главе** показано, что на числовой прямой и на комплексной плоскости существуют интервалы *I* малой длины и круги *K* малого радиуса, внутри которых нет алгебраических чисел с ограниченной высотой. Найдены оценки снизу для длины интервалов и радиусов кругов, в которых существуют алгебраические числа.

В **разделе 1.1** доказана теорема, устанавливающая связь между высотой алгебраического числа Q и длиной интервала *I* числовой оси, в котором эти числа существуют.

Теорема 1.1 [2]. В интервале $I=(0;0{,}5Q^{-1})$, $|I|=0{,}5Q^{-1}$, нет алгебраических чисел α степени $\deg\alpha = n \geq 1$ и $H(\alpha)\leq Q$ для любого $Q>1$.

Теорема 1.2 [2]. Пусть задано натуральное число $Q>1$ и интервал $I\subset\mathbb{R}$, $|I|>Q^{-\mu}$. Тогда в интервале *I* существует действительное алгебраическое число α, $\deg\alpha = n\geq 1$, $H(\alpha)\leq Q$, если $\mu<\frac{1}{n}$.

В **разделе 1.2** найдена оценка снизу для радиусов кругов *K*, в которых существуют алгебраические числа заданной высоты Q.

Теорема 1.3 [2]. Для любого $Q>1$ существуют круги $K(z_0,r)$ радиуса $r<c_3(n)^{-\frac{1}{2}}Q^{-1}$, в которых при достаточно малой величине $c_3(n)$ нет алгебраических чисел α степени $\deg\alpha = n$ и высоты $H(\alpha)\leq Q$.

Теорема 1.4 [2]. Пусть задано натуральное число $Q>1$ и круг $K(z_0,r)$ радиуса $r\geq Q^{-\mu}$. В круге $K(z_0,r)$ существует комплексное алгебраическое число α, $\operatorname{Im}\alpha\neq 0$, $\deg\alpha = n\geq 2$, $H(\alpha)\leq Q$, если $\mu<\frac{1}{2n}$.

В **главе 2** доказана метрическая теорема, устанавливающая связь между количеством алгебраических чисел α, лежащих в некотором круге $K \subset \mathbb{C}$ малого радиуса, и высотой этих алгебраических чисел. При этом $H(\alpha) \le Q$. Показано, как построить регулярную систему в кругах малого радиуса из алгебраических комплексных чисел с ненулевой мнимой частью.

В **разделе 2.**1 введено понятие регулярной системы действительных алгебраических чисел.

Определение 2.1. Пусть Γ – счетное множество действительных чисел и $N:\Gamma \to \mathbb{R}$ – положительная функция. Пару (Γ, N) назовем регулярной системой, если существует постоянная $c_4 = c_4(\Gamma, N) > 0,$ обладающая следующим свойством: для любого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ найдется такое достаточно большое число $T_0 = T_0(\Gamma, N, I) > 0,$ что при любом $T > T_0$ можно выбрать числа $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t \in \Gamma \cap I,$ чтобы выполнялось

1) $N(\gamma_i) \le T,\ 1 \le i \le t;$
2) $\left|\gamma_i - \gamma_j\right| > T^{-1},\ 1 \le i < j \le t;$
3) $t > c_4 |I| T.$

Множество рациональных чисел $\dfrac{p}{q}$ с функцией $N\left(\dfrac{p}{q}\right) = q^2$ образует регулярную систему. А. Бейкер и В. Шмидт[15] доказали, что действительные алгебраические числа α с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1}(\ln H(\alpha))^{-\nu}$ также образуют регулярную систему при $\nu = 3n(n+1).$

В **разделе 2.2** сформулирована основная метрическая теорема.

Теорема 2.1 [4]. Пусть $\mathcal{B}_1(Q, \delta_0, K)$ обозначает множество $z \in K(z_0, r),$ для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}, \\ |P'(z)| < \delta_0 Q \end{cases}$$

имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_n(Q).$ Тогда при достаточно малой величине δ_0 и достаточно большой величине c_2 имеем $\mu\mathcal{B}_1(Q, \delta_0, K) < \dfrac{1}{4}\mu K$ для всех кругов $K(z_0, r)$ с условием $r > c_2 Q^{-\mu},\ 0 \le \mu \le 1.$

---

[15] Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W.M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. (3). – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.

Из теоремы 2.1 следует, что для множества $\mathcal{B}_2 = K \setminus \mathcal{B}_1(Q, \delta_0, K)$ справедливо неравенство $\mu\mathcal{B}_2 \geq \frac{3}{4}\mu K,$ которое означает, что для всех $z \in \mathcal{B}_2$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}, \\ |P'(z)| \geq \delta_0 Q. \end{cases}$$

В **разделе 2.3** сформулированы и доказаны леммы, используемые при доказательстве основных результатов диссертации.

В **разделе 2.2** доказана метрическая теорема для случая большой производной в корне.

Предложение 2.1 [4]. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}, \\ c_1 Q^0 < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,1}$ множество $z \in K(z_0, r),$ для которых система неравенств (5) имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_n(Q),$ тогда при достаточно малой величине δ_0 и достаточно большом Q имеем $\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{4t}\mu K.$

В **разделе 2.5** доказана метрическая теорема для многочленов третьей степени, которая используется в качестве базы индукции.

Предложение 2.2 [3, 4]. Пусть $\mathcal{L}_{n,3}(Q, \delta_0, K)$ обозначает множество $z \in K(z_0, r),$ для которых система неравенств

$$\begin{cases} |R(z)| < 2c_5 Q^{-1}, \\ |R'(z)| < 4\delta_0 Q. \end{cases}$$

имеет решение в полиномах

$$R(z) \in \mathcal{P}_3(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = 3, H(R) \leq 2Q\}.$$

Тогда при достаточно малой величине δ_0 и достаточно большом Q имеем $\mu\mathcal{L}_{n,3} < \frac{1}{8t}\mu K$ для всех кругов K с условием $r \geq c_2 Q^{-\mu},\ 0 \leq \mu \leq 1.$

В **разделе 2.6** с помощью метода математической индукции доказывается теорема 2.1. Индукция проводится по степени многочлена путем разбиения промежутка значений производной многочлена.

Предложение 2.3 [4]. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}, \\ Q^{-\frac{k-3}{4}} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-\frac{k-4}{4}}. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим через $L_{n,k}$, $4 \le k \le n-1$, множество $z \in K(z_0, r)$, для которых система неравенств (6) имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_n(Q)$, тогда при достаточно большом Q имеем

$$\mu L_{n,k} < \frac{1}{4t} \mu K.$$

В **разделе 2.7** найдено свойство регулярности распределения комплексных алгебраических чисел.

Определение 2.2. Счетное множество комплексных чисел $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ...)$ вместе с функцией $N = N(\gamma_j)$, $N : \Gamma \to \mathbb{R}$, обладает в круге $K(z_0, r)$ свойством регулярности, если для любого $Q > Q_0(K)$ найдется действительное число $T_0 = T_0(K)$ такое, что для всех T, $T_0 < T < Q$, существуют числа $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t \in \Gamma \cap K$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) $N(\gamma_j) < \mathrm{T}$;

2) $|\gamma_l - \gamma_k| > T^{-1}$, $1 \le l \le k \le t$;

3) $t > c_{31} T^2 \mu K$.

Теорема 2.2 [4]. При подходящем $r > c_3 Q^{-\mu}$, $0 \le \mu \le 1$, множество комплексных алгебраических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ вместе с функцией $N(\alpha) = c_4 H(\alpha)^{\frac{n+1}{2}}$ обладает свойством регулярности.

В **главе 3** диссертации рассматривается множество $\mathcal{A}_{3,p}$ p-адических алгебраических чисел третьей степени, принадлежащих $\mathbb{Z}_p$.

В **разделе 3.1** сформулирована теорема о регулярности распределения p-адических алгебраических чисел третьей степени.

Теорема 3.1 [1]. Пусть K – конечный цилиндр в K_0. Тогда существуют положительные постоянные C_1, c_4 и положительное число $T_0 = c_4\mu(K)$ такое, что для любого $T \ge T_0$ существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathcal{A}_{3,p} \cap K$ такие, что

$$H(\alpha_i) \le T^{\frac{1}{4}} \quad (1 \le i \le t),$$

$$\left|\alpha_i - \alpha_j\right|_p \ge T^{-1} \quad (1 \le i < j \le t),$$

$$t \ge C_1 T \mu(K).$$

Из теоремы 3.1 следует, что множество $\mathcal{A}_{3,p}$ с функцией $N(\alpha) = H^4(\alpha)$ образует регулярную систему в K_0.

Пусть $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$. Обозначим через $\bar{\mathcal{L}}_3 = \bar{\mathcal{L}}_3(Q, \delta_0, K)$ множество таких $w \in K$, для которых система неравенств

$$\left|P(w)\right|_p < Q^{-4}, \quad \left|P'(w)\right|_p < \delta_0$$

имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Доказательство теоремы 3.1 основывается на следующей метрической теореме.

Теорема 3.2 [1]. Для любого действительного числа s, $0 < s < 1$, существует величина δ_0, которая удовлетворяет следующим условиям. Для любого цилиндра K в K_0 существует достаточно большое число $Q_0 = Q_0(K)$ такое, что для

$$\mu(K) > c_5 Q_0^{-1}$$

и достаточно большой постоянной c_5, которая не зависит от Q_0, и для любого $Q > Q_0$ выполнено неравенство

$$\mu(\bar{\mathcal{L}}_3) < s\mu(K).$$

Доказательство теоремы 3.2 проводится посредством разбиения интервала (pQ^{-2}, δ_0) изменения производной $\left|P'(\alpha_1)\right|_p$.

В **разделе 3.2** в предложении 3.1 рассмотрен случай большой производной многочлена в корне.

В **разделе 3.2** в предложениях 3.2–3.7 рассмотрен случай малой производной многочлена в корне.

В **главе 4** рассматриваются совместные распределения комплексных алгебраических чисел в кругах малых радиусов.

В **разделе 4.1** показано, что на комплексной плоскости существуют круги, внутри которых нет алгебраических чисел заданной высоты Q.

Теорема 4.1 [5]. Для любого $Q \ge 1$ существует шар $S = K_1(u_1, r_1) \times K_2(u_2, r_2)$, где $|u_1 - u_2| > \delta > 0$, $r_i = Q^{-\mu_i}$, $i = 1, 2$, $\mu_i \ge 0$, такой, что в шаре $K = K_1(w_1, R_1) \times K_2(w_2, R_2)$, $K \subset S$, $u_1 \notin K_1(w_1, R_1)$, $u_2 \notin K_2(w_2, R_2)$, $R_1 < c_2 r_1$, $R_2 < c_3 r_2$, нет алгебраических точек $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\deg P \ge 4$, $H(\overline{\alpha}) = \max\left(H(\alpha_1), H(\alpha_2)\right) \le Q$ при условии:

а) $\mu_1 + \mu_2 > 2$ и $Q > Q_0$;

б) $\mu_1 + \mu_2 = 2$ и $0 < c_2 \le c_3$, где c_3 достаточно мала.

Найдена зависимость между высотой алгебраических чисел и радиусами кругов, в которых существуют алгебраические числа. Получена оценка количества алгебраических чисел в этих кругах.

Теорема 4.2 [5]. Если $\max \mu_i \le \frac{1}{4}$, $i = 1, 2$, то при достаточно большой величине c_5 в шаре $K = K_1(z, r_1) \times K_2(u, r_2)$, $r_i > c_5 Q^{-\mu_i}$, $i = 1, 2$, $\mu_i \ge 0$, существует не менее $c_6 Q^{5-2(\mu_1+\mu_2)}$ точек с алгебраическими координатами четвертой степени и высоты $H(\overline{\alpha}) \le c_7 Q$.

В **разделе 4.2** доказана метрическая теорема о распределении алгебраических чисел четвертой степени большой высоты в кругах малых радиусов.

Теорема 4.3 [5]. Обозначим через $\mathcal{L}_4(Q)$ множество точек $z \in K_1(z_1, r_1)$, $u \in K_2(u_2, r_2)$, $|z| > \delta$, $|u| > \delta$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}}, \\ |P(u)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}}, \\ \min\left(P'(z), P'(u)\right) \le \delta_0 Q \end{cases}$$

имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$. Тогда $\mu\mathcal{L}_4(Q) < \frac{1}{4}\mu K_1 \cdot \mu K_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации получены следующие основные результаты.

Доказано существование комплексных алгебраических чисел в кругах малых радиусов методом линейных преобразований многочленов с рациональными коэффициентами (теоремы 1.1, 1.3 [2]). Это обобщает результаты В. Шмидта о связи скорости роста меры трансцендентности со степенью и высотой многочленов.

Найдено точное соотношение между радиусами кругов в комплексной плоскости и высотой комплексных алгебраических чисел, при которой круги содержат эти комплексные числа (теорема 1.4 [2]), что позволяет перенести недавние результаты В. Берника и Ф. Гётце на поле комплексных чисел.

Установлена связь между количеством алгебраических чисел, лежащих в некотором малом круге, и высотой этих чисел. Построена система комплексных алгебраических чисел, обладающих свойством регулярности (теоремы 2.1, 2.2 [3, 4]). Ранее такие теоремы были установлены только для интервалов и кругов фиксированной длины и площади.

Построена система p-адических чисел в цилиндрах малой меры Хаара со свойством регулярности (теоремы 3.1, 3.2 [1]). В поле p-адических чисел теоремы подобного типа доказаны впервые.

Исследовано совместное распределение комплексных алгебраических чисел в кругах малых радиусов (теоремы 4.1, 4.2, 4.3 [5]). Совместные диофантовы приближения, использованные при этом, обобщают классические теоремы В. Шмидта и В.Г. Спринджука.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации могут быть обобщены на многочлены произвольных степеней. Кроме того, эти результаты могут найти применение в теории трансцендентных чисел, а также в метрической теории диофантовых приближений. Результаты диссертации имеют фундаментальный характер и могут быть использованы для чтения спецкурсов на математических факультетах высших учебных заведений.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Budarina, N.V. On the size of *p*-adic cylinder for which the regular system of algebraic numbers can be constructed / N.V. Budarina, M.V. Lamchanovskaya // Национальная академия наук Беларуси. Труды института математики. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 96–108.

2. Ламчановская, М.В. Комплексные алгебраические числа большой высоты в кругах малого радиуса / М.В. Ламчановская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 10–14.

3. Ламчановская, М.В. Алгебраические числа третьей степени на комплексной плоскости / М.В. Ламчановская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 108–111.

4. Ламчановская, М.В. О распределении комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса на комплексной плоскости / М.В. Ламчановская, Н.И. Калоша // Национальная академия наук Беларуси. Труды института математики. – 2015. – Т. 23, № 1. – С. 84–97.

5. Ламчановская, М.В. Регулярность распределения комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса / М.В. Ламчановская, В.И. Берник // Докл. Нац. акад. навук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 13–17.

Тезисы докладов

6. Ламчановская, М.В. Об алгебраических комплексных числах в областях малой меры / М.В. Ламчановская, В.И. Берник // XI Белорусская математическая конференция : тезисы докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 нояб. 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч. 5. – С. 7–8.

7. Ламчановская, М.В. Распределение *p*-адических алгебраических чисел / М.В. Ламчановская // Международная научно-практическая конференция «Математика в современном техническом университете» : материалы конф., Киев, 19–20 апр. 2013 г. / Нац. техн. ун-т Украины «КПИ». – Киев, 2013. – С. 70–73.

8. Budarina, N.V. Metric theorem on approximation of smooth function by linear combinations of non-degenerate functions with non-monotonic error function / N.V. Budarina, M.V. Lamchanovskaya, V.I. Bernik // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула / Тул. гос. пед. ун-т. – Тула, 2015. – С. 20–22.

9. Ламчановская, М.В. О распределении алгебраических чисел в малых комплексных кругах / М.В. Ламчановская, Н.И. Калоша, Н.В. Шамукова // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. – Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 274–275.

10. Ламчановская, М.В. Регулярность распределения алгебраических чисел на комплексной плоскости / М.В. Ламчановская, Н.И. Калоша // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2016. – Ч. 5. – С. 36–38.

11. Берник, В.И. О распределении комплексных алгебраических чисел четвертой степени в кругах малого радиуса / В.И. Берник, М.В. Ламчановская // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2016. – Ч. 5. – С. 8–9.

РЕЗЮМЕ

Ламчановская Марина Валерьевна

Регулярность распределения алгебраических Чисел в кругах малых радиусов

Ключевые слова: алгебраические числа, целочисленные многочлены, свойство регулярности счетных множеств.

Целью данной работы является исследование распределения комплексных алгебраических чисел в комплексной плоскости и в поле *p*-адических чисел, получение эффективных количественных результатов в этих направлениях. Это направление теории диофантовых приближений берет свое начало в работах А. Хинчина, К. Малера. В 50-60 годах прошлого века фундаментальные результаты в этом направлении были получены В. Шмидтом, В.Г. Спринджуком, А. Бейкером. Идея доказательства основных результатов состоит в том, что множества полной меры пространств действительных, комплексных и *p*-адических чисел обладают близкими между собой аппроксимационными свойствами.

Получена оценка снизу для количества алгебраических чисел в кругах малых радиусов на комплексной плоскости.

Доказано свойство регулярности комплексных алгебраических чисел в кругах малых радиусов.

Доказано свойство регулярности систем *p*-адических алгебраических чисел из $\mathbb{Q}_p$.

Найден закон совместного распределения комплексных алгебраических чисел.

Все выносимые на защиту положения являются новыми и могут быть использованы в качестве основы для обобщения на случай многочленов произвольной степени.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут использоваться в научных исследованиях в области теории диофантовых приближений. Кроме того материалы диссертации могут использоваться в учебном процессе при чтении лекций и написании пособий по соответствующим разделам теории чисел для студентов математических и технических специальностей университетов.

Область использования: теория трансцендентных чисел, метрическая теория диофантовых приближений, вероятностная теория чисел.

РЭЗЮМЭ

Ламчаноўская Марына Валер’еўна

Рэгулярнасць размеркавання алгебраічных лікаў у кругах малых радыюсаў

Ключавыя словы: алгебраічныя лікі, цэлалікавыя паліномы, уласцівасць рэгулярнасці злічальных мностваў.

Мэтай дадзенай работы з'яўляецца даследаванне размеркавання камплексных алгебраічных лікаў у камплекснай плоскасці і ў полі *p*-адычных лікаў, атрыманне эфектыўных колькасных ацэнак у гэтых напрамках.

Гэты напрамак тэорыі дыяфантавых набліжанняў бярэ свой пачатак у работах А. Хінчына, К. Малера. У 50-60 гадах мінулага стагоддзя фундаментальныя вынікі ў гэтым напрамку былі атрыманы В. Шмідтам, В.Г. Спрынджуком, А. Бэйкерам. Ідэя доказу асноўных вынікаў палягае ў тым, што мноствы поўнай меры прастораў рэчаісных, камплексных і *p*-адычных лікаў маюць падобныя паміж сабой уласцівасці апраксімацый.

Атрымана ацэнка знізу для колькасці алгебраічных лікаў у кругах малых радыюсаў на камплекснай плоскасці.

Даказана ўласцівасць рэгулярнасці камплексных алгебраічных лікаў у кругах малых радыюсаў.

Даказана ўласцівасць рэгулярнасці сістэм *p*-адычных алгебраічных лікаў з $\mathbb{Q}_p$.

Знойдзены закон супольнага размеркавання камплексных алгебраічных лікаў.

Усе вынесеныя на абарону палажэнні з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаны ў якасці асновы для абагульнення на выпадак паліномаў адвольных ступеняў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць выкарыстоўвацца ў навуковых даследаваннях у галіне тэорыі дыяфантавых набліжанняў. Акрамя таго матэрыялы дысертацыі могуць выкарыстоўвацца ў навучальным працэсе пры чытанні лекцый і напісанні дапаможнікаў па адпаведных раздзелах тэорыі лікаў для студэнтаў матэматычных і тэхнічных спецыяльнасцяў універсітэтаў.

Галіна прымянення: тэорыя трансцэндэнтных лікаў, метрычная тэорыя дыяфантавых набліжанняў, імавернасная тэорыя лікаў.

SUMMARY

Lamchanouskaya Maryna

The regularity of the distribution of algebraic numbers in circles of small radius

Keywords: algebraic numbers, integral polynomials, regularity of countable sets.

In this work we study the distribution of complex algebraic numbers in the complex plane and in the field of *p*-adic numbers, and obtaining effective quantitative estimates in this direction.

This area of diophantine approximation originates from the papers of A. Khintchine and K. Mahler. In the 1950s and 1960s fundamental results in this area were obtained by W. Schmidt, V. Sprindzuk, and A. Baker. The proofs of the main results of this work are based on the idea that sets of full measure in the spaces of real, complex and *p*-adic numbers have similar approximation properties.

A lower estimate for the quantity of algebraic numbers in circles of small radius in the complex plane was obtained.

Regularity for sets of complex algebraic numbers in circles of a small radius was proved.

Regularity for systems of *p*-adic algebraic numbers in $\mathbb{Q}_p$ was proved.

A law for the simultaneous distribution of complex algebraic numbers was found.

All the results listed above are new and can be used to obtain generalizations of the above results for polynomials of an arbitrary degree.

Recommendations for application. The results are theoretical in nature. They can be used for scientific research related to the theory of diophantine approximations. In addition the content of the thesis can be used in education for preparing lectures and training materials in number theory aimed at university students of mathematics and other exact sciences.

Areas of applications: theory of transcendental numbers, metric theory of diophantine approximation, probability number theory.

Научное издание

ЛАМЧАНОВСКАЯ Марина Валерьевна

РЕГУЛЯРНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В КРУГАХ МАЛЫХ РАДИУСОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 21.10.2016. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,2.
Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 60 экз. Заказ № 604.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий №1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель