УДК 514.765.12

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

В работе представлена локальная классификация трехмерных симметрических однородных пространств, допускающих нормальную связность. В статье рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, исследованы алгебры голономии однородных пространств и найдено, когда инвариантная связность нормальна. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: нормальная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

NORMAL CONNECTIONS ON SYMMETRIC MANIFOLDS

In this article we present a local classification of three-dimensional symmetric homogeneous spaces allowing a normal connection. We have considered the case of the unsolvable Lie group of transformations. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. We describe invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors. We have studied the holonomy algebras of homogeneous spaces and have found when the invariant connection is normal. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Key words: normal connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

Введение. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан для риманова многообразия (см. [1]). Многообразия с плоской нормальной связностью исследовали Д. И. Перепелкин и Ф. Фабрициус-Бьерре, а также Э. Картан. Итоги этих исследований подведены в монографии Б. Чена [2]. Симметрические пространства обладают математически красивыми свойствами – это пространства аффинной связности без кручения, тензор кривизны которых сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков, классификация римановых симметрических пространств получена Э. Картаном, им была решена и задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами (см. [3]). Трехмерные редуктивные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, изучались в [4], симметрические однородные пространства с разрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, исследуются в [5], где приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нормальные связности на симметрических многообразиях, но внимание сосредоточено на пространствах, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

1. Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется эффективной, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G для $\bar{G}$ и инволютивного автоморфизма σ для $\bar{G}$ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x,\ y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + {} + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Будем говорить, что связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$.

2. Классификация симметрических пространств. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема 1. Все трехмерные симметрические однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), локально имеют следующий вид:

1.1.5	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.5	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.6	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	e_1	0	0
u_3	0	0	0	0

,

2.9.12	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

3.19.14	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

3.21.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

.

Замечание. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала описаны трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Из них выбраны симметрические пары с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, допускающие нормальную связность, т. е. для которых $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$.

Если $\mathfrak{g}$ – разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ задает трехмерное симметрическое однородное пространство, допускающее нормальную связность, $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой и $\mathfrak{g}\neq\{0\}$, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$1.1\ \begin{bmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ 1.3\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x\\ -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ 2.9\ \begin{bmatrix} y & 0 & x\\ 0 & -2y & 0\\ 0 & 0 & 2y\end{bmatrix};$$

$$3.19\ \begin{bmatrix} 0 & y & z\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & -x\end{bmatrix};\ 3.21\ \begin{bmatrix} 0 & y & z\\ 0 & 0 & x\\ 0 & -x & 0\end{bmatrix}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пару типа 1.1. Из тождества Якоби следует, что $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=\beta_1u_1$, $[u_2,u_3]=\gamma_2u_2$. Если $\beta_1+\gamma_2\neq0$, то $a_1=\alpha_3=0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре, не входящей в рассматриваемый в работе класс пар. При $\beta_1+\gamma_2=0$, $a_1\neq0$ и $\alpha_3\neq0$ пара эквивалентна 1.1.5. При $\beta_1+\gamma_2=0$, $a_1\alpha_3=0$ пара эквивалентна одной из пар, не входящих в изучаемый в работе класс.

Рассмотрим теперь пару типа 1.3. Тогда $[e_1,u_1]=-u_2,[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_1]=pe_1, p\in\mathbb{R}$. Из тождества Якоби получим $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=\beta_1u_1,[u_2,u_3]=\beta_1u_2$. При $\alpha_3=0, a_1\neq0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна 1.3.5 или 1.3.6 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_{5(6)}\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1,\pi(u_1)=\sqrt{|a_1|}u_1$, $\pi(u_2)=\sqrt{|a_1|}u_2,\pi(u_3)=u_3$. Пары 1.3.5 и 1.3.6 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви $(\bar{\mathfrak{g}}_6,\mathfrak{g}_6)$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а подалгебра Леви $(\bar{\mathfrak{g}}_6,\mathfrak{g}_6)$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. В остальных случаях $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар, не входящих в рассматриваемый в работе класс.

Рассмотрим теперь подалгебру 3.21. Тогда

$$[e_1,u_1]=0,[e_2,u_1]=pe_2,[e_3,u_1]=pe_3,$$

$$[e_1,u_2]=qe_3-u_3,[e_2,u_2]=u_1,[e_3,u_2]=pe_1,$$

$$[e_1,u_3]=u_2+re_3,[e_2,u_3]=-pe_1,[e_3,u_3]=u_1,$$

при $p\neq0$ пространство не является симметрическим. Если $p=0$, то имеем: при $r\neq0$ пространство также не является симметрическим, при $a_2=r=0$ пара эквивалентна тривиальной паре, алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр, при $a_2>0$, $r=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.6 (это пространство является симметрическим), при $a_2<0$, $r=0$ пара эквивалентна 3.21.7. Заметим, что $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_6$, $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$, подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_6$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, а подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_7$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$. Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Остальные случаи исследуются аналогично.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 2. Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют вид $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$) сопряжена только одной из подалгебр

$$3.3\ \begin{bmatrix} x & y & 0\\ z & -x & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ 3.4\ \begin{bmatrix} x & y & 0\\ z & 0 & y\\ 0 & z & -x\end{bmatrix};\ 3.5\ \begin{bmatrix} 0 & y & x\\ -y & 0 & z\\ -x & -z & 0\end{bmatrix}.$$

Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

.

Доказательство. Все тривиальные однородные пространства являются симметрическими. В теореме выписаны неразрешимые подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, допускающие нормальную связность. Аналогично приведенному выше, если $\mathfrak{g}$ – неразрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ нетривиальная симметрическая, допускающая нормальную связность, а $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из подалгебр 3.4, 3.5. Найдем изотропно-точные пары.

Рассмотрим пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 3.4. Пусть $\mathfrak{h}$ (нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$) порождена вектором e_1, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3$, $[u_1,u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$, тогда, использовав тождество Якоби, получим, что $[u_1,u_2] = a_2e_2 + \alpha_1u_1$, $[u_1,u_3] = -a_2e_1 + \alpha_1u_2$, $[u_2,u_3] = -a_2e_3 + \alpha_1u_3$. Положим $p = a_2 + \alpha_1^2/4$. При $p = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = u_1 - (\alpha_1/2)e_2$, $\pi(u_2) = u_2 + (\alpha_1/2)e_1$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_1/2)e_3$. При $p > 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна 3.4.2, при $p < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна 3.4.3.

Поскольку $\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g}_1)$ не эквивалентна $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_3$ – простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$), пары $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Рассмотрим пару типа 3.5. В силу тождества Якоби (с учетом того, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли) $[u_1,u_2] = a_2e_2 + \alpha_3u_3$, $[u_1,u_3] = a_2e_1 - \alpha_3u_2$, $[u_2,u_3] = a_2e_3 + \alpha_3u_1$. Положим $p = |a_2 - \alpha_3^2/4|^{-1/2}$ при $a_2 \neq \alpha_3^2/4$.

1. $4a_2 = \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = u_1 + (\alpha_3/2)e_3$, $\pi(u_2) = u_2 - (\alpha_3/2)e_1$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_3/2)e_2$.

2. $4a_2 > \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна 3.5.2 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$.

3. $4a_2 < \alpha_3^2$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 3.5.3 определяется $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$.

Поскольку $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \{0\}$ и $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2) = \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3) = \{0\}$, ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна тривиальной паре. Заметим, что алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$). Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентны.

3. Связности на симметрических пространствах. Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Находим алгебры голономии указанных связностей и определяем, когда аффинная связность нормальна.

Подалгебра $\mathfrak{g}$ – разрешима. Рассмотрим, например, пару 2.9.12. Прямыми вычислениями получим $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Тензор кривизны имеет вид, указанный ниже. Алгебра, порожденная множеством $R(u_i,u_j)$, т. е. $V = \{[\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, алгебра голономии совершенна). Действительно, поскольку связность тривиальна, $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V] =$

$=[\Lambda(\mathfrak{g}),V]=V$, так как $\Lambda(\mathfrak{g})$ совпадает с V. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}=\Lambda(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{h}^{*}=\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, т. е. связность нормальна. Тензор кручения нулевой. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, прямыми вычислениями находим, что аффинные связности имеют следующий вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&r_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&q_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\q_{3,1}&0&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{2,2}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&p_{2,3}\\p_{3,1}&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}\\-p_{3,2}&p_{3,1}&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&0\\-r_{1,2}&r_{1,1}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$
2.9.12	тривиальная (нулевая)

Тензоры кривизны и кручения:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
3.21.6, 3.21.7	$\begin{pmatrix}0&\mp1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\mp1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\mp1\\0&\pm1&0\end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix}p_{1,3}q_{3,1}-1&0&0\\0&-p_{3,2}q_{2,3}+1&0\\0&0&p_{3,2}q_{2,3}-p_{1,3}q_{3,1}\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}r_{2,2}-r_{3,3}p_{3,2}&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3}\\q_{3,1}r_{1,1}-r_{3,3}q_{3,1}&0&0\end{pmatrix}$
1.3.5, 1.3.6	$\begin{pmatrix}-A&H\mp1&0\\-H\pm1&-A&0\\0&0&2A\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3}\\0&0&p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3}\\B&C&0\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3}\\D&F&0\end{pmatrix},$ $A=-p_{2,3}p_{3,1}+p_{1,3}p_{3,2}$ $H=p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}$ $B=p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}$ $C=p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}$ $D=-p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2}$ $F=p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}$
2.9.12	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0,0,0),(0,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},0,0)$
3.21.6, 3.21.7	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
1.1.5	$(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}),(p_{1,3}-r_{1,1},0,0),$ $(0,q_{2,3}-r_{2,2},0)$
1.3.5, 1.3.6	$(0,0,2p_{3,2}),(p_{1,3}-r_{1,1},p_{2,3}+r_{1,2},0),$ $(-p_{2,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},0)$
2.9.12	нулевой

Алгебры голономии:

Пара	Алгебра голономии
2.9.12	$\begin{pmatrix}p_2&0&p_1\\0&-2p_2&0\\0&0&2p_2\end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&p_2&p_1\\0&p_3&0\\0&0&-p_3\end{pmatrix}$

3.21.6, 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$

У пар 2.9.12, 3.19.14, 3.21.6 и 3.21.7 связность является нормальной.

Подалгебра $\mathfrak{g}$ *– неразрешима.*

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для пары 3.4.2 связность нормальна при $p_{1,2}{}^2 \neq 1$; для 3.4.3 и 3.5.2 связность является нормальной, у 3.5.3 – нормальна при $p_{2,3}{}^2 \neq 1$.

Тензоры кривизны и кручения:

Пара	Тензор кривизны
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}{}^2 \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}{}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2 \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}{}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}{}^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}{}^2 \mp 1 & 0 \\ p_{2,3}{}^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}{}^2 \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 \mp 1 \\ 0 & p_{2,3}{}^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.4.2, 3.4.3	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0), (0,0,2p_{1,2})$
3.5.2, 3.5.3	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0), (-2p_{2,3},0,0)$

Пара		Алгебра голономии
3.4.3		$\begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$
3.4.2	$p_{1,2}{}^2 \neq 1$	
3.4.2	$p_{1,2}{}^2 = 1$	нулевая
3.5.2		$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.3	$p_{2,3}{}^2 \neq 1$	
3.5.3	$p_{2,3}{}^2 = 1$	нулевая

Заключение. Таким образом, приведена в явном виде полная классификация трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей и определено, когда аффинная связность нормальна.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на симметрических пространствах.

Литература

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.

2. Chen B. Y. Geometry of submanifoids // Pure and Appl. Math. New York: Marcel Dekker. 1973. Vol. 10, no. 22. 308 p.

3. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства // Сборник работ. М., 1949. 384 с.

4. Можей Н. П. Нормальные связности на редуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 6. С. 28–36.

5. Можей Н. П. Канонические связности на трехмерных симметрических пространствах разрешимых групп Ли // Труды БГТУ. 2017. № 3: Физ.-мат. науки и информатика. С. 8–13.

References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p. (In Russian).

2. Chen B. Y. Geometry of submanifoids. *Pure and Appl. Math*. New York, Marcel Dekker, 1973, vol. 10, no. 22. 308 p.

3. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskie prostranstva. Sbornik rabot* [The geometry of Lie groups and symmetric spaces. Collected works]. Moscow, 1949. 384 p.

4. Mozhey N. P. Normal connections on reductive homogeneous spaces with an unsolvable transformation group. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 6, pp. 28–36 (In Russian).

5. Mozhey N. P. Canonical connections on three-dimensional symmetric spaces solvable Lie groups. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2017, no. 3: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 8–13 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 14.04.2017