ИССЛЕДОВАНИЕ КОГОМОЛОГИЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГОБРАЗИЯХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Н. П. Можей, кандидат физико-математических наук, УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», г. Минск

У систем аналитических вычислений широкая область применения в разных отраслях науки, поскольку они имеют большой выбор инструментов, позволяющий решать научные задачи, обладают универсальными возможностями, причем постоянно совершенствуются, развивая, в частности, математический аппарат; геометрия, в том числе и дифференциальная, использует современные компьютерные технологии для исследования своих проблем, например, пакеты прикладных программ применяются в классификационных задачах. Данная работа посвящена применению математических пакетов для нахождения когомологий на трехмерных однородных пространствах, наиболее эффективное решение возможно, в частности, в системе Maple.

Пусть M – многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$ (M, $\bar{G}$) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно–точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Поскольку однородное пространство допускает аффинную связность, $\mathfrak{g}$–модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Все такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [1]. Далее для каждой такой пары вычисляем когомологии.

Алгебра когомологий любого гладкого многообразия M совпадает с алгеброй когомологий внешних форм на M. В работе [2] рассматриваются приложения аппарата когомологий алгебр Ли к изучению когомологии главных расслоений и однородных пространств. Обозначим через $d(\alpha)$ внешнюю производную дифференциальной формы α, через C_1 – множество $(p-1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, C_2 – множество p–форм, C_3 – множество $(p+1)$–форм и т.д, пусть C – множество $\{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$, пустое множество будем записывать $\{\}$. Пусть $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – пространство внешних p–форм, p–форма α из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ замкнута, если $d(\alpha) = 0$, и точная, если $\alpha = d(\beta)$ для некоторой $(p-1)$–формы β из $A^{(p-1)}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Алгебра Ли когомологий $H^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ степени p – векторное пространство замкнутых p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ по модулю точных p–форм из $A^p(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Обозначим H_1 – множество p–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_2, H_2 – множество $(p+1)$–форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, образующих базис когомологий C_3, и т.д., т.е. $H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots\}$ – множество замкнутых форм на $\bar{\mathfrak{g}}$, задающих базис когомологий на $\bar{\mathfrak{g}}$.

Начнем с построения трехмерных однородных пространств. Используем пакет DifferentialGeometry, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Для этого задаем структурные константы для этой алгебры Ли и используем команду DGsetup, чтобы ее инициализировать. Для подалгебры изотропии $\mathfrak{g}$ однородного пространства, которое мы построили, указываем базис подалгебры**.** Далее займемся построением однородного пространства. Находим глобальную группу Ли $\bar{G}$, такую, что ее алгебра Ли совпадает с $\bar{\mathfrak{g}}$. Команда LieGroup пакета GroupActions строит глобальную группу Ли, алгебра Ли которой задана.

Рассмотрим, например, случай, когда алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ четырехмерна, а ее таблица умножения имеет вид $[e_1, e_2] =-e_1$ (остальные структурные константы нулевые), при этом подалгебра h = $[e_1]$. Определим по алгебре локальные координаты группы Ли $\bar{G}$, транзитивно действующей на однородном пространстве. Сначала определим группу при помощи команд DGsetup и LieGroup. Умножение элемента группы с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) на элемент группы с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) выглядит следующим образом (функция LeftMultiplication):

$$(x_1=a_1+x_1e^{-a2}, x_2=x_2+a_2, x_3=x_3+a_3, x_4=x_4+a_4)$$

Применяя LieDerivative, pdsolve, Transformation, ComposeTransformations, находим действие $\bar{G}$ на M как композицию проекции π, левого умножения dotLeft группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения σ:

$$(x=a_1+xe^{-a2}, y=y+a_3, z=z+a_4)$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation) группы G на многообразии M: $[D_x, -xD_x, D_y, D_z]$. Используя команду IsotropySubalgebra, получаем стабилизатор, т.е. группу G $[-xD_x]$.

Вычислим теперь когомологии трехмерного однородного многообразия. Используем пакеты LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology, зададим LieAlgebraData алгебру Ли с указанной таблицей умножения. Находим когомологии C := RelativeChains(h); H := Cohomology(C).

Получим

$$C=\{\{\},\{\theta_3, \theta_4\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\},\{\}\}, H=\{\{\theta_4, \theta_3\},\{-\theta_3 \wedge \theta_4\},\{\}\}.$$

Применение системы компьютерной математики Maple позволяет облегчить трудоемкие вычисления и справиться с проблемами, которые многие ученые ранее считали неразрешимыми.

Список литературы:

1. Можей, Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

2. Greub, W. Connections, curvature and cohomology / W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone - Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.– L., 1975.