

УДК 519.2

## МАСКИРОВКА ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.В. ОВСЯННИКОВ<sup>1</sup>, В.М. КОЗЕЛ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 28 сентября 2017

**Аннотация.** В работе рассмотрена методика маскировки траектории динамической системы стохастическим процессом с заданными свойствами. Приведены количественные соотношения, позволяющие оценить качество маскировки базовой траектории динамической системы. Результаты моделирования подтверждают применимость предложенной методики.

**Ключевые слова:** маскировка динамической системы, стохастическая траектория, заданные свойства, контрольные точки и области.

**Abstract.** The technique proposed in this paper makes it possible to mask the trajectory of a dynamic system with a stochastic process with given properties. The calculated relationships shown in this paper demonstrate the effectiveness of such camouflage in comparison with the simple stochastic expansion of the dynamic system model. The obtained results can be used in theoretical and applied studies devoted to the behavior, formation and modeling of trajectories of dynamic systems. The simulation results confirm the applicability and effectiveness of the proposed methodology.

**Keywords:** masking a dynamic system, stochastic trajectory, the desired properties, checkpoints and region.

**Doklady BGUIR. 2017, Vol. 110, No. 8, pp. 33-40**

**Masking trajectories of a dynamic system of stochastic processes with a given set of properties**

**A.V. Ausiannikau, V.M. Kozel**

### Введение

Исследование поведения траекторий динамических систем (ДС), их формирование и моделирование являются актуальными задачами, имеющими прикладную направленность. В частности, одной из таких задач может выступать маскировка (маскирование, скрытие) реальной, базовой траектории ДС.

В простейшем случае идеализированная детерминированная математическая модель динамического объекта (сообщения, сигналы, системы) может быть дополнена компонентой, отражающей наличие комбинаций внешних и внутренних случайных факторов. В динамике такая модель может быть представлена стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). Известны стохастические расширения детерминированных динамических моделей: стохастические аттракторы [1], стохастические финансово-экономические модели [2], стохастические модели в задачах управления ДС [3], в частности, управления подвижными объектами [4], управления запасами [5] и т. д. Например, в радиотехнической сфере имеет место энергетическая маскировка информационного сигнала. С другой стороны, энергетическое скрытие информационного сигнала можно рассматривать как задачу гарантированного приема полезного сигнала в условии существенно малых отношений сигнал-шум.

В описанных выше ситуациях имеет место аддитивное добавление шума с заданными свойствами к используемой детерминированной модели. Однако такое стохастическое расширение модели ДС, с точки зрения маскировки, сокрытия в шуме ее траектории, не является эффективным. В этой связи целесообразно использовать подход, предложенный в [6], а именно – маскировку траектории ДС стохастическим процессом. Такая маскировка траектории ДС заключается в функциональном преобразовании ее траектории на основе стохастического дифференциального уравнения с заданными функциями и характеристиками.

Цель работы – проанализировать и показать на примерах возможность и эффективность функциональной маскировки траектории ДС стохастическим процессом, формируемым на основе модели стохастического дифференциального уравнения с заданными свойствами.

### Общая схема маскировки траектории динамической системы стохастическим процессом с заданными свойствами

Будем рассматривать многомерный стохастический процесс  $\mathbf{x}_t = \{x_{ti}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , заданный нелинейным СДУ

$$\dot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{a}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{G}\mathbf{N}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_t = d\mathbf{x}_t / dt, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a} = [a_i(x_{ti})]$  – вектор-столбец  $n \times 1$ , содержащий нечетные функции с  $a_i(0) = 0$ , коэффициентом сноса  $\lim_{\tau \rightarrow 0} E\tau^{-1} |x_{t,i} - x_{t-\tau,i}| = a_i$  и  $\int_0^t a_i^2 ds < \infty$  при  $t \geq 0$ ;  $\mathbf{G}$  – матрица  $n \times n$  постоянных положительных коэффициентов;  $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$  – матрица коэффициентов диффузии;  $\mathbf{N}_t$  – вектор-столбец  $n \times 1$  с элементами, являющимися производными по времени от винеровского процесса и представляющими собой белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $E\mathbf{N}_t\mathbf{N}_{t+\tau} = \mathbf{I}\delta(\tau)$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица  $n \times n$ ;  $E(\cdot)$  – операция усреднения по множеству реализаций.

Базовая траектория ДС описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t + \mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(t_0), \quad (2)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_t = \{\tilde{x}_{ti}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – вектор состояния системы, задающий ее базовую траекторию;  $\mathbf{v}_t$  – вектор управления  $n \times 1$ .

Маскировка базовой траектории ДС (2) осуществляется с использованием модификации (1) в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{u}_t \mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = \mathbf{G}\mathbf{N}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \quad (3)$$

В уравнении (3)  $\mathbf{u}_t$  – матричная функция управления размерностью  $n \times n$ , содержащая модулирующие детерминированные неотрицательные функции. В общем случае эта матрица определяет профиль маскированной траектории ДС. Функция управления  $\mathbf{u}_t$  решает задачу маскировки базовой траектории  $\tilde{\mathbf{x}}_t$  стохастическим процессом (3) на достаточно длинном временном интервале и только в некоторой окрестности заданных контрольных точек (областей) фазового пространства обеспечивает выполнение равенства  $\mathbf{x}_t^k = \tilde{\mathbf{x}}_t^k$ , где  $k = \overline{1, K}$  – номер контрольной точки (области).

Далее будем рассматривать случай, когда все элементы матриц  $\mathbf{u}_t$ ,  $\mathbf{G}$ , кроме элементов главной диагонали, равны нулю, т. е.  $\mathbf{u}_t = \text{diag}[u_{ti}]$ ,  $\mathbf{G} = \text{diag}[g_i]$ ,  $g_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Также будем полагать, что имеет место ограничение

$$0 \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \mathbf{u}_{\max} = \text{diag}[u_{\max i}]. \quad (4)$$

В моменты времени, соответствующие контрольным точкам или областям фазового пространства  $t \in \Delta t_k$ , функция управления  $\mathbf{u}_t$  становится равной  $\mathbf{u}_{\max}$ . Очевидно, в случае

больших численных значений  $\mathbf{u}_{\max}$  уравнение (3) приближенно может быть представлено нелинейным решающим правилом

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{t \in \Delta t_k} - \tilde{\mathbf{x}}_{t \in \Delta t_k}) = 0, \quad (5)$$

и если при этом иметь в виду условие  $\mathbf{a}(0) = 0$ , то траектория процесса  $\mathbf{x}_t$  соответствует уравнению

$$\mathbf{x}_{t \in \Delta t_k} = \tilde{\mathbf{x}}_{t \in \Delta t_k}, \quad (6)$$

т. е. становится детерминированной, соответствующей базовой траектории ДС (2)

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t \in \Delta t_k} = - \int_t^{t+\Delta t_k} \mathbf{F}_s(\tilde{\mathbf{x}}_s, \mathbf{v}_s) ds \text{ на протяжении заданного временного отрезка } \Delta t_k.$$

Проанализируем качественные характеристики такой схемы маскировки. Математическое ожидание процесса (3) определяется дифференциальным уравнением  $\dot{\mathbf{m}}_t + \mathbf{u}_t \mathbf{E} \mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = 0$ ,  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}(t_0)$ . Вычитая из (2) последнее уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно абсолютной ошибки двух моделей

$$\dot{\Delta}_t = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t - \dot{\mathbf{m}}_t = - [\mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) - \mathbf{u}_t \mathbf{E} \mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t)].$$

В линейном приближении в окрестности точек  $\mathbf{x}_t = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_t = 0$ , когда справедливы уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) \approx \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'_0(\mathbf{m}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = \mathbf{a}'_0(\mathbf{m}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = -\mathbf{a}'_0 \Delta_t, \\ \mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) \approx \mathbf{F}_{t0} + \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{x}}_t + \mathbf{F}'_{tv0} \mathbf{v}_t, \end{cases} \quad (7)$$

получаем линейное дифференциальное уравнение абсолютной ошибки

$$\dot{\Delta}_t \approx -\mathbf{u}_t \mathbf{a}'_0 \Delta_t - \mathbf{F}'_{tx} \tilde{\mathbf{x}}_t - \mathbf{F}'_{tv} \mathbf{v}_t - \mathbf{F}_{t0}, \quad (8)$$

где решение  $\tilde{\mathbf{x}}_t$  системы (2) в условиях (7) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-t_0)} \tilde{\mathbf{x}}_0 - [\mathbf{I} - e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-t_0)}] (\mathbf{F}'_{tx0})^{-1} \mathbf{F}_{t0} - \mathbf{F}'_{tv0} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-s)} \mathbf{v}_s ds. \quad (9)$$

Тогда решение уравнения (8) с учетом (9) в случае  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{\max}$  и  $\mathbf{v}_t = 0$  будет следующим:

$$\Delta_{t \in \Delta t_k}(\mathbf{u}_{\max}) = e^{-\mathbf{u}_{\max} \mathbf{a}'_0 t} \Delta_{t_k} + [e^{-\mathbf{F}'_{tx0} t} - e^{-\mathbf{u}_{\max} \mathbf{a}'_0 t}] (\mathbf{F}'_{tx0} - \mathbf{u}_{\max} \mathbf{a}'_0)^{-1} (\mathbf{F}_{t0} + \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{x}}_0), \quad \Delta_{t_k} = \Delta(t_k), \quad (10)$$

где  $t_k$  – начальный момент времени интервала  $\Delta t_k$ . Если в моменты времени  $t \notin \Delta t_k$  функция  $\mathbf{u}_t = 0$ , что соответствует чисто диффузионному многомерному стохастическому процессу (3),

абсолютная ошибка будет определяться уравнением  $\Delta_{t \in \Delta t_k}(\mathbf{u}_t = 0) = \Delta_{t0} - \int_{t_0}^t \mathbf{F}_s(\tilde{\mathbf{x}}_s, \mathbf{v}_s) ds$  или в линейном приближении (7)

$$\Delta_{t \in \Delta t_k}(\mathbf{u}_t = 0) = \Delta_{t0} + [e^{-\mathbf{F}'_{tx0} t} - e^{-\mathbf{F}'_{tx0} t_0}] (\mathbf{F}'_{tx0})^{-1} (\mathbf{F}_{t0} + \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{x}}_0). \quad (11)$$

Полученные решения (10), (11) определяют качественные характеристики предложенной схемы маскирования в линейном приближении. При достаточно больших численных значениях матрицы  $\mathbf{u}_{\max} \rightarrow \infty$  вектор  $\Delta_{t \in \Delta t_k}(\mathbf{u}_{\max})$  с большей скоростью стремится к нулю, тем самым обеспечивается равенство (6).

Следует отметить важную особенность рассматриваемой схемы маскировки, состоящую в преобразовании (масштабировании) динамического диапазона базовой траектории ДС (2) в динамический диапазон процесса (3). В общем случае базовая траектория (2) является нестационарной и нелинейной, однако траектория процесса (3) стационарна. Эффект такого масштабирования будет проиллюстрирован ниже на примерах моделирования.

### Стохастическое расширение модели ДС и ее маскировка стохастическим процессом

Сравним две схемы маскировки траектории ДС. Первая организуется аддитивным добавлением шума к модели ДС:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t + \mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) = \mathbf{GN}_t, & \tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(t_0) \text{ или} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t + \mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) = \xi_t, & \tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(t_0), \\ \dot{\xi}_t + \mathbf{a}_\xi(\xi_t) = \mathbf{GN}_t, & \xi_0 = \xi(t_0), \end{cases}$$

где  $\xi_t$  – многомерный стохастический процесс с заданными статистическими свойствами.

Вторая схема маскировки, предложенная в данной работе, имеет вид СДУ (3) или

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{u}_t \mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = \xi_t, & \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \\ \dot{\xi}_t + \mathbf{a}_\xi(\xi_t) = \mathbf{GN}_t, & \xi_0 = \xi(t_0). \end{cases}$$

Рассмотрим среднее значение абсолютной разности между аддитивной и функциональной схемой маскирования  $\delta_t = E(\tilde{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)$ , которое может быть представлено дифференциальным уравнением

$$\dot{\delta}_t = -E\mathbf{F}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathbf{v}_t) + \mathbf{u}_t E\mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t).$$

В линейном приближении, используя (7), получаем

$$\dot{\delta}_t = -\mathbf{F}_{t0} - \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{m}}_t - \mathbf{F}'_{tv0} \mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t \mathbf{a}'_0 \delta_t, \quad \delta_0 = \delta(t=0),$$

где математическое ожидание в том же линейном приближении определяется уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{m}}}_t = -\mathbf{F}_{t0} - \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{m}}_t - \mathbf{F}'_{tv0} \mathbf{v}_t, \quad \tilde{\mathbf{m}}_0 = \tilde{\mathbf{m}}(t=0) \text{ с решением вида (9)}$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_t = e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-t_0)} \tilde{\mathbf{m}}_0 - \left[ \mathbf{I} - e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-t_0)} \right] (\mathbf{F}'_{tx0})^{-1} \mathbf{F}_{t0} - \mathbf{F}'_{tv0} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-s)} \mathbf{v}_s ds.$$

Таким образом, в линейном приближении среднее значение абсолютной разности  $\delta_t$  при фиксированном значении  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} = \text{const}$  и  $\mathbf{v}_t = 0$  определяется выражением

$$\delta_t(\mathbf{u}) = e^{-\mathbf{u}\mathbf{a}'_0(t-t_0)} \delta_0 + \left[ e^{-\mathbf{F}'_{tx0}(t-t_0)} - e^{-\mathbf{u}\mathbf{a}'_0(t-t_0)} \right] (\mathbf{F}'_{tx0} - \mathbf{u}\mathbf{a}'_0)^{-1} (\mathbf{F}_{t0} + \mathbf{F}'_{tx0} \tilde{\mathbf{x}}_0), \quad \delta_0 = \delta(t_0). \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение (12) может быть записано для конкретных значений  $\mathbf{u}_t = \{0, \mathbf{u}_{\max}\}$ , характеризующих либо полное отсутствие информации о базовой траектории ДС в процессе  $\mathbf{x}_t$ , ( $\mathbf{u}_t = 0$ ), либо практически полное отсутствие маскировки ( $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{\max}$ ), когда выполняется равенство (6).

Представляет интерес количественная оценка маскировки базовой траектории ДС. В этих целях можно ввести функцию переменного коэффициента маскировки

$$\lambda_t = (1 + u_t \mu_x)^{-1}, \quad (13)$$

где  $\mu_x = \sigma_x^2 I_f \geq 1$  – параметр, учитывающий различие функций  $a(x_t) = (g^2 / 2) d \ln f(x) / dx$  [7], зависящих от стационарной плотности  $f(x)$  процесса  $x_t$  (коэффициент амплитудного подавления [8]);  $\sigma_x^2$  – стационарная дисперсия процесса  $x_t$ ;  $I_f = E[d \ln f(x) / dx]^2$ . В случае  $u_t = 0$  процесс  $x_t$  не содержит информации о процессе  $\tilde{x}_t$  и  $\lambda_t = 1$ , для значения  $u_t = u_{\max}$  имеем  $\lambda_t = (1 + u_{\max} \mu_x)^{-1} \ll 1$  – маскировка практически отсутствует. Таким образом, функция  $0 < \lambda_t \leq 1$  численно характеризует величину маскировки базовой траектории ДС в различные моменты времени  $t$  и учитывает функциональные особенности СДУ (3). Обобщением введенной функции  $\lambda_t$  на многомерный случай (3) будет матричная функция с ненулевыми элементами только на главной диагонали  $\lambda_{ii} = (1 + u_{ij} \mu_{xi})^{-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

### Примеры маскировки траектории динамических систем стохастическим процессом

Рассмотрим некоторые примеры маскировки траекторий ДС, заданных дифференциальными уравнениями (системами) первого порядка.

*Маскировка траектории линейной управляемой системы.* Пусть базовая траектория ДС на интервале времени  $t \in [0, T]$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\tilde{x}}_t = -\alpha \tilde{x}_t + \beta v_t, \quad \tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0 = 0).$$

Решение задачи оптимального управления с квадратичным функционалом

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{x}_t^2 + v_t^2) dt + \gamma \tilde{x}_T \rightarrow \min, \quad \tilde{x}_T = \tilde{x}(t=T), \quad \gamma = \text{const} > 0$$

без ограничений на управление на основе принципа максимума имеет вид

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_0 e^{-\rho t} \frac{1 + ce^{-2\rho(T-t)}}{1 + ce^{-2\rho T}} - 2\gamma(\rho - \alpha) \frac{e^{-\rho T} \text{sh}(\rho t)}{1 + ce^{-2\rho T}}, \quad c = \frac{\rho - \alpha}{\rho + \alpha}, \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$v_t = -\beta \left( \tilde{x}_0 \frac{\text{sh}(\rho(T-t))}{\rho \text{ch}(\rho T) + \alpha \text{sh}(\rho T)} + \gamma \frac{\rho \text{ch}(\rho t) + \alpha \text{sh}(\rho t)}{\rho \text{ch}(\rho T) + \alpha \text{sh}(\rho T)} \right).$$

На рис. 1 приведены базовая (кривая 1) и маскированные (кривая 2, кривая 3) траектории ДС. Параметры моделирования:  $\alpha = \beta = 1$ ,  $x_0 = 10$ ,  $\gamma = 10$ ,  $T = 20$ ,

$$u_t = \frac{u_{\max}}{2} (2 + h + \text{th}(2(t-19)) - \text{th}(1,5t)), \quad u_{\max} = 200, \quad \text{где } h \geq 0 - \text{коэффициент, определяющий}$$

нижний уровень функции управления  $u_{\min} = u_{\max} h / 2$ . Для кривой 2, рис. 1 СДУ (3) имеет вид

$$\dot{x}_t + 0,2u_t(x_t - \tilde{x}_t) = N_t, \quad (14)$$

с параметром  $h = 0$  ( $u_{\min} = 0$ ). Такая функция управления профилем траектории обеспечивает маскировку базовой траектории чисто диффузионным процессом на интервале времени  $\Delta t_k \approx [2, \dots, 18]$ . Для кривой 3, рис. 1 СДУ (3) имеет вид

$$\dot{x}_t + 0,2u_t \text{th}(20(x_t - \tilde{x}_t)) = N_t, \quad (15)$$

с той же функцией управления  $u_t$  и параметром  $h = 0,01$  ( $u_{\min} = 1$ ). В качестве сравнения с кривой 2 и кривой 3 на том же рисунке приведена кривая 4, являющаяся реализацией стохастического процесса  $\dot{\tilde{x}}_t = -\alpha \tilde{x}_t + \beta v_t + N_t$ . Таким образом, маскировка на основе СДУ (3), очевидно, является более эффективным способом, чем простое стохастическое расширение модели ДС.

Количественная оценка маскировки имеет вид функции (13) с параметром  $\mu_x = 1$  в случае СДУ (14) и  $\mu_x \approx 2$  в случае СДУ (15) [9].

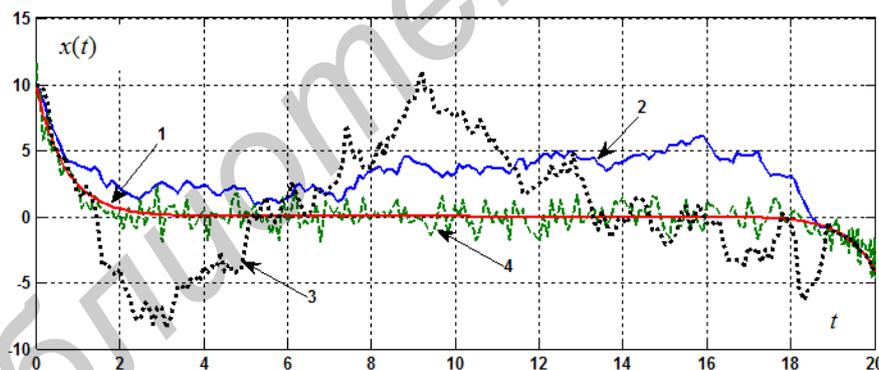


Рис. 1. Траектории ДС: 1 – базовая; 2, 3 – маскированные; 4 – с аддитивным шумом в модели ДС

*Маскировка акустического сигнала.* Рассмотрим двухкомпонентный стохастический процесс

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_t + \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{G}N_{\tilde{x}_t}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t} \\ \tilde{x}_{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}, \quad N_{\tilde{x}_t} = \begin{bmatrix} N_{\tilde{x}_1} \\ N_{\tilde{x}_2} \end{bmatrix}.$$

Такая модель, при соответствующем выборе значений параметров матриц  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , достаточно хорошо описывает звуковые (речевые) сигналы [10]. СДУ маскированного акустического сигнала имеет вид  $\dot{x}_t + u_t a(x_t - \tilde{x}_t) = gN_t$ .

На рис. 2 представлены реализации исходного  $\tilde{x}_t$  (рис. 2, а) и маскированного  $x_t$  (рис. 2, б, в) акустического сигнала, полученного на основе СДУ (3) с  $a(x_t - \tilde{x}_t) = x_t - \tilde{x}_t$

и периодической функцией управления  $u_t = \frac{u_{\max}}{2} \left[ 2 + h + \sum_{i=1}^4 (-1)^i \text{th}(c_i(t-t_i)) \right]$ , где  $c_i = 2$ ,

$h \geq 0$  – коэффициент, определяющий нижний уровень функции  $u_{\min} = u_{\max} h / 2$ ,  $t_i = [0; 15; 25; 45]$ .

На рис. 2, б приведена реализация акустического сигнала, маскированного чисто диффузионным стохастическим процессом с коэффициентом  $h = 0$  ( $u_{\min} = 0$ ). На рис. 2, в представлен акустический сигнал, маскированный гауссовским стохастическим процессом с коэффициентом  $h = 2 / u_{\max} = 0,01$  ( $u_{\min} = 1$ ).

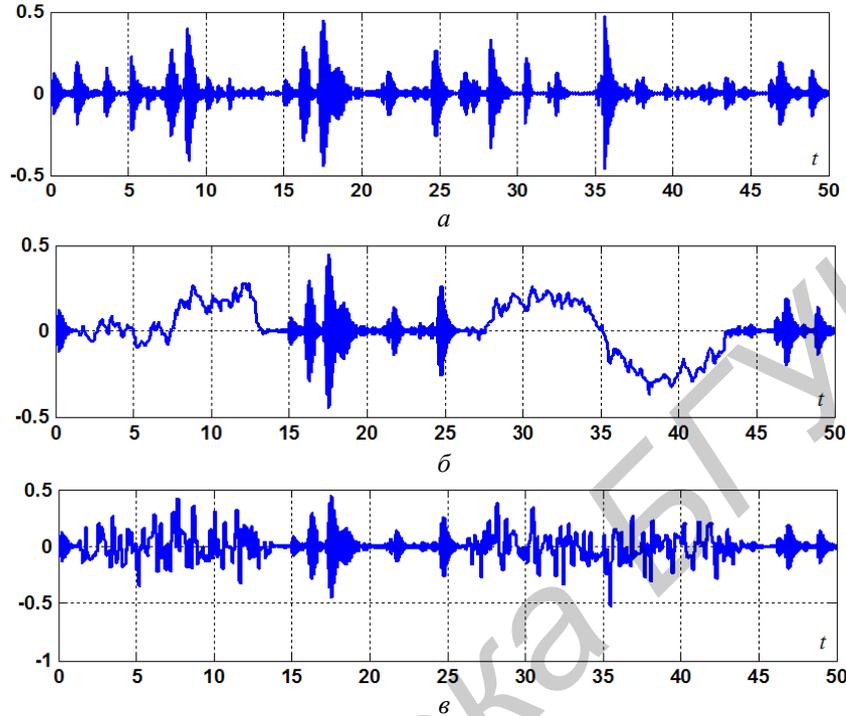


Рис. 2. Маскировка акустического сигнала: а – исходный сигнал; б – маскированный с  $u_{\min} = 0$ ; в – маскированный с  $u_{\min} = 1$

*Маскировка траектории двумерной динамической системы.* Пусть ДС описывается уравнениями [11]

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_t = -k_{11}\tilde{x}_t + k_{12}\tilde{x}_t\tilde{y}_t + k_{13}\tilde{x}_t, & \tilde{x}_0 = \tilde{x}(0), \\ \dot{\tilde{y}}_t = -k_{21}\tilde{x}_t + \frac{k_{22}\tilde{x}_t\tilde{y}_t}{(1+k_{23}\tilde{x}_t)}, & \tilde{y}_0 = \tilde{y}(0), \end{cases} \quad (16)$$

где  $k_{ij}$  – постоянные положительные коэффициенты. Система уравнений (16), аналогичная системе уравнений гармонического осциллятора, является одной из разновидностей классической модели Вольтерра-Лотки биологической системы «хищник-жертва» с запаздыванием. Модели вида (16) могут быть использованы для описания почти любой линейной или близкой к линейности физической системы, например, в квантовой механике и квантовой теории поля, теории твердого тела, электромагнитных излучений, колебательных спектров молекул и т. п.

На рис. 3, а–в приведены стохастические траектории, полученные на основе СДУ (3) с компонентами  $\mathbf{x}_t = \{x_t, y_t\}$  при различных параметрах  $h$  функции управления  $u_t = \frac{u_{\max}}{2} \left[ 2 + h + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \text{th}(c_i(t-t_i)) \right]$ ,  $c_i = 2$ ,  $u_{\max} = 200$ ,  $t_i = [200; 300]$ ,  $T = 500$ . Базовая модель ДС (16) имеет следующие параметры:  $k_1 = [1; 1; 3]$ ,  $k_2 = [1; 7,55; 0,8]$ ,  $\tilde{x}_0 = 200$ ,  $\tilde{y}_0 = 15$ , и ее траектория приведена на рис. 3, а. Общие параметры для модели (3):  $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t) = \mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t$ ,  $h = 2 / u_{\max} = 0,01$  ( $u_{\min} = 1$ ),  $x_0 = \tilde{x}_0$ ,  $y_0 = \tilde{y}_0$ . На рис. 3, б, в приведены стохастические траектории процесса (3) с  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{G} = 5\mathbf{I}$  соответственно.

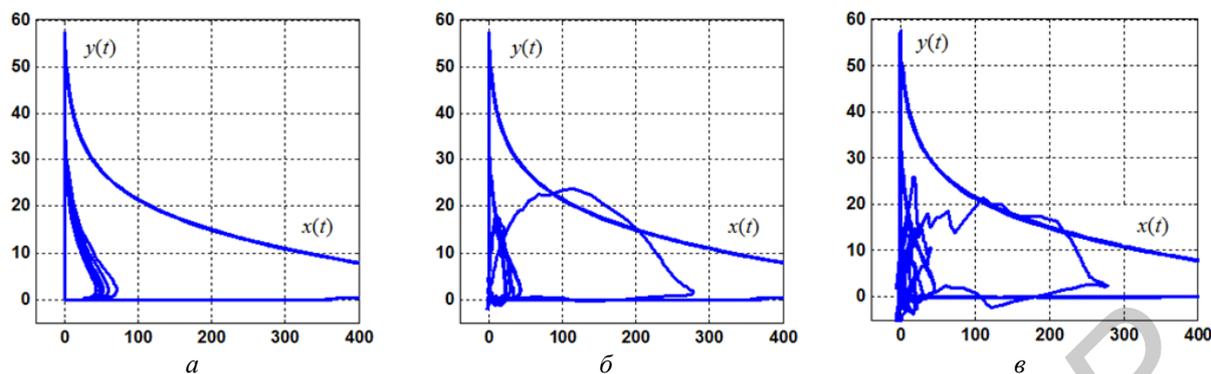


Рис. 3. Траектории:  $a$  – базовой модели ДС (16);  $b$  – процесса (3) с  $G = I$ ;  $v$  – процесса (3) с  $G = 5I$

### Заключение

Предложенная в работе методика позволяет осуществить маскировку траектории динамической системы стохастическим процессом с заданными свойствами. Приведенные в работе расчетные соотношения показывают эффективность такой маскировки по сравнению с простым стохастическим расширением модели динамической системы. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических и прикладных исследованиях, посвященных поведению, формированию и моделированию траекторий динамических систем. Результаты моделирования подтверждают применимость и эффективность предложенной методики.

### Список литературы

1. Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А. Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2010. 252 с.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М: ФАЗИС, 1998. 512 с.
3. Остром К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 324 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
5. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007. 274 с.
6. Таха Хемди А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.
7. Овсянников А.В., Козел В.М. Формирование и моделирование стохастических процессов с заданными свойствами траекторий // Докл. БГУИР. 2016. № 6 (100). С. 18–23.
8. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
9. Аналоговые и цифровые синхронно-фазовые измерители и демодуляторы / А.Ф. Фомин [и др.]. М.: Радио и связь, 1987. 248 с.
10. Овсянников А.В., Козел В.М. Анализ и применение обобщенного  $\text{sech}$  распределения // Докл. БГУИР. 2013. № 8 (78). С. 23–29.
11. Теория электрической связи / А.Т. Зюко [и др.]. М.: Радио и связь, 1999. 432 с.
12. Базыки А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.

### References

1. Rjashko L.B., Bashkirceva I.A. Stochastic attractors of nonlinear dynamic systems. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta, 2010. 252 s. (in Russ.)
2. Shirjaev A.N. Osnovy stokhasticheskoj finansovoj matematiki. T. 1. Fakty. Modeli. M: FAZIS, 1998. 512 s.
3. Ostrem K. Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriju upravlenija. M.: Mir, 1973. 324 s. (in Russ.)
4. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravlenija / Pod red. A.A. Krasovskogo. M.: Nauka, 1987. 712 s. (in Russ.)
5. Lazarev Ju.N. Upravlenie traektorijami azerokosmicheskikh apparatov. Samara: Samar. nauch. centr RAN, 2007. 274 s. (in Russ.)
6. Taha Hemdi A. Vvedenie v issledovanie operacij. M.: Izdatel'skij dom «Vil'jame», 2005. 912 s. (in Russ.)

7. Ovsjannikov A.V., Kozel V.M. Formirovanie i modelirovanie stohasticheskikh processov s zadannymi svojstvami traektorij // Dokl. BGUIR. 2016. № 6 (100). S. 18–23. (in Russ.)
8. Tihonov V.I., Kul'man N.K. Nelinejnaja fil'tracija m kvazikogerentnyj priem signalov. M.: Sov. radio, 1975. 704 s. (in Russ.)
9. Analogovye i cifrovye sinhronno-fazovye izmeriteli i demoduljatory / A.F. Fomin [i dr.]. M.: Radio i svjaz', 1987. 248 s. (in Russ.)
10. Ovsjannikov A.V., Kozel V.M. Analiz i primenenie obobshhennogo sechk raspredelenija // Dokl. BGUIR. 2013. № 8 (78). S. 23–29. (in Russ.)
11. Teorija jelektricheskoi svjazi /A.T. Zjuko [i dr.]. M.: Radio i svjaz', 1999. 432 s. (in Russ.)
12. Bazyki A.D. Nelinejnaja dinamika vzaimodejstvujushhih populjacij. Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2003. 368 s. (in Russ.)

#### **Сведения об авторах**

Овсянников А.В., к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Белорусского государственного университета.

Козел В.М., к.т.н., доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

#### **Адрес для корреспонденции**

220030, Республика Беларусь,  
г. Минск, пр. Независимости, д. 4,  
Белорусский государственный университет  
тел. +375-29-905-21-53;  
e-mail: andovs@mail.ru  
Овсянников Андрей Витальевич

#### **Information about the authors**

Ausiannikau A.V., PhD., associate professor of information technologies department of Belarusian state university.

Kozel V.M., PhD., associate professor of information radiotechnologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

#### **Address for correspondence**

220030, Republic of Belarus,  
Minsk, Nezavisimosti av., 4,  
Belarusian state university  
tel. +375-29-905-21-53;  
e-mail: andovs@mail.ru  
Ausiannikau Andrey Vital'evich.