АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ФОРСИРОВАННЫХ НАДЕЖНОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ СУММОЙ НОРМАЛЬНОГО И ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАКОНОВ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

В.И. Кириллов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

1. Общие сведения

Как известно (см., например, [1,4,8-10]), для любого произвольного за- кона вероятности безотказной работы $P(t)$, у которого известна аналитическая зависимость $f\ \ t\ \ = -dP(t)/dt$ – функция плотности вероятности безотказной работы, справедливы расчетные выражения, позволяющие определить основные показатели этого закона, в частности, k-й начальный момент M_k и k-й центральный момент D_k:

а) $M_k = {}_0^{\infty} t^k \cdot f\ \ t\ \ dt;\ k = 1,2,3, \ldots;$

б) $D_k = {}_0^{\infty}(t - M_1)^k \cdot f\ \ t\ \ dt; M_1 = M_k$ при $k = 1;$

в) при этом $P\ \ t\ \ = {}_t^{\infty} f\ \ t\ \ dt = 1 - {}_0^{t} f\ \ t\ \ dt;$ (1,а-в)

Между собой эти моменты (показатели) связаны известными соотношениями [8-10], например:

а) $M_2 = D_2 + M_1^2$; б) $M_3 = D_3 + 3D_2M_1 + M_1^3$;

в) $M_4 = D_4 + D_3M_1 + 6D_2M_1^2 + M_1^4$. (2,а-в)

Зачастую вместо (2, а-в) используют производные от них выражения:

а) $D_2 = M_2 - M_1^2$; б) $D_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$;

в) в) $D_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$. (3,а-в)

В выражениях (1-3) показатель M_1 имеет физический смысл среднего времени безотказной работы большой партии однотипных изделий и обозначается как $T_0 = M_1$, а показатель D_2 имеет смысл среднего квадрата отклонения реального времени безотказной работы каждого изделия в этой партии относительно среднего времени работы T_0. Этот показатель часто обозначается как $D_2 = \sigma_2^2$, где σ_2 – среднеквадратичное отклонение времени безотказной работы в партии изделий относительно T_0.

В тех случаях, когда закон вероятности безотказной работы используемой (или проектируемой, разработанной) технической системы (изделия) достаточно точно описывается суммой двух известных теоретических законов $P_1(t)$ и $P_2(t)$ в виде $P_c\ \ t\ \ = c_1P_1\ \ t\ \ + c_2P_2\ \ t\ \ $, где c_1 и c_2 – коэффициенты весомости соответствующего закона, то тогда характеристики и моменты суммарного (составного) закона, используя (1)-(3), могут быть выражены через характеристики и моменты известных законов в следуюшем виде [6,7]:

а) $P_c\ \ t\ \ = cP_1\ \ t\ \ + (1 - c)P_2\ \ t\ \ ; 0 \leq c \leq 1{,}0;$

б) $f_c\ \ t\ \ = -dP_c\ \ t\ \ /dt = cf_1\ \ t\ \ + (1 - c)f_2(t); f_1\ \ t\ \ = -dP_1\ \ t\ \ /dt;$

$f_2\ \ t\ \ = -dP_2\ \ t\ \ /dt;$ в) $M_{kc} = cM_{k1} + (1 - c)M_{k2};\ k = 1,2,3, \ldots;$

в) $D_{2c} = M_{2c} - M_{1c}^2 = \ cM_{2.1} + \ 1 - c\ \ M_{2.2}\ \ - \ cM_{1.1} + M_{1.2}\ \ 1 - c\ \ ^2 =$

$= c^2D_{2.1} + \ 1 - c\ \ ^2D_{2.2} + c(1 - c)(M_{2.1} + M_{2.2} - 2M_{1.1}M_{1.2});$

г) $D_{3c} = M_{3c} - 3M_{2c}M_{1c} + 2M_{1c}^3 = cM_{3.1} + \ 1-c\ M_{3.2} + 2\cdot\ cM_{1.1} + \ 1 - c\ M_{1.2}\ ^3 - 3\cdot\ cM_{2.1} + \ 1-c\ M_{2.2}\ \cdot[cM_{1.1} + (1-c)M_{1.2}]$; (4,а-е)

д) $D_{4c} = M_{4c} - 4M_{3c}\cdot M_{1c} + 6M_{2c}\cdot M_{1c}^2 - 3M_{1c}^4 = \ cM_{4.1} + \ 1-c\ M_{4.2}\ - 4\ cM_{3.1} + \ 1-c\ M_{3.2}\ \cdot\ cM_{1.1} + \ 1-c\ M_{1.2}\ + 6\ cM_{2.1} + \ 1-c\ M_{2.2}\ \cdot\ cM_{1.1} + \ 1-c\ M_{1.2}\ ^2 - 3[cM_{1.1} + \ 1-c\ M_{1.2}]^4$.

Здесь M_{kc} и D_{kc}. $k = 1,2,\ldots 4$, соответственно, k-й начальный и k-й центральный моменты составного закона; M_{k1} и M_{k2}, D_{k1} и D_{k2}, $k = 1,2,\ldots$ – соответственно, k-й начальный и k-й центральный моменты первого и второго известных законов, образующих составной закон.

Для большинства сложных технических изделий, которые состоят из многочисленных разнородных элементов (компонентов), проблема опреде-ления аналитической зависимости вероятности безотказной работы изделия $P(t)$ в зависимости от вероятности безотказной работы каждого элемента $P_Э\ t\ , i = 1,2,\ldots N_Э$, где $N_Э$ – число основных элементов, влияющих на работу изделия, представляет собой очень сложную задачу, решаемую, как правило, весьма приближенно.

В самом грубом приближении, когда отказы отдельных элементов считаются независимыми друг от друга событиями, а интенсивность отказов каждого -го элемента $\lambda_{Эi} = f_i(t)/P_i(t)$ – есть величина постоянная (не меняющаяся во времени), т.е. $\lambda_{Эi} = const = \lambda_i$, то тогда [6,7]:

$$P\ t\ = \prod_{i=1}^{N_Э} P_{Эi}\ t\ = \exp\ - \sum_{i=1}^{N_Э}\int_0^t \lambda_{Эi}\ t\ dt\ = \exp[-\sum_{i=1}^{N_Э}\lambda_i\cdot t] = \exp(-\lambda_S t), \quad (5)$$

где $\lambda_S = \sum_{i=1}^{N_Э}\lambda_i$ – интенсивность (опасность) отказа всего изделия (системы).

Используя (5), нетрудно определить функцию изделия $f(t) = -dP(t)/dt = \lambda_S\exp(-\lambda_S t)$, затем из (1)-(3) и моменты функции $P(t)$. В частности, среднее время безотказной работы изделия будет равно: $T_0 = M_1 = 1/\lambda_S$.

При сравнении расчетных показателей, полученных с использованием (5), и показателей, которые были получены непосредственно по результатам опытных испытаний этих же изделий, было обнаружено, что в большинстве случаев расчетные показатели существенно (иногда в несколько раз) отличались от экспериментальных. Очевидно, использование (применение) расчетных функций и показателей (5) на практике в этом случае могло бы серьезно отразиться на репутации производителей этих изделий.

В тех случаях, когда аналитические функции вероятности безотказной работы $P(t)$ и её плотности $f\ t\ = -dP\ t\ /dt$ неизвестны, для определения показателей закона проводят опытные испытания достаточно большой партии однотипных изделий. В зависимости от условий проведения опытных испытаний различают **форсированные** (или ускоренные) испытания и **нормальные** (или эксплуатационные).

В режиме форсированных испытаний сознательно создают **более тяжелые** условия работы используемых изделий (например, за счет повышенной температуры, повышенных или пониженных питающих напряжений, значительной вибрации, тряски, ударов и т.п.), при которых **существенно сокращается** время безотказной работы каждого изделия и, соответственно, **общее время испытания всей партии** изделий.

При правильно выбранных режимах проведения форсированных испытаний экспериментальные зависимости вероятности безотказной работы $P_Ф(t)$, плотности вероятности $f_Ф(t)$ и интенсивности отказов $\lambda_Ф(t)$ сохраняют все отличительные особенности, которые присущи аналогичным функциям $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$, измеренным в режиме нормальных (типовых эксплуатационных) испытаний. Отличие состоит только в масштабах времени: в режиме форсированных испытаний время как бы "сжимается", соответственно изменяются и показатели закона в этом режиме. Но характер закона безотказной работы, его специфические особенности при этом сохраняются такими же, как и в режиме нормальных испытаний.

Форсированные испытания проводят с достаточно представительной партией изделий, состоящей из N_0 первоначально исправных изделий, поставленных в режим форсированной (ускоренной, "тяжелой") эксплуатации. Каждому изделию присваивают свой номер j, $j \in [1, N_0]$ и фиксируют время его работы до отказа t_j. При этом $t_j \leq t_{max}$, где t_{max} – максимальное время работы до отказа последнего из партии изделия. Обработку результатов форсированных испытаний ведут в следующем порядке [4,8]:

а) делят весь рассматриваемый интервал испытаний $0 \div t_{max}$ на K одинаковых поддиапазонов длительностью $\Delta t = t_{max}/K$, где $K \geq (1 + 3{,}2 \lg N_0)$, при этом рекомендуется выбирать $K \geq 10$;

б) результаты испытаний сводят в двухстрочную таблицу вида $i - n_i$, где в верхней строке i – номер поддиапазона, $i = 1,2, \dots K$, а в нижней строке – число изделий n_i, вышедших из строя в i-ом поддиапазоне, то есть в интервале времени $[t_{i-1} \leq t \leq t_i]$, где $t_i = i \cdot \Delta t$.

По данным этой таблицы определяют выборочные значения основных характеристик безотказной работы [4]:

а) $P_Ф\ t = i\Delta t\ = P_{Ф.i} = 1 - (n_1 + n_2 + \dots + n_i)/N_0 = N_i/N_0$;

б) $P_Ф\ t = (i - 0{,}5)\Delta t\ = (P_{Ф.i-1} + P_{Ф.i})/2 = (N_{i-1} + N_i)/2N_0$;

в) $f_Ф\ \ i-1\ \Delta t \leq t \leq i\Delta t\ = f_{Ф.i} = (P_{Ф.i-1} - P_{Ф.i})/\Delta t = n_i/N_0\Delta t$;

г) $\lambda_Ф\ t = \ i - 0{,}5\ \Delta t\ = f_{Ф.i}/P_Ф\ t = \ i - 0{,}5\ \Delta t\ \cong 2f_{Ф.i}/(P_{Ф.i-1} + P_{Ф.i}) \cong$
$\cong 2n_i/\Delta t(N_i + N_{i-1})$, (6,а-г)

где N_i – число изделий, остающихся исправными к моменту $t = t_i$.

В качестве числовых оценок (показателей) выборочных функций (6,а-г) используют так называемые выборочные начальные m_e и центральные d_e моменты ($e = 1,2,3,4, \dots$) [4,8]:

а) $m_1 = \sum_{i=1}^{k} t_i f_{Ф.i}\Delta t = (\Delta t/N_0) \sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)\, n_i$;

б) $m_2 = \sum_{i=1}^{k} t_i^2 f_{Ф.i}\Delta t = (\Delta t^2/N_0) \sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^2\, n_i$; (7,а-ж)

в) $m_3 = \sum_{i=1}^{k} t_i^3 f_{Ф.i}\Delta t = (\Delta t^3/N_0) \sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^3\, n_i$;

г) $m_4 = \sum_{i=1}^{k} t_i^4 f_{Ф.i}\Delta t = (\Delta t^4/N_0) \sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^4\, n_i$;

д) $d_2 = \sum_{i=1}^{k}\ t_i - m_1\ ^2 f_{Ф.i}\Delta t = \ \Delta t^2/N_0\ \ \sum_{i=1}^{k}\ i - 0{,}5 - m_1/\Delta t\ ^2 \cdot n_i = m_2 - m_1^2$;

е) $d_3 = \sum_{i=1}^{k}\ t_i - m_1\ ^3 f_{Ф.i}\Delta t = \frac{\Delta t^3}{N_0}\ \ \sum_{i=1}^{k}\ i - 0{,}5 - \frac{m_1}{\Delta t}\ ^3 \cdot n_i =$
$= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$; ж) $d_4 = \sum_{i=1}^{k}\ t_i - m_1\ ^4 f_{Ф.i}\Delta t = \ \Delta t^4/N_0\ \ \sum_{i=1}^{k}\ i - 0{,}5 -$
$-m_1/\Delta t\ ^4 \cdot n_i = \ m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$;

Формулы для расчета выборочных моментов, приведенные в (7,а-ж), представляют собой варианты приближенных интегральных выражений (1,а,б). Первый выборочный момент m_1 называется также выборочным средним, а второй m_2 – выборочным средним квадратом. Показатели m_3 и m_4 являются соответственно выборочным третьим и четвертым начальным моментом экспериментального закона вероятности безотказной работы (6,а,б), а показатели $d_2 \div d_4$ – соответственно вторым, третьим и четвертым выборочным центральным моментом. Показатель d_2 называют также выборочным средним квадратом отклонения времени безотказной работы используемой партии изделий относительно его выборочного среднего m_1.

Характеристики (6,а-г) и показатели (7,а-ж), отражающие результаты опытных испытаний, являются опорной базой, на основе которой проводится нахождение такого оптимального теоретического закона $P_Т(t)$ и его параметров, которые в наибольшей степени обеспечивают совпадение с выборочными экспериментальными функциями (6) и показателями (7).

В качестве критерия близости используют средний квадрат отклонений между значениями выбранной экспериментальной функции (6) $\varphi_Ф(t)$ и соответствующей теоретической функции $\varphi_Т(t)$. Функции $\varphi_Ф(t)$ и $\varphi_Т(t)$ должны быть одноименными и отражать или функцию вероятности безотказной работы $P(t)$ или плотность вероятности (частоту отказов) $f(t)$ или, наконец, интенсивность отказов $\lambda(t)$ реального (экспериментального) и теоретического вероятностного закона. Такой критерий $\Delta_{\varphi.1}$ рассчитывается по формуле (8,а). Более "чутким" критерием различия между экспериментальной и теоретической функциями является средний относительный квадрат отклонений $\Delta_{\varphi.2}$, определяемый по формуле (8,б), или взвешенный средний квадрат отклонений $\Delta_{\varphi.3}$, определяемый из (8,в).

а) $\Delta_{\varphi.1} = \sum_{i=1}^{k}(\varphi_Ф(t_i) - \varphi_Т(t_i))^2/K$;

б) $\Delta_{\varphi.2} = \sum_{i=1}^{k}(1 - \varphi_Т(t_i)/\varphi_Ф(t_i))^2/K$;

в) $\Delta_{\varphi.3} = (1/K)\sum_{i=1}^{k}(\varphi_Ф(t_i) - \varphi_Т(t_i))^2/\varphi_Ф(t_i)$. (8,а-в)

2. Обобщенная процедура решения задач

К сожалению, в настоящее время не существует таких аналитических методов решения, которые позволяли бы в ходе минимизации выражений (8,а-в) сразу найти и оптимальный теоретический закон распределения $\varphi_Т(t)$ и его оптимальные параметры (точечные оценки). Поэтому на практике приходится применять метод, который называют "синтез через анализ" [4].

Он включает в себя несколько последовательно выполняемых процедур-этапов. На первом этапе, ориентируясь на вид выбранной экспериментальной функции $\varphi_Ф(t_i)$, $i \in [1, K]$, выбирают несколько типов (вариантов) теоретических законов $\varphi_Т$, которые подобны $\varphi_Ф(t)$. На втором этапе для каждого из выбранных теоретических законов (например, s-го – $\varphi_{Т.s}(t)$) подбирают его параметры (рассчитывают) таким образом, чтобы минимизировать критерий (8) (отметим, что эту процедуру можно выполнить несколькими способами и каждый из них следует проверить). На третьем этапе выбирают тот из рассмотренных теоретических законов, который по сравнению с другими обеспечивает минимальное значение критерия (8) и, соответственно, является квазиоптимальным.

Более детально подобные процедуры анализа рассматривались в [2,3], где в качестве возможных теоретических законов исследовались три однопараметрических закона (экспоненциальный, Эрланга и Рэлея), затем в [2,5], где анализ проводился для пяти двухпараметрических вероятностных законов (нормальный, усеченный нормальный, логнормальный, Вейбулла и гамма-закон), и, наконец, в [6,7], где в качестве теоретического закона рассматривался составной закон, представляемый суммой двух разных однопараметрических законов (шесть возможных вариантов).

В развитие указанных работ рассмотрим решение задачи, в которой возможный теоретический закон вероятности безотказной работы $P_T(t)$, аппроксимирующий экспериментальный закон $P_\Phi(t)$, ищется в виде составного закона (4,а), где первое слагаемое – $P_1(t)$ описывает нормальный закон с неизвестными двумя параметрами, а второе слагаемое – $P_2(t)$ – однопараметрический закон (экспоненциальный или Эрланга или Рэлея) с одним неизвестным параметром. Неизвестным в (4,а) является также коэффициент весомости каждого из рассматриваемых законов, входящих в составной.

3. Математические модели решения задачи

А. Для **нормального** закона его временные зависимости и показатели определяются двумя неизвестными пока параметрами T_H и σ_H в виде [8-10]:

а) $f_1(t) = (\sigma_H \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp(-(t - T_H)^2/2\sigma_H^2)$;
б) $P_1(t) = 0{,}5 - \Phi_0[(t - T_H)/\sigma_H]$;
в) $\Phi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^z \exp(-x^2/2)\, dx$;
г) $\lambda_1(t) = f_1(t)/P_1(t)$; (9,а-л)
д) $M_{1.1} = T_0 = T_H$;
е) $D_{2.1} = \sigma_{2.1}^2 = \sigma_H^2$;
ж) $M_{2.1} = M_{1.1}^2 + \sigma_{2.1}^2 = T_H^2 + \sigma_H^2$;
з) з) $D_{3.1} = 0$;
и) $D_{4.1} = 3D_{2.1}^2 = 3\sigma_H^4$;
к) $M_{3.1} = M_{1.1}(M_{1.1}^2 + 3D_{2.1}) = T_H(T_H^2 + 3\sigma_H^2)$;
л) $M_{4.1} = M_{1.1}^4 + 6M_{1.1}^2 D_{2.1} + 3\sigma_{2.1}^4 = T_H^4 + 6T_H^2\sigma_H^2 + 3\sigma_H^4$.

Отметим, что в (9,в) функция $\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, причем для типовых режимов, когда $\frac{T_H}{\sigma_H} \geq 3{,}0$, всегда имеем $P_1(t = 0) \cong 1{,}0$; $f_1(t = 0) \cong 0$.

Б. На первом шаге решения задачи примем, что вторым слагаемым составного закона $P_C(t)$ является однопараметрический **экспоненциальный** закон $P_2(t)$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:

а) $P_2(t) = \exp(-at)$;
б) $f_2(t) = -dP_2(t)/dt = a \cdot \exp(-at)$;
в) $M_{1.2} = 1/a$; (10,а-з)
г) $D_{2.2} = 1/a^2$;
д) $M_{2.2} = 2/a^2$;
е) $M_{3.2} = 6/a^3$;

ж) $M_{4.2} = 24/a^4$;
з) $f_2 \ t = 0 \ = a$.

В (10) a – неизвестный и оптимизируемый параметр закона $P_2(t)$.
Учитывая совместно выражения (4), (9) и (10) и полагая известными результаты экспериментальных исследований (6) и (7), получим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными: c, a, $T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$.

а) $f_{\Phi} \ t = 0 \ = f_{\Phi.0} \cong \ 1 - c \ a$;
б) $m_1 = cT_{\text{Н}} + \ 1 - c \ /a$;
в) $m_2 = c \ T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2 \ + 2(1-c)/a^2$; (11,а-г)
г) $m_3 = cT_{\text{Н}} \ T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2 \ + 6(1-c)/a^3$.

В уравнениях (11,а-г) левые члены $f_{\Phi.0}$, m_1, m_2 и m_3 известны по результатам эксперимента. Выражая из (11,а): $c = 1 - f_{\Phi.0}/a$; из (11,б): $cT_{\text{Н}} = m_1 - (1 - c)/a$; из (11,в): $c \ T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2 \ = m_2 - 2(1-c)/a^2$, и подставляя их в (11,г), можно получить одно уравнение с одним неизвестным $z = 1/a$, которое имеет вид:

$m_3 f_{\Phi.0} z - m_2 f_{\Phi 0} z^2 - 2m_1 f_{\Phi 0} z^3 + 6f_{\Phi.0} z^4 - 4{f_{\Phi.0}}^2 z^5 = (m_3 - m_2 m_1)$. (12)

Уравнение (12) решается численно, найденный параметр $z=z_0=1/a_0$, имеющий размерность времени, как правило, соизмерим с полным временем проведения опытных надежностных испытаний. Затем, используя (11,а), находят коэффициент весомости $c = c_0 = 1 - f_{\Phi 0} z_0$; используя (11,б), находят $T_{\text{Н}} = T_{\text{Н}.0} = (m_1 - \ 1 - c_0 \ z_0)/c_0$; используя (11,в), находят $\sigma_{\text{Н}}^2 = \sigma_{\text{Н}.0}^2 = \quad = \ m_2 - \ 1 - c_0 \ 2z_0^2 - c_0 T_{\text{Н}.0}^2 \ /c_0$.

Определив параметры рассчитанного теоретического закона $\varphi_T(t)$, используя (9), (10) и (4), затем находят значения закона $\varphi_T(t_i)$ для тех же временных интервалов $t = t_i$, которые использовались в ходе эксперимента. Далее по формулам (8,а-в) определяют значения критериев близости.

Если их значения покажутся неудовлетворительными, следует перейти к другому варианту аппроксимации эксперимента.

В. На втором этапе аппроксимации в качестве второго слагаемого состав- ного закона $P_C \ t$ в (4) выбирают однопараметрический **закон Эрланга** $P_2 \ t$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:

а) $P_2(t) = (1 + at)\exp(-at)$; б) $f_2 \ t \ = a^2 t \cdot \exp(-at)$;
в) $M_{1.2} = 2/a$; г) $D_{2.2} = 2/a^2$; д) $M_{2.2} = 6/a^2$; е) $M_{3.2} = 24/a^3$; (13,а-и)
ж) $M_{4.2} = 120/a^4$; з) $D_{3.2} = 4/a^3$; и) $D_{4.2} = 24/a^4$.

Здесь a – оптимизируемый параметр закона Эрланга $P_2(t)$.
Учитывая совместно выражения (4), (9) и (13) и полагая известными результаты экспериментальных испытаний (6) и (7), получим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными: c, a, $T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$.

а) $m_1 = M_{1C} = cT_{\text{Н}} + (1-c)2/a$;
б) $m_2 = M_{2C} = c(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + (1-c)6/a^2$;
в) $m_3 = M_{3C} = cT_{\text{Н}}(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + (1-c)24/a^3$;
г) $m_4 = M_{4C} = c(T_{\text{Н}}^4 + 6T_{\text{Н}}^2\sigma_{\text{Н}}^2 + 3\sigma_{\text{Н}}^4) + (1-c)120/a^4$;
д) $d_2 = D_{2C} = c^2\sigma_{\text{Н}}^2 + (1-c)^2 2/a^2 + c(1-c)(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2 + 6/a^2 -$
$-4T_{\text{Н}}/a) = c\sigma_{\text{Н}}^2 + 2(1-c)/a^2 + (1-c)c(T_{\text{Н}} - 2/a)^2$. (14,а-д)

Для дальнейшей работы удобно использовать уравнения (14,а.б,в,д). Если обозначить переменные: $c = x$; $T_{\text{Н}} = y$; $\sigma_{\text{Н}} = z$; $(1/a) = \gamma$, то после подстановки в (14) и ряда преобразований получим:
используя (14,а), $\gamma = 1/a = (m_1 - xy)/2(1-x)$; (15,а)
используя совместно (14,б,в) с учетом (15,а),
$m_3 = m_2 y + 3(m_1 - xy)^2(2m_1 - xy - y)/2(1-x)^2$; (15,б)
используя совместно (14,б,д),
$(m_2 - d_2) = xy^2 + (m_1 - xy)^2/(1-x) + x(m_1 - y)$; (15,в)
Система двух нелинейных уравнений (15,б,в) решается численно при известных значениях m_1, m_2, m_3 и d_3 из (7) путем последовательного задания $x = x_i = 0{,}1 \cdot i$; $i = 1,2, \dots 10$, и затем для каждого значения x_i определения $y_i' = \varphi_1(x_i)$ из (15,б) и $y_i'' = \varphi_2(x_i)$ из (15,в). Пересечение графиков функций y_i' и y_i'' дает решение: $x = x_0$; $y = y_0$. Далее из (15,а) определяют $\gamma = \gamma_0 = (m_1 - x_0 y_0)/2(1-x_0) = 1/a_0$, а из уравнения (14,д)
$\sigma_{\text{Н}}^2 = \sigma_{\text{Н}0}^2 = z_0^2 = (1/x_0)[d_2 - 2(1-x_0)\gamma_0^2 - x_0(1-x_0)(j_0 - 2\gamma_0)^2]$; (15,г)
Подставляя найденные параметры составного закона в (9,а,б), (13,а,б), а затем в (4,а,б), далее рассчитывают значения составного закона для тех же временных интервалов $t = t_i$, которое использовалось в ходе эксперимента и при расчете функций и показателей по (6), (7). Затем по формулам (8,а-в) определяют критерии близости. При необходимости, в частности, когда значения критериев признаются неудовлетворительными, необходимо проверить другой возможный вариант аппроксимации эксперимента.

Г. В этом случае в качестве второго слагаемого составного закона $P_c(t)$ в (4) выбирают однопараметрический **закон Рэлея** $P_2(t)$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:
а) $P_2(t) = \exp(-at^2)$; б) $f_2(t) = -dP_2(t)/dt = 2at\exp(-at^2)$;
в) $M_{1.2} = \sqrt{\pi/4a}$; г) $M_{2.2} = 1/a$; д) $M_{3.2} \cong 1{,}33/a^{1,5}$; е) $M_{4.2} = 2/a^2$;
ж) $D_{2.2} = M_{2.2} - M_{1.2}^2 = (4-\pi)/4a \cong 0{,}214/a$;
з) $D_{3.2} \cong 0{,}063/a^{1,5}$; и) $D_{4.2} \cong 0{,}15/a^2$. (16,а-и)

В (16) a – параметр закона Рэлея $P_2(t)$.
Учитывая совместно выражения (4), (9) и (16), а также полагая известными результаты эксперимента (6) и (7), получим следующую систему уравнений для определения 4-х неизвестных: двух параметров нормального закона ($T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$), одного параметра закона Рэлея (a) и коэффициента весомости закона (c) [2-4]:

$$\text{а)}\ m_1 = M_{1c} = cT_{\text{H}} + \ 1 - c \ \ \sqrt{\pi/4a};$$
$$\text{б)}\ m_2 = M_{2c} = c\ T_{\text{H}}^2 + \sigma_{\text{H}}^2 \ + (1-c)/a;$$
$$\text{в)}\ m_3 = M_{3c} = cT_{\text{H}}\ T_{\text{H}}^2 + \sigma_{\text{H}}^2 \ + \ 1 - c\ 1{,}33/a^{1,5};$$
$$\text{г)}\ m_4 = M_{4c} = c\ T_{\text{H}}^4 + 6T_{\text{H}}^2\sigma_{\text{H}}^2 + 3\sigma_{\text{H}}^4 \ + (1-c)2/a^2;$$
$$\text{д)}\ d_2 = D_{2c} = c\sigma_{\text{H}}^2 + \ 1 - c\ 0{,}214/a + c\ 1 - c\ [T_{\text{H}} - (\pi/4a)^{0,5}]^2. \qquad (17\text{,а-д})$$

Для последующего анализа удобно использовать уравнения (17,а,б,в,д), в которых неизвестные (искомые) параметры записаны в виде: $c = x$; $T_{\text{H}} = y$; $\sigma_{\text{H}} = z$; $\sqrt{1/a} = \rho$.

Тогда, используя (17,а), получим:

$$\rho = \ \sqrt{1/a} = (m_1 - xy)\cdot 2/\ \sqrt{\pi}(1-x); \qquad (18\text{,а})$$

решая совместно (17,б) и (17,в) с учетом (18,а), получим:

$$(m_3 - m_2 y) = 4(m_1 - xy)^2[8m_1 - \ 8 - 3\ \sqrt{\pi}\ xy - 3\ \sqrt{\pi} y]/3\pi\ \sqrt{\pi}(1-x)^2; \qquad (18\text{,б})$$

решая совместно (17,б) и (17,д), получим:

$$(m_3 - d_2) = xy^2 + x(m_1 - y) + (m_1 - xy)^2/(1-x). \qquad (18\text{,в})$$

Система двух нелинейных уравнений (18,б,в) с двумя неизвестными x и y решается численно в такой же последовательности, как и система (15): для каждого значения $x = x_i = 0{,}1 \cdot i$, где $i = 1{,}2, \ldots 10$, из уравнения (18,б) находится решение $y = y_{1i}$, а из уравнения (18,в): $y = y_{2i}$.

Пересечение графиков функций $y_{1i} = \varphi(x_i)$ и $y_{2i} = \varphi(x_i)$ дает решение: $x = x_0, y = y_0$. Затем на основании (18,а) определяют параметр:

$$\rho = \rho_0 = \ \sqrt{1/a_0} = 2(m_1 - x_0 y_0)/\ \sqrt{\pi}(1-x_0);\ a_0 = \rho_0^{-2};$$

а на основании (17,д) – параметр σ_{H}:

$$\sigma_{\text{H}}^2 = \sigma_{\text{H}.0}^2 = z_0^2 = \ 1/x_0\ \{d_2 - 0{,}214\ 1 - x_0\ \rho_0^2 - x_0\ 1 - x_0\ \ y_0 - \rho_0\ \sqrt{\pi}/2\ ^2\}.$$

Далее найденные параметры составного закона $P_C(t)$ подставляются в (9,а,б), (16,а,б) и (4,а,б), после чего рассчитывают значения полученного составного закона для тех же временных интервалов $t=t_i$, которые использовались в ходе эксперимента и при расчете функций и показателей по формулам (6) и (7). Затем по формулам (8,а-в) определяют критерии близости.

Тот из рассмотренных трех вариантов аппроксимации экспериментального закона безотказной работы $P_\phi(t)$ или $f_\phi(t)$ составным вероятностным законом, который представляет собой сумму нормального закона и одного из трех однопараметрических вероятностных законов, и обеспечивает при этом минимальные значения критериев близости, считается квазиоптимальным вариантом аппроксимации.

Именно этот вариант аппроксимации результатов форсированных испытаний сравнивается с результатами других вариантов аппроксимации [2-5] и, в частности, с вариантами, когда составной закон состоит из двух однопараметрических законов [6,7]. Лучший из сравниваемых вариантов аппроксимации (или несколько близких, конкурирующих вариантов) затем используется при расчете показателей закона по результатам укороченных (нормальных) испытаний.

Литература

1. Кириллов, В.И. Квалиметрия и системный анализ: учеб. пособие – 2-е издание – Минск: Новое знание: Москва: Инфра-М. – 2012. – 440с.

2. Кириллов, В.И. Оптимизация показателей надежности технической системы по результатам форсированных испытаний / Метрология и приборостроение, 2012. – №1. – С.9-15.

3. Кириллов, В.И. Прогнозирование эксплуатационных показателей безотказной работы технической системы по результатам испытаний / Метрология и приборостроение, 2012. – №3. – С.21-27.

4. Кириллов,В.И. Прогнозирование показателей надежности технических систем по результатам испытаний:учеб.-метод.пособие–Минск: БГУИР, 2012.–54с.

5. Кириллов, В.И. Прогнозные оценки надежности технической системы по результатам испытаний /Метрология и приборостроение, 2013. – №3. – С.16-22.

6. Кириллов, В.И. Оптимальное описание надежностных испытаний техники суммой двух однопараметрических вероятностных законов / Метрология и приборостроение, 2014. – №3. – С.26-31.

7. Кириллов, В.И. Применение составного вероятностного закона для оптимального прогноза характеристик и показателей надежности технической системы по результатам форсированных и укороченных испытаний / Метрология и приборостроение, 2015. – №1. – С.29-33.

8. Половко, А.М. Основы теории надежности: учебник / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб: БХВ – Петербург, 2006. – 704с.

9. Скрипник, В.М. Основы теории надежности: монография / В.М. Скрипник, И.П. Кавриго. – Минск: Военная академия РБ, 2012. – 500с.

10. Дорохов, А.Н. Надежность сложных технических систем: учебник / А.Н. Дорохов [и др.]. – СПб: Изд-во “Лань”, 2011. – 352с.