

**Н. В. ГУЦКО, Л. С. АКТЕМИРОВА**  
МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

### **О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОБОБЩЕННО КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Напомним, что подгруппа  $A$  группы  $G$  называется перестановочной [1] или квазинормальной [2] в  $G$ , если она перестановочна со всеми подгруппами из  $G$ . Подгруппа  $A$  является  $S$ -квазинормальной (или  $S$ -перестановочной) подгруппой в  $G$ , если  $A$  перестановочна со всеми силовскими подгруппами из  $G$ . Если  $H$  – подгруппа конечной группы  $G$ , то  $H_{sG}$  – подгруппа из  $H$ , порожденная всеми такими ее подгруппами, которые  $S$ -квазинормальны в  $G$ . Будем говорить, следуя [3], что  $H_{sG}$  –  $s$ -ядро подгруппы  $H$  в  $G$ .

**Определение.** Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Тогда будем говорить, что  $H Q$  – вложенная в  $G$  подгруппа, если существует такая квазинормальная подгруппа  $T$  группы  $G$ , что  $HT = G$  и  $T \cap H \leq H_{sG}$ .

Строение группы тесно связано со свойствами максимальных подгрупп ее силовских подгрупп. Так, в работе [4] было доказано, что группа сверхразрешима, если все такие ее подгруппы нормальны. В дальнейшем было доказано, что группа  $G$  сверхразрешима, если либо каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из  $G$   $c$ -нормальна в  $G$  [5], либо каждая такая подгруппа дополняема в  $G$  [6].

В данном направлении нами доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $N$  – неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы  $G$  со сверхразрешимой факторгруппой  $G/N$ . Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из  $N$  является  $Q$ -вложенной в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 889 p.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5. — P. 431 – 460.
3. Skiba, A.N. On weakly  $s$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — V. 315. — P. 192 – 209.
4. S. Srinivasan. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups. Israel J. Math. 35 (1990). P. 210 – 214.
5. Wang. Y.  $C$ -normality of groups and its properties, J. Algebra, 180 (1996). – P. 954-965.
6. Wang. Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups  $c$ -supplemented, J. Algebra, 224 (2000). – P. 467 – 478.

**И.Л. ДОРОШЕВИЧ**  
БГУИР (г. Минск, Беларусь)

### **РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ЛЕННАРД-ДЖОНСА ДЛЯ АТОМОВ ЖЕЛЕЗА**

Силы межмолекулярного взаимодействия, в существенной степени определяющие физические свойства газов, жидкостей и твердых тел, в большинстве практических расчетов удобно выражать через потенциальную энергию  $U$ :

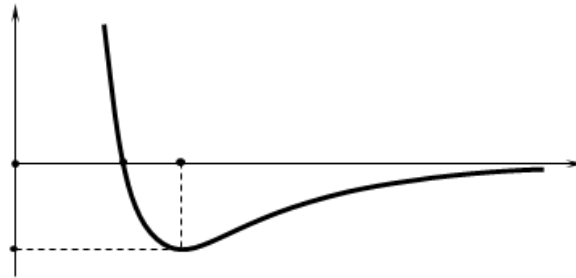
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U.$$

Наиболее распространенной корреляцией, связывающей межмолекулярную энергию взаимодействия двух атомов (сферических неполярных молекул) с расстоянием  $r$  между ними, является предложенная в 1924 г. Джоном Эдвардом Леннард-Джонсом простая модель парного

взаимодействия (двухпараметрический потенциал Леннарда-Джонса), которая до сих пор широко используется в расчетах и компьютерном моделировании [1, 2]:

$$U(r) = 4\varepsilon_L \left[ \left( \frac{\sigma_L}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_L}{r} \right)^6 \right], \quad (1)$$

где  $\sigma_L$  – расстояние, на котором потенциальная энергия меняет знак (эффективный радиус отталкивания);  $\varepsilon_L$  – абсолютная величина минимальной потенциальной энергии (в точке  $a_m = \sigma_L \sqrt[6]{2}$ ) (рисунок).



**Рисунок. – Схематический график потенциальной энергии  $U(r)$  Леннарда-Джонса**

Первое слагаемое в правой части выражения (1) соответствует резко возрастающим на малых расстояниях силам отталкивания между атомами (молекулами), второе – силам притяжения на достаточно больших расстояниях.

Потенциальную энергию парного взаимодействия Леннарда-Джонса часто представляют в виде:

$$U(r) = A_L \left( \frac{B_L}{r^{12}} - \frac{1}{r^6} \right), \quad (2)$$

где  $A_L$  и  $B_L$  – постоянные сил взаимодействия, или параметры Леннарда-Джонса.

Параметры  $A_L$ ,  $B_L$  и  $\sigma_L$ ,  $\varepsilon_L$  связаны соотношениями:

$$A_L = 4\varepsilon_L \sigma_L^6, \quad B_L = \sigma_L^6. \quad (3)$$

Проведенный анализ литературы показал, что в настоящее время параметры потенциальной энергии Леннарда-Джонса не поддаются ни непосредственному измерению, ни аналитическому определению. Сведения о величинах  $A_L$  и  $B_L$  (или  $\sigma_L$  и  $\varepsilon_L$ ) получают из результатов измерений термодинамических или транспортных свойств газов. При этом значения параметров потенциальной энергии Леннарда-Джонса для параатомов железа в литературе отсутствуют.

В данной работе расчет параметра  $B_L$  проводился на основе его связи с межатомным расстоянием  $a_m$ , при котором  $U(a_m) = U_{\min}$  или

$$F_r(a_m) = - \left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=a} = 0: \quad (4)$$

$$B_L = \frac{a_m^6}{2}.$$

Очевидно, что величину  $a_m$  можно выразить через радиус Вигнера – Зейтца  $r_w$ :

$$a_m = 2r_w. \quad (5)$$

В рамках модели жидкой капли радиус Вигнера – Зейтца (в предположении, что ячейки Вигнера – Зейтца являются сферами) может быть выражен через плотность  $\gamma$  жидкого металла и массу  $m_a$  отдельного атома [3]:

$$r_w = \left( \frac{3m_a}{4\pi\gamma} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в формулу (4), получаем выражение параметра  $B_L$  через плотность  $\gamma$  жидкого металла и массу  $m_a$  отдельного атома:

$$B_L = 18 \cdot \left( \frac{m_a}{\pi\gamma} \right)^2. \quad (7)$$

Оценка параметра  $\varepsilon_L$  проводилась по значению температуры плавления  $T_{пл}$  [4]:

$$\varepsilon_L / k \approx 1,92T_{пл}. \quad (8)$$

Численный расчет параметров потенциальной энергии Леннарда-Джонса для железа по формулам (7), (8) и (3) проводился с использованием следующих данных:  $m_a = 9,27 \cdot 10^{-26}$  кг,  $\gamma = 6,935 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_{пл} = 1803$  К. При этом получены следующие значения параметров потенциальной энергии Леннарда-Джонса для железа:

$$A_L = 4,53 \cdot 10^{-77} \text{ Дж} \cdot \text{м}^6, B_L = 3,26 \cdot 10^{-58} \text{ м}^6; \\ \varepsilon_L = 4,78 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}, \sigma_L = 2,62 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рид, Р. Свойства газов и жидкостей: справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд; пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Химия, 1982. – 592 с. : ил. – Нью-Йорк, 1977.
2. Ферцигер, Дж. Математическая теория процессов переноса в газах / Дж. Ферцигер, Г. Капер; пер. с англ.; под ред. Д.Н. Зубарева, А.Г. Башкирова. – М. : Мир, 1976. – 555 с.
3. Смирнов, Б.М. Генерация кластерных пучков / Б.М. Смирнов // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 6. – С. 609–648.
4. Васильева, И.А. Теплофизические свойства веществ : учеб. пособие / И.А. Васильева, Д.П. Волков, Ю.П. Заричняк. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2004. – 80 с.

**А. А. ДУДИК, Е. И. МИРСКАЯ**

БрГУ им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

#### ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В спектральном анализе временных рядов одной из главных проблем является построение оценок спектральных плотностей второго порядка случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс  $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}$ ,  $t \in Z$ , с  $MX(t) = 0$ , неизвестной взаимной спектральной плотностью  $f_{ab}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ .

Пусть  $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1)$  –  $T$  последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей  $X_a(t)$  процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$ ,  $a = \overline{1, r}$ .

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности рассмотрим модифицированную периодограмму вида:

$$I_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_a^T(t) h_b^T(t)} H_a(\lambda) \overline{H_b(\lambda)}, \quad (1)$$

где  $H_a(\lambda)$  задано выражением