УДК 517.925.42

МЕТОДЫ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЮЛАКА И ПУАНКАРЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Л.А. ЧЕРКАС, И.Л. ШЕВЦОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 ноября 2003

При решении проблемы предельных циклов для автономных систем на плоскости используются различные методы. Главным образом здесь используется прием, который заключается в рассмотрении систем с параметром, поворачивающим векторное поле, и изучении бифуркаций предельных циклов при изменении параметра. Строгая оценка числа предельных циклов проводится с использованием функций Дюлака. Все предельные циклы указанных систем получены численными методами, т.е. являются предельными циклами "нормального размера" в терминологии Перко.

Ключевые слова: квадратичная система, предельный цикл, функция Дюлака.

Введение

Рассмотрим вещественную автономную систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемыми правыми частями в некоторой области $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$. А.А. Андронов и Е.А. Леонтович [1] показали определяющую роль особых траекторий (положений равновесия, сепаратрис и предельных циклов) при построении качественной картины поведения траекторий системы (1). Однако задача локализации и оценки числа предельных циклов даже для полиномиальных систем (1) до сих пор остается нерешенной и составляет вторую часть 16-й проблемы Д. Гильберта [2]. Наиболее полная информация о вековой истории этой проблемы представлена в статье Ю. Ильяшенко [3]. Вместе с этим следует отметить, что в работе [3] не изложены результаты по конструктивным методам оценки числа предельных циклов индивидуальных систем:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j, \tag{2}$$

$a_{ij}, b_{ij} \in \boldsymbol{R}$, а также некоторых специальных классов таких систем. Проблему Гильберта, по-видимому, следует считать полностью решенной, если имеется не только глобальная оценка числа предельных циклов, но разработаны также и конструктивные методы получения точной оценки числа предельных циклов индивидуальной системы, по аналогии, например, с задачей нахождения числа действительных корней многочлена с действительными коэффициентами.

Поскольку данная задача слишком сложна для решения в оригинальном виде [4,5], предпринимались попытки рассмотреть ее частные версии. При решении этой задачи для некоторых семейств квадратичных систем авторами эффективно используются методы вспомогательных функций Дюлака и метод Пуанкаре.

Основные теоремы и определения

Определение 1. Функция $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$, называется функцией Дюлака для системы (1) в области Ω, если существует такое вещественное число k<0, что справедливо неравенство

$$\Phi \equiv k\Psi divf + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0(<0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad f = (P,Q). \qquad (3)$$

Замечание 1. В этом случае кривая

$$W = \{(x,y) : (x,y) \in \Omega, \Psi(x,y) = 0\}$$

является трансверсальной векторному полю f и разбивает область Ω на подобласти, в каждой из которых функция $B(x,y) = |\Psi(x,y)|^{1/k}$ является классической функцией Дюлака.

Функция Дюлака в смысле определения 1 была эффективно использована в работах [6,7] для решения задачи оценки числа и локализации предельных циклов систем (2).

Определение 2. Поверхностью предельных циклов системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,a), \quad (x,y) \in \Omega, \quad a \in \boldsymbol{R}, \qquad (4)$$

называется множество точек пространства $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$

$$SLC = \{(x,y,a) : (x,y) \in L(a), a \in \boldsymbol{R}\},$$

где $L(a)$ — множество на фазовой плоскости $\boldsymbol{R}^2$, образованное предельными циклами системы (4) при данном значении a.

Определение 3. Параметр a поворачивает векторное поле системы (4) в $\boldsymbol{R}^2$, если справедливо равенство

$$(P)'_a Q - P(Q)'_a \geq 0(\leq 0),$$

которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (4), принадлежащем множеству $L(a)$.

Замечание 2. Условие в определении 3 означает, что предельные циклы системы (4) при изменении параметра a изменяют свое положение, но при этом не пересекаются при различных значениях параметра. Множество $L(a)$, $a \in \boldsymbol{R}$, образует некоторую открытую область $G \subset \boldsymbol{R}^2$, на которой вышесказанное позволяет ввести функцию предельных циклов (функцию Андронова-Хопфа).

Определение 4. Функцией предельных циклов системы (4) называется функция $p(x,y)$, $(x,y) \in G$, принимающая значение a на множестве $L(a)$ при данном значении a, G – открытая область, образованная множествами $L(a)$ при $a \in \boldsymbol{R}$.

Замечание 3. Уравнение $p(x,y)=a$ определяет в пространстве $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$ инвариантное многообразие системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,a), \quad \frac{da}{dt} = 0.$$

Более того, функция $p(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial x}P(x,y,p(x,y))+\frac{\partial p}{\partial y}Q(x,y,p(x,y))=0,\quad (x,y)\in G.$$

Замечание 4. В случае если параметр a поворачивает векторное поле системы (4), поверхность предельных циклов определяется уравнением $p(x,y)=a$, $a\in \boldsymbol{R}$, и функцию предельных циклов можно дополнить точкой $(x_0,y_0,p(x_0,y_0))$, соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа. Для параметров, не поворачивающих поле, функции предельных циклов ведут себя белее сложно за счет того, что могут быть неоднозначными и иметь точки ветвления, а также ветви, не имеющие точек бифуркации Андронова–Хопфа.

Если предельные циклы, окружающие особую точку $O(0,0)$, при $P(0,0,a)=Q(0,0,a)=0$ пересекают полуось $y=0$, $x>0$ лишь в одной точке, то вместо функции $p(x,y)$ удобно рассматривать функцию $AH(x)=p(x,0)$ [8], которая дает полную информацию о предельных циклах системы (4) и их бифуркациях при изменении α.

Впервые свойства систем с параметром, поворачивающим поле, были систематически исследованы Г.Ф. Даффом [9] и широко использовались впоследствии авторами при изучении предельных циклов. В работах [8, 10, 11] с помощью численных методов были построены приближенные функции предельных циклов $AH(x)$ для параметрических семейств квадратичных систем и систем Льенара. За счет нахождения подходящих функций Дюлака для этих семейств доказано существование 2 и 3 предельных циклов при определенных значениях параметров.

Из работ [10, 12] вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для вещественной системы (1), где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – полиномы степени не выше n, существуют функция $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$, $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$, удовлетворяющая неравенству* (3), *число $k<0$ и кривая $\Phi=0$, которая не содержит предельных циклов системы* (1). *Тогда предельные циклы системы* (1) *не пересекают множество W и в каждой двусвязной области Ω, лежащей в одной из областей $\Psi>0$ ($\Psi<0$), система* (1) *имеет не более одного предельного цикла γ, причем если он существует, то является грубым и устойчивым (неустойчивым) при $k\Psi\big|_\gamma<0(>0)$.*

Теорема 2. *Пусть в односвязной области $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$ система (1) имеет единственную особую точку — фокус А. Пусть так же функция $\Psi(x,y)$ удовлетворяет в области Ω условию* (3) *теоремы 1, при этом уравнение $\Psi(x,y)=0$, определяет m вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из m–1 двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (1) *имеет точно один предельный цикл, а в целом она имеет не более m предельных циклов.*

Рассмотрим первую форму системы Льенара:

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y,\quad g(0)=0,\quad xg(x)>0,\quad x\neq 0, \tag{5}$$

где $g(x)$, $f(x)$ — полиномы. Строим функцию Дюлака Ψ в виде полинома относительно y степени n-1 с коэффициентами, являющимися полиномами относительно x, т.е.

$$\Psi=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)y^{n-i}. \tag{6}$$

Для того чтобы соответствующая функция Φ не зависела от y, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\begin{gathered}\Psi_1=C_1,\quad \Psi_2=(k+n-1)FC_1+C_2,\quad \Psi_2'=(k+n-1)fC_1,\quad F(x)=\int_0^x f(u)du,\\ \Psi_i'=(k+n-i+1)f\Psi_{i-1}+(n-i+2)g\Psi_{i-2},\quad \Psi_i=\int\Psi_i'(x)dx+C_i, i=\overline{3,n}.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь C_i, i=1,…,n, — произвольные константы, которые появляются при интегрировании функций $\Psi_i'(x)$ по x. Функция Φ имеет при этом вид

$$\Phi = \Phi(x,C) = -kf\Psi_n - g\Psi_{n-1}$$

и является линейной комбинацией функций, зависящих только от x, т.е.

$$\Phi(x,C) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi_i(x). \qquad (8)$$

В общем случае квадратичная система (1) с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени приводится к виду

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j, \\ &a_{02} = a, \quad \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}(-1)^j = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Она имеет трансверсаль x=0 и в полуплоскости x>0 с помощью преобразования $x = 1/\xi, \quad y = \tilde{y}\xi^{-a} - \xi$ и растяжения шкалы времени приводится к первой форме системы Льенара

$$\frac{d\xi}{dt} = \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = -g(\xi) - f(\xi)\tilde{y}, \qquad (10)$$

где
$f(\xi) = (a_{11} + a_{01}\xi - (2a+1)\xi^2)\xi^{a-2}, \quad g(\xi) = (a_{20} + a_{10}\xi + (a_{00} - a_{11})\xi^2 - a_{01}\xi^3 + a\xi^4)\xi^{2a-3}$.

При a=2,3,…, система (10) является полиномиальной системой Льенара. Если же a=–2, –3,…, то тогда система (10) приводится к полиномиальной системе Льенара с помощью преобразования $\xi = 1/x, \quad \tilde{y} = -y$ и растяжения шкалы времени

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)y, \qquad (11)$$

где $\tilde{f}(x) = -(a_{11}x^2 + a_{01}x - 2a - 1)x^{-a-2}, \quad \tilde{g}(x) = -(a_{20}x^4 + a_{10}x^3 + (a_{00} - a_{11})x^2 - a_{01}x + a)x^{-2a-3}$.

Приложения к квадратичным системам и системам Льенара

Рассмотрим квадратичную систему (1), т.е. $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — полиномы относительно x, y, степени не выше n=2, причем один из них имеет степень n. Известно [5], что предельные циклы системы (1) могут окружать лишь одну особую точку, которая является фокусом. В силу того что квадратичная система имеет не более двух фокусов, то возможны следующие распределения предельных циклов при условии, что они существуют: m, (m_1, m_2), $m \in \boldsymbol{N}$, $m_1 \in \boldsymbol{N} \cup 0$, $m_2 \in \boldsymbol{N} \cup 0$, $m_1 + m_2 > 0$, $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$. Здесь m – число предельных циклов вокруг фокуса A при условии, что он единственный, а m_1, m_2 – количество предельных циклов вокруг каждого из двух фокусов при условии, что они существуют.

Л.М. Перко [13] ввел термин предельный цикл "нормального размера", т.е. предельный цикл, который можно обнаружить численными методами. Авторами получены квадратичные системы с предельными циклами "нормального размера" и всеми известными в настоящее время максимальными распределениями предельных циклов 3, (3,0), (3,1). Отдельно рассмотрен случай, когда один фокус негрубый, и получены распределения предельных циклов 2, (2,0), (2,1). Такие системы раньше были получены на уровне инфинитезимальных предельных циклов или с помощью численных методов.

Предельные циклы "нормального размера" квадратичных систем с негрубым фокусом

Пусть система (1) имеет негрубый фокус в точке $O(0,0)$ при $F(x)=0$, для которого первая фокусная величина не равна нулю. Тогда все функции $\Phi_i(x)$ обращаются в нуль при $x=0$. В этом случае будем рассматривать подсемейство семейства функций (8), удовлетворяющих условию $\Phi'(0)=0$ при том, что $\Phi'_n(0)\neq 0$. Таким образом, функцию Φ вида (8) можно представить в виде

$$\Phi=\Phi(x,\tilde{C})=\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{C}_i\left(\Phi_i(x)-\frac{\Phi'_i(0)}{\Phi'_n(0)}\Phi_n(x)\right), \qquad (12)$$

где $C_i=\tilde{C}_i,\quad i=\overline{1,n-1},\quad C_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Phi'_i(0)}{\Phi'_n(0)}\tilde{C}_i$. Тогда

$$\Phi(x,C)=x^2\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{C}_i\tilde{\Phi}_i(x)=x^2\tilde{\Phi}(x,\tilde{C}), \qquad (13)$$

где $\tilde{\Phi}_i(x)=\left(\Phi_i(x)-\frac{\Phi'_i(0)}{\Phi'_n(0)}\Phi_n(x)\right)/x^2$, а $\tilde{\Phi}_i(0)$ не все равны нулю и определены по непрерывности $\tilde{\Phi}_i(0)=\lim\limits_{x\to 0}\tilde{\Phi}_i(x)$. Далее можно искать условие не отрицательности функции $\Phi(x,\tilde{C})$ с помощью выбора значений постоянных $\tilde{C}_i$. Таким образом, для существования неотрицательной на [α,β] функции $\Phi(x,\tilde{C})$ в семействе функций (12) необходимо и достаточно, чтобы задача оптимизации

$$L\to\max,\quad \Phi(x,\tilde{C})\geq Lx^2,\quad L>0,\quad \left|\tilde{C}_i\right|\leq 1, i=\overline{1,n},\quad x\in[\alpha,\beta] \qquad (14)$$

имела решение. Хотя для некоторых классов систем предпочтительнее использовать задачу

$$L\to\max,\quad \tilde{\Phi}(x,\tilde{C})\geq L,\quad L>0,\quad \left|\tilde{C}_i\right|\leq 1, i=\overline{1,n},\quad x\in[\alpha,\beta]. \qquad (15)$$

В свою очередь задачи (14) и (15) сводятся к стандартной задаче линейного программирования.

В общем случае квадратичная система (1), имеющая негрубый фокус $A(1,-1)$, с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени приводится к системе вида (9) при условиях

$$2a-a_{01}-a_{10}-2a_{20}>0, \qquad (16)$$

$$a_{01}=2a+1-a_{11}. \qquad (17)$$

Последнее условие означает равенство нулю дивергенции в точке $A(1,-1)$.

Тогда система (9), (16), (17) в полуплоскости $x>0$ с помощью соответствующего преобразования, указанного выше, приводится к первой форме системы Льенара (10) или (11). В свою очередь негрубому фокусу A (1, –1) системы (9), (16), (17) соответствует негрубый фокус $\tilde{A}$ (1, 0) системы (10) или (11).

Алгоритм доказательства того, что квадратичная система (9), (16), (17) с негрубым фокусом A (1, –1) имеет два предельных цикла, выглядит следующим образом. Для параметра a_{11}, поворачивающего поле в смысле определения 3, строится функция предельных циклов $AH(x)$. Изучаются бифуркации предельных циклов системы при изменении параметра a_{11} и делается численный прогноз о числе и локализации предельных циклов вокруг негрубого фокуса A (1, –1). Далее для строгой оценки и применения теоремы 2 переходим к одной из систем Льенара (10) или (11). Функцию Ψ вида (6) строим при условиях (7). Вспомогательную функцию Φ строим, согласно (13), и решаем для нее задачу линейного программирования, соответствующую одной из задач (14) или (15). В случае положительности функции Ф на основании теоремы 2 получаем точную оценку числа предельных циклов.

Получены квадратичные системы вида (9) при условиях (16), (17) с негрубым фокусом A (1, –1) и различными конфигурациями особых точек, имеющие точно два предельных цикла вокруг фокуса A. В случае, когда система (9), (16), (17) имеет два антиседла в конечной части плоскости, оценка числа либо доказательство отсутствия предельных циклов вокруг второго антиседла $B(x_0,–1/x_0)$, $x_0<0$ проводится аналогично, как и для негрубого фокуса A (1, –1).

Коэффициенты таких систем с негрубым фокусом приведены в табл. 1. В колонке "Конфигурация особых точек" негрубый фокус, фокус, узел, седло обозначаются WF, F, N, S соответственно. Число-префикс указывает на то, сколько точек данного типа имеет квадратичная система. Если особая точка располагается на бесконечности, то указывается индекс ∞.

Для конфигурации особых точек $1WF+1S+2N_\infty+1S_\infty$ получены две различные системы, так как она может реализовываться при $a>0$ и $a<0$.

Таблица 1. **Различные конфигурации особых точек квадратичной системы вида (9), (16), (17) с негрубым фокусом и распределениями предельных циклов 2, (2,0), (2,1)**

№	Коэффициенты системы				Конфигурация особых точек	Распределение предельных циклов
	a	a_{20}	a_{11}	a_{10}		
1	5/2	–10	–4/5	1132/100	$1WF+1N+2S_\infty+1N_\infty$	2
2	3/2	–15	4/5	9175/1000	$1WF+1F+2S_\infty+1N_\infty$	(2,0)
3	105/100	–100	15/10	616/10	$1WF+1F+2S_\infty+1N_\infty$	(2,1)
4	17/23	–18	221/115	–54	$1WF+1F+1S_\infty$	(2,1)
5	–4	–4	14	1936/100	$1WF+1S+2N_\infty+1S_\infty$	2
6	5	3/10	–56/10	–7637/1000	$1WF+1S+2N_\infty+1S_\infty$	2
7	–2	9	10	–1911/100	$1WF+3S+3N_\infty$	2
8	5	–50	–5	782/10	$1WF+2N+1S+2S_\infty+1N_\infty$	2
9	–4	–1	14	1237/100	$1WF+1N+2S+1S_\infty+2N_\infty$	2

Квадратичные системы с максимальным числом предельных циклов "нормального размера"

Квадратичная система (9), (16) может иметь вокруг фокуса A(1,-1), который является грубым, не более трех предельных циклов. Для различных конфигураций особых точек получены классы систем, имеющих точно три предельных цикла. При доказательстве того, что система (9), (16) действительно принадлежит такому классу, как и выше, используется построение функции Дюлака Ψ вида (6), (7) и соответствующей функции Ф вида (8). Для определения положительности последней решается задача линейного программирования, соответствующая оптимизационной задаче

$$L \to \max, \quad \Phi(x,C) \ge L, \quad L > 0, \quad |C_i| \le 1, i = \overline{1,n}, \quad x \in [\alpha,\beta].$$

Коэффициенты таких систем приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Различные конфигурации особых точек квадратичной системы вида (9), (16) с максимальными распределениями предельных циклов 3, (3,0), (3,1)**

№	Коэффициенты системы					Конфигурация особых точек	Распределение предельных циклов
	a	a_{20}	a_{11}	a_{10}	a_{01}		
1	3	–20	–1,5998	26	8,6	$1F+1N+2S_\infty+1N_\infty$	3
2	7/5	–15	0,8998	6,6	2,9	$2F+2S_\infty+1N_\infty$	(3,0)
3	103/100	–115	1,53997	–80,7	1,52	$2F+2S_\infty+1N_\infty$	(3,1)
4	17/23	–18	2,0222	–54	21/46	$2F+1S_\infty$	(3,1)
5	–3	5	11,9993	19,71	–17	$1F+1S+2N_\infty+1S_\infty$	3
6	–3	12	11,49975	–22,15	–16,5	$1F+3S+3N_\infty$	3
7	4	–55	–3,3994	82,83	12,4	$1F+2N+1S+2S_\infty+1N_\infty$	3
8	–4	–1	13,9988	12,4	–21	$1F+1N+2S+1S_\infty+2N_\infty$	3

Проблема Коппеля

Для вещественной квадратичной системы (2), имеющей негрубый фокус в точке $A\,(1,-1)$, решается проблема Коппеля (W.A. Coppel). Его гипотеза состоит в том, что квадратичная система, имеющая особую точку $B\,(x_0, -1/x_0)$, $x_0<0$, дивергенция векторного поля в которой равна нулю, имеет не более одного предельного цикла, окружающего точку А (1,–1). С помощью признака Чжан Чжи Фэн эта гипотеза нашла подтверждение в работах [14, 15], кроме случая, когда система имеет два конечных антиседла и седло в бесконечности. В нашем случае признак Чжан Чжи Фэн не работает, а один из двух фокусов является негрубым. Для доказательства единственности предельного цикла вокруг негрубого фокуса $A\,(1,-1)$ используется метод критических точек условного экстремума.

При определении положительности функции Φ методом критических точек условного экстремума в работе [16] описаны два случая. Первый, когда глобальный минимум функции $\Phi(x,C)$ вида (8) достигается в единственной точке $x=x^*$ и точка (x^*) является единственной точкой глобального минимума функции $\Phi(x)=\Phi(x,C^*)$, и второй, когда глобальный минимум $\Phi(x,C)$ достигается при $C=C^*$, а глобальный минимум функции $\Phi(x,C^*)$ реализуется в точках $(x_л^*)$, $k=1,...,m$ (случай качелей).

Нас интересует первый случай. Тогда выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^2 = 1, \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k} = 0, \quad k = \overline{1,2m-1}, \quad \frac{d^{2m}\Phi}{dx^{2m}} \neq 0. \tag{18}$$

Для ее нахождения вводится функция Лагранжа

$$L = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j - \lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{n} C_j^2 - 1 \right) - \sum_{k=1}^{2m-1} \lambda_k \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j^{(k)}. \tag{19}$$

После разрешения системы уравнений для функции Лагранжа (19) [16] имеем систему уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{2m-2} \lambda_k \left(\Phi^{(k)}, \Phi^{(s)} \right) = \left(\Phi, \Phi^{(s)} \right), \quad s = \overline{1,2m-2}, \\ \left(\Phi^{(k)}, \Phi^{(s)} \right) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^{(k)} \Phi_j^{(s)}, \quad \left(\Phi, \Phi^{(s)} \right) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \Phi_j^{(s)}. \end{gathered} \tag{20}$$

Найдя из нее λ_k, а затем C_j из первой серии уравнений и подставив их в последнее уравнение, получим уравнение относительно одной переменной x. В случае $n=3$, $m=2$ получим [16], что точка x удовлетворяет уравнению

$$det\left(\Phi_j^{(k)}(x) \right)_{3\times 3} = 0. \tag{21}$$

В рассматриваемом случае вместо коэффициентов квадратичной системы (9), (16), (17) удобно взять параметры a, a_{20}, x_0, d, где точка $B\,(x_0, -1/x_0)$, $x_0<0$, — фокус, дивергенция поля в котором равна нулю; d — дивергенция поля в негрубом фокусе $A\,(1,-1)$. Тогда для коэффициентов системы (9), (16), (17) выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} a_{01} = \frac{dx_0}{x_0 - 1} + \frac{2a+1}{x_0(x_0+1)}, \quad a_{11} = -\frac{d}{x_0 - 1} - \frac{2a+1}{x_0}, \\ a_{10} = -\frac{d}{x_0 - 1} - a_{20}(x_0+1) - \frac{a+1}{x_0^2(x_0+1)}, \\ a_{20} = min\left[\frac{(dx_0^2 + (a+1)(x_0^2-1))^2}{4ax_0^3(x_0+1)^2}, \frac{(dx_0 + (2a+1)(x_0-1))^2}{4(a-1)x_0^2(x_0-1)^2} \right] - w, \\ w > 0, \quad 0 < a < 1, \quad x_0 < 0, \quad d \neq 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Получаем, что через параметры a, x_0, d, w выражаются остальные коэффициенты системы (9), (16), (17). При d>0 фокус A (1, –1) неустойчив, и траектории системы (9), (16), (17), (22), начинаясь на прямой x=0, при возрастании времени входят в полуплоскость x>0. Тогда получаем, что вокруг фокуса A (1, –1) имеется нечетное число предельных циклов. Далее рассматривается случай при d>0, так как при d<0 система исследуется аналогично.

Для доказательства единственности предельного цикла вокруг негрубого фокуса A (1, –1) систему (9), (16), (17), (22) приводим ко второй форме системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{23}$$

где $F(x)$, $g(x)$ — полиномы. Строим функцию Дюлака $\Psi(x,y,C)$ вида (6) в виде полинома относительно y. Соответствующим образом [10] строим функцию $\Phi=\Phi(x,C)$. Тогда критические точки (x^*,C^*) функции $\Phi(x,C)$ при x>0 условного экстремума на глубине $2m$=4 при условиях (18) удовлетворяют системе (20). При этом x^* является корнем уравнения (21). В нашем случае с учетом выбранных параметров a, x_0 ,d, w функция $\Phi(x,C)$ для системы (23) имеет вид $\Phi=\Phi(a,x_0,d,w,x,C)$. При детальном исследовании функции Φ получаем, что она является квадратичным полиномом относительно переменной w:

$$\Phi(a,x_0,d,w,x,C) = \Phi_0(a,x_0,d,x,C) + \Phi_1(a,x_0,d,x,C)w + \Phi_2(a,x_0,d,x,C)w^2. \tag{24}$$

Таким образом, положительность функции Φ вида (24) равносильна одному из следующих условий:

$$1)\Phi_i > 0, i = \overline{0,2}; \quad 2)\Phi_i > 0, i = 0,2, \Phi_1^2 - 4\Phi_0\Phi_2 < 0. \tag{25}$$

Также получаем, что при выполнении одного из условий (25) параметр w можно выбирать любым отличным от нуля. От выбора параметра w может зависеть только решение уравнения (20).

Тогда процедура доказательства единственности предельного цикла для системы (23) выглядит следующим образом. Формируем целевую функцию Φ, и при выбранных значениях параметров a, x_0 ,d, w решаем уравнение (21). Находим наименьший положительный корень $x=x^*$. Вычисляем вектор C^*, при котором достигается решение. Если для $\Phi_i(x)$, i=0,..,2, из (24) при определенных a, x_0, d, C^* и x>0 выполняется одно из условий (25), то функция $\Phi(x,C^*)$ положительна при x>0. Это доказывает единственность предельного цикла вокруг негрубого фокуса A(1,-1), так как уравнение $\Psi(x,C^*)=0$ определяет при x>0 единственную кольцеобразную область.

По алгоритму, описанному выше, были получены следующие результаты. Для систем $(a,x_0,d)\in M$, где M — декартово произведение множеств вида

$$M = A \times X_0 \times D, \quad A = \{1/10, \cdots, 9/10\},$$
$$X_0 = \{-10, -7.5, \cdots, -1, -0.75, \cdots, -0.1, -0.075, \cdots, -0.01\}, \quad D = \{0.01, 0.025, \cdots, 0.1, 0.25, \cdots, 1, 2.5, \cdots, 10\},$$

проведен численный эксперимент и доказано, что система (9), (16), (17), (22) при указанных параметрах имеет вокруг негрубого фокуса A (1, –1) один предельный цикл. Полученные результаты подтверждают гипотезу Коппеля для широкого класса квадратичных систем с негрубым фокусом, когда система имеет два конечных антиседла и седло в бесконечности.

Экстремумы функции Андронова–Хопфа

Результаты численных расчетов функции $AH(x)$ не всегда надежны в том плане, что могут не учитывать тонкую структуру поведения функции $AH(x)$, например, пару очень близких экстремумов. Ниже мы покажем, как проверять достоверность поведения функции $AH(x)$:

а) в окрестности точки простого экстремума;

б) на промежутках монотонности;

в) в окрестности особой точки O(0,0).

Наиболее трудоемким является доказательство простоты точек экстремума, так как в них система (1) структурно неустойчива, и подходы, использовавшиеся нами для монотонных участков функции $AH(x)$, соответствующих грубым системам, здесь не работают. В этом случае воспользуемся результатами работы [12]:

Теорема 3. *Система* (1) *не имеет предельных циклов кратности три и выше тогда и только тогда, когда система*

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\quad \frac{dz}{dt}=\mathrm{div}f,\quad \frac{dw}{dt}=e^{z}H_2 \tag{26}$$

не имеет периодических решений. Здесь

$$H_2=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{PH_1}{H}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QH_1}{H}\right),\quad H_1=\mathrm{div}f,\quad H=P^2+Q^2\,.$$

Если для системы (26) в качестве функции Пуанкаре выбрать функцию $F=\Psi(x,y)e^{z}+\alpha W$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$,

$$\frac{dF}{dt}=\left(\Psi\mathrm{div}f+\frac{d\Psi}{dt}\right)e^{z}+\alpha H_2e^{z}=e^{z}\left(\Psi\mathrm{div}f+\frac{d\Psi}{dt}+\alpha H_2\right),$$

то отсутствие в области Ω *предельных циклов кратности выше двух у системы (1) сводится к выполнению условия*

$$\Psi\mathrm{div}f+\frac{d\Psi}{dt}+\alpha H_2>0,\quad (x,y)\in\Omega\,. \tag{27}$$

Таким образом, изучение поведения функции предельных циклов $AH(x)$ будет проводиться нами с помощью построения функций Ψ, удовлетворяющих условию из определения 1 или условию (27).

Теорема 4. *Пусть система (4) при всех* $a\in I=[a_1,a_2]$ *удовлетворяет условиям*:

параметр α поворачивает поле в односвязной области Ω;

антиседло $O(0,0)$ *является единственной особой точкой в области* Ω;

существуют функции $C_j(a)$, $j=1,\ldots n+1$, *а также функция* $\Psi=\sum_{j=1}^{n}C_j(a)\Psi_j(x,y)$ *такие, что функция*

$$\Phi=\sum_{j=1}^{n}C_j(a)\Phi_j(x,y,a)+C_{n+1}(a)H_2(x,y,a)>0,\quad (x,y)\in\Omega_0, \tag{28}$$

где $\Phi=D(\Psi)$, $D=\mathrm{div}\,f+P\dfrac{\partial}{\partial x}+Q\dfrac{\partial}{\partial y}$ *— оператор Дюлака,* $\Omega_0\subset\Omega$ *— кольцеобразная область, окружающая точку O(0,0),* $C_{n+1}(a)>0(<0)$ *и все рассматриваемые функции имеют необходимую гладкость*;

система (4) *при* $a=a_1(a_2)$ *имеет в области* Ω_0 *два предельных цикла, а при* $a=a_2(a_1)$ *она не имеет предельных циклов в области* Ω_0.

Тогда система (4) *имеет в области* Ω_0 *не более двух предельных циклов.*

Рассмотрим теперь монотонный участок функции $AH=AH(x)$, *соответствующий грубому поведению системы* (4).

Теорема 4. *Пусть для системы* (4) *при всех* $a\in I=[a_1,a_2]$ *выполняются условия* 1)–3) *из теоремы* 3, *причем функция* (28) *имеет вид*

$$\Phi(x,y,a)=\sum_{j=1}^{n}C_j(a)\Phi_j(x,y,a)>0, \quad (x,y)\in\Omega_0, \tag{29}$$

Тогда если семейство предельных циклов при $a\in I$ *заполняет кольцеобразную область* $\Omega_0\subset\Omega$, *то она соответствует монотонной функции АН*(x), *и система* (4) при $a\in I$ *имеет в области* Ω_0 *точно один предельный цикл.*

Теорема 5 (Бендиксона-Дюлака). *Пусть для системы* (4) *при всех* $a\in I=[a_1,a_2]$ *выполняются условия* 1)–3) *из теоремы* 3, *причем функция* Φ *имеет вид* (29) *в кольцеобразной области* Ω_0. *Тогда если траектории системы* (4) *при увеличении времени входят через границу* $\partial\Omega_0$ *извне вовнутрь области* Ω_0 *(или наоборот), то в области* Ω_0 *имеется точно один предельный цикл системы* (4).

Заключение

Полученные результаты относятся к конструктивным методам оценки числа предельных циклов индивидуальных систем (2), а также однопараметрических семейств таких систем, не содержащих предельных циклов кратности три. Методы удалось также распространить на случай негрубого фокуса.

Можно также их распространить на двух- и трехпараметрические семейства, однако здесь возникает задача исследования трехкратных циклов, которые являются естественными объектами многопараметрических систем. Многообразие трехкратных предельных циклов может иметь одну связную компоненту, что в некоторых случаях можно проверить разработанными методами. Тогда и здесь можно дать эффективную оценку числа предельных циклов.

METHODS OF AUXILIARY DULAC AND POINCARE FUNCTIONS OF AN EVALUATION THE NUMBER OF LIMIT CYCLES OF AUTONOMOUS SYSTEMS IN THE PLANE

L.A. CHERKAS, I.L. SHEVTSOV

Abstract

There are different methods is used to solve the problem of limit cycles for some classes of planar autonomous systems. The main method used is considering a set of systems with a rotating parameter, and analyzing the bifurcations of limit cycles under the variation of this parameter. The existence of the exact given number of limit cycles is proved using the Dulac function. All limit cycles of the given systems can be detected through numerical methods; i.e. limit cycles have "a normal size" using Perko’s terminology.

Литература

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер. М.:Наука, 1966. 568 с.
2. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969. 240 с.
3. *Ilyashenko Y.* Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39, № 3. P. 301–354.
4. *Yamato K.* An effective method of counting the number of limit cycles // Nagoya Math. J. 1979. Vol.74, P.35-114.
5. *Yanqian Ye*. Theory of Limit Cycles. Transl. of AMS. Monographs. Providence. RhodeIsland. 1986. Vol. 66.
6. *Черкас Л.А.*, *Гринь А.А.* Алгебраические аспекты нахождения функции Дюлака для полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, №3. С.384 - 390.

7. *Черкас Л.А., Щукина И.С.* Функция Дюлака специального вида для квадратной системы на плоскости // Диф. уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 481-487.
8. *Cherkas L.A., Artes J.C., Libre J.* Quadratic systems with limit cycles of normal size // Buletinul Academiei de stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2003. Vol. 41, № 1. P. 31-46.
9. *Duff G.F.* Limit cycles and rotated vector fields // Ann. Math. 1953. Vol. 57, № 1. P. 15-31.
10 *Гринь А.А., Черкас Л.А.* Функция Дюлака для систем Льенара// Тр. Ин-та. математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т.4. С.29-38.
11. *Шевцов И.Л.* Квадратичные системы с различными конфигурациями особых точек и максимальным числом предельных циклов вокруг негрубого фокуса // Вестн. Белорус. ун-та. 2003. Сер. 1. № 2. С. 78-85.
12. *Черкас Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, №5. С.689 - 699.
13. *Perko L.M.* Limit cycles of quadratic systems in the plane// Rocky Mountain J. of Math. 1984. Vol. 14, № 3. P. 619-644.
14. *Zegeling A., Koij R.E.* The distribution of limit cycles in quadratic systems with four finite singularities // J. Diferential Equations. 1999. Vol. 151. P.373-385.
15. *Zegeling A., Koij R.E.* Limit cycles in quadratic systems with a weak focus and a strong focus// Kinggpook Math. J. 1998. Vol. 38, № 2. P. 323-340.
16. *Черкас Л.А.* Оценка числа предельных циклов с помощью критических точек условного экстремума // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 33, №10. С.1334 - 1342.