УДК 517.925

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ-ТИПА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 18 ноября 2003

Для каждого из шести уравнений Пенлеве получены новые формулы, определяющие общий вид ассоциированных с ними полиномиальных гамильтонианов. Показано существование ассоциированных с данными уравнениями гамильтонианов, отличных от полиномиальных.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве-типа, гамильтониан, солитон, преобразования Беклунда.

Введение

На протяжении четырех последних десятилетий теория волн в нелинейных средах и аналитическая теория уравнений с частными производными пережили — параллельно и при взаимном влиянии — значительный подъем.

Этот подъем был стимулирован нуждами физической науки, в различных областях которой — физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков — в начале шестидесятых годов стали систематически возникать проблемы взаимодействия волн большой амплитуды. Опыт показал, что при всем огромном многообразии существенно нелинейных задач основную роль здесь играет небольшое число универсальных математических моделей. Многие из этих моделей обладают уникальным свойством интегрируемости, позволяющим глубоко и эффективно провести их исследование. Для исследования вопроса интегрируемости систем Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 г. был предложен метод обратной задачи рассеяния (ОЗР) [1]. Суть математического открытия, сделанного указанными авторами, состояла в том, что они обнаружили связь уравнений Кортевега-де Фриза (KdV) с линейным уравнением Шредингера на прямой и предложили метод точного решения нелинейных уравнений с частными производными (НУЧП), получивший название метода ОЗР.

Следует отметить, что открытию метода ОЗР предшествовали глубокие исследования по теории солитонов. Так, например, еще в XVIII в. было установлено, что уравнение KdV и уравнение sin-Gordon имеют локализованные точные решения — солитоны. Уже тогда для уравнения sin-Gordon, изучавшегося в связи с его применением в теории поверхностей отрицательной кривизны, был открыт способ "размножения" точных решений — преобразование Беклунда.

Применение метода ОЗР позволило установить точную интегрируемость большого числа как НУЧП, так и обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеющих важные приложения. В настоящее время имеются десятки содержательных монографий и обзоров (не претендуя на полноту списка отметим наиболее известные и значимые, на наш взгляд, работы [2–8]), связанных с методом ОЗР и его приложениями. Поскольку в определении интегрируемых систем в существующей литературе имеются разночтения, то более подробная информация по данному вопросу содержится в [9–11].

Одна из важных особенностей, связанных с открытием метода ОЗР заключается в том, что исследование НУЧП, допускающих применение метода ОЗР, позволило установить тесную связь между последними и ОДУ, решения которых не имеют подвижных критических особых точек*, в частности, шестью уравнениями Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z\,, \qquad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha\,, \qquad (P_2)$$

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \qquad (P_3)$$

$$w'' = \frac{w'^2}{2w} - \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \qquad (P_4)$$

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}(\alpha w + \frac{\beta}{w}) + \frac{\gamma}{z}w + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \qquad (P_5)$$

$$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)w'^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' +$$
$$+ \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right] \qquad (P_6)$$

с произвольными параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, решения которых в общем случае не сводятся к известным трансцендентным функциям. Указанное обстоятельство способствовало тому, что уравнения Пенлеве в последние десятилетия являются объектом пристального внимания благодаря не только обнаружению их многочисленных приложений к различным задачам теоретической и математической физики, но и благодаря их богатой внутренней симметрии. Именно этот факт позволил П. Бутру еще задолго до открытия метода ОЗР описать некоторые асимптотические свойства решений уравнений Пенлеве, а Р. Фуксу, Л. Шлезингеру и Р. Гарнье найти связь трансцендентов Пенлеве с изомонодромными деформациями дифференциальных операторов. Н.П. Еругин, А.И. Яблонский, Н.А. Лукашевич, В.И. Громак и др. нашли классы точных и однопараметрических семейств решений и описали трансформационные свойства уравнений Пенлеве также без учета связи между НУЧП, интегрируемыми с помощью метода ОЗР.

История появлений уравнений Пенлеве, возникающих при их решении задачи и полученные результаты достаточно подробно изложены в работах [12–15].

Говоря о приложениях уравнений Пенлеве, необходимо указать на использование этих функций для описания определенных переходных и автомодельных режимов, а также подчеркнуть тот факт, что трансценденты Пенлеве играют в нелинейной теоретической физике ту же роль, что и классические специальные функции (типа Эйри, Бесселя, Вебера-Эрмита) для линейных дифференциальных уравнений с частными производными [16–19].

Несмотря на то что уравнения (P_2)–(P_6) получили название неприводимых (трансцендентных), длительное время существовали разные точки зрения на проблему сведения этих уравнений к линейным алгебраическим дифференциальным уравнениям. В настоящее время доказано, что уравнения Пенлеве не сводятся к линейным уравнениям [20]. Следовательно, ре-

* Это свойство решений называют *P*-свойством, а уравнения с *P*-свойством решений — уравнениями Пенлеве-типа или Р-типа.

шения каждого из уравнений (P_2)–(P_6) в общем случае представляют новые трансцендентные функции. Однако при определенных значениях параметров их решения могут быть выражены через элементарные функции (например, (P_3) при $\alpha = \gamma = 0$ или $\beta = \delta = 0$; (P_5) при $\gamma = \delta = 0$).

Для уравнений (P_2)–(P_6) получены рекуррентные соотношения, или преобразования Беклунда, как их обычно называют в этом случае. При помощи преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве можно построить иерархии решений уравнений (P_2)–(P_6), которые являются либо рациональными, либо алгебраическими, либо функциями, связанными (через повторное дифференцирование и умножение) с классическими трансцендентными функциями: Эйри, Бесселя, Вебера-Эрмита, Уиттекера и гипергеометрическими функциями.

Гамильтонианы, ассоциированные с уравнениями Пенлеве и их свойства

Еще одно важное свойство (наряду с другими, отмечавшимися ранее) шести трасцендентных уравнений Пенлеве состоит в том, что каждое из данных уравнений допускает представление в виде системы Гамильтона

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H_j}{\partial u}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\partial H_j}{\partial w}, \tag{1}$$

где $H_j = H_j(z,w,u) \quad (j = \overline{1,6})$ — полиномиальный относительно w, u гамильтониан, соответствующий уравнению (P_j).

Представление уравнений Пенлеве в виде системы (1) впервые рассматривалось в [21] и тесно связано с проблемой деформации уравнений, сохраняющих группу монодромии [22].

К. Окамото использовал [23] представление уравнений Пенлеве в виде системы (1) для построения уравнений второго порядка P-типа с иррациональной правой частью. С этой целью им были построены уравнения, определяющие функции вида $h_j(z) = \varphi(z)\, H_j(z, w(z), u(z))$, где H_j — гамильтониан, отвечающий уравнению (P_j), а функция $\varphi(z)$ определена следующим образом: $\varphi(z) = 1$ при $j = 1, 2, 4$; $\varphi(z) = z$ для $j = 3, 5$; $\varphi(z) = z(z-1)$, если $j = 6$. Полученные уравнения, которые будем называть h-уравнениями, так же, как и уравнения (P_1) — (P_6), имеют многочисленные приложения в нелинейной физике, в частности, в квантовой теории поля [24–26], а свойства их решений во многом схожи со свойствами решений уравнений Пенлеве.

В данном разделе для каждого из уравнений Пенлеве будут получены новые формулы, определяющие общий вид ассоциированных с ними полиномиальных гамильтонионов, включающие простейшие (ранее известные). Будут указаны также другие, ассоциированные с уравнениями (P_1)–(P_6) гамильтонианы, и рассмотрены их свойства.

1. Полиномиальный гамильтониан вида

$$\tilde{H}_1 = -\frac{u^2}{2} + 2w^3 + zw,$$

ассоциированный с уравнением (P_1), впервые получен Мальмквистом в работе [21]. Легко видеть, что функция

$$H_1 = \frac{u^2}{2} - 2w^3 - zw \tag{2}$$

также определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1). Укажем формулу, определяющую общий вид полиномиального гамильтониана, ассоциированного с уравнением (P_1). Справедлива [27]

Теорема 1. П*усть* $P_m(z,w)$, $Q_n(z,w)$ *— многочлены относительно* w *степени* $m,n \in Z_0$ *соответственно с аналитическими по* z *коэффициентами такие, что*

$$\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial z} \equiv \frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w}. \tag{3}$$

Тогда выражение

$$H_2 = \frac{[u + P_m(z,w)]^2}{2} + Q_n(z,w) - 2w^3 - zw \tag{4}$$

определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1) *, с точностью до произвольной (зависящей от* z*) функции и преобразования* $u \to pu, H \to pH$ *, где* p *— отличный от нуля параметр.*

Рассмотрим эквивалентную уравнению (P_1) систему

$$w' = u + S(w), \qquad u' = -[u + S(w)]S'(w) + 6w^2 + z, \tag{5}$$

отвечающую гамильтониану

$$H_3 = \frac{[u + S(w)]^2}{2} - 2w^3 - zw, \tag{6}$$

где $S(w)$ — аналитическая функция w. Вводя функцию $h_1(z) = H_3(z, w(z), u(z))$, находим, что

$$h_1'(z) = -w, \quad h_1''(z) = -u - S(w).$$

Тогда из (5) с учетом того, что $H_3 = h_1(z)$ находим уравнение

$$h_1''^2 + 4h_1'^3 + 2(zh_1' - h_1) = 0, \tag{7}$$

определяющее функцию $h_1(z)$. Так как в силу (5) $h_1(z) = \frac{w'^2}{2} - 2w^3 - zw$, то уравнение (7) является уравнением *P*-типа. Отметим, что (7) с точностью до обозначений совпадает с уравнением [23] для простейшего гамильтониана H_1, ассоциированного с (P_1).

Из формулы (6) следует существование рациональных (по переменной *w*) гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (P_1).

Примером отличного от полиномиального (по переменной *w*) гамильтониана является гамильтониан

$$H_4 = \frac{(u + \frac{z}{w})^2}{2} - 2w^3 - zw + ln\, w, \tag{8}$$

ассоциированный с уравнением (P_1). Характерной особенностью гамильтониана (8) является то, что определяющее функцию $\tilde{h}_1(z) = H_4(z, w(z), u(z))$ дифференциальное уравнение не является (в отличие от уравнения (7)) уравнением *P*-типа.

Существование гамильтонианов (6), (8) объясняется тем, что справедлива [27]

Теорема 2. *Пусть* $K(z,w), L(z,w)$ *— аналитические функции переменных* z, w *такие, что* $L(z,w) = \int \frac{\partial K(z,w)}{\partial z} dw$. *Тогда выражение*

$$H_5 = \frac{[u + K(z,w)]^2}{2} + L(z,w) - 2w^3 - zw$$

определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1). *Преобразование* $u \to pu, H_5 \to p\tilde{H}_5$ *с параметром* $p \neq 0$ *определяет гамильтониан* $\tilde{H}_5$ *также ассоциированный с уравнением* (P_1).

2. Нетрудно убедиться в том, что уравнение (P_2) можно представить в виде эквивалентной ему системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\tilde{H}_{II} = \frac{[u + P_m(z,w)]^2}{2} - \varepsilon(w^2 + \tfrac{z}{2})[u + P_m(z,w)] + \\ + Q_n(z,w) - (\alpha + \tfrac{\varepsilon}{2})w, \qquad \varepsilon^2 = 1, \tag{9}$$

где $P_m(z,w)$, $Q_n(z,w)$ — многочлены относительно w, степени $m, n \in Z_0$ соответственно с аналитическими по z коэффициентами, удовлетворяющие условию (3).

3. Ассоциированный с уравнением (P_3) полиномиальный гамильтониан в случае, когда $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$ (без ограничения общности можно считать $\alpha = -\delta = 1$) имеет вид

$$\tilde{H}_{III} = -\frac{\varepsilon w^2 [u + P_m(z,w)]^2}{2z} + \frac{1 - \varepsilon\beta}{z}[u + P_m(z,w)] + \varepsilon[u + P_m(z,w)] + \varepsilon w + Q_m(z,w). \tag{10}$$

Два ненулевых параметра γ и δ в уравнении (P_3) также всегда можно фиксировать, полагая $\alpha = -\delta = 1$. Ассоциированный с (P_3) в данном случае полиномиальный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}_{III'} = \frac{2w^2 [u + P_m(z,w)]^2}{z} + \varepsilon w^2 [u + P_m(z,w)] - \frac{(\sigma\beta - 1)[u + P_m(z,w)]w}{z} + \\ + \sigma[u + P_m(z,w)] + Q_m(z,w) - \frac{\varepsilon(\alpha\varepsilon + \sigma\beta - 2)}{4} w, \quad \sigma^2 = 1. \tag{11}$$

4. Уравнение (P_4) можно представить в виде эквивалентной ему системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\tilde{H}_{IV} = 2\varepsilon w[u + P_m(z,w)]^2 - \varepsilon w^2 [u + P_m(z,w)] - 2\varepsilon z w[u + P_m(z,w)] - \\ - a[u + P_m(z,w)] + bw + Q_m(z,w), \quad a^2 + 2\beta = 0, \quad 2b = 2\varepsilon - 1 + \frac{a}{2}. \tag{12}$$

5. Для уравнения (P_5) в случае $\delta \neq 0$ (без ограничения общности можно считать $2\delta = -1$) ассоциированный с ним полиномиальный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}_V = \frac{1}{2}[w(w-1)^2 v_1^2 - a(w-1)^2 v_1 - b(w-1)wv_1 + \varepsilon z w v_1 + s(w-1) + Q_m(z,w),$$

$$v_1 = u + P_m(z,w), \quad a^2 + 2\beta = 0, \quad b = -\frac{\gamma}{\varepsilon} - 1, \quad s = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - 2\alpha]. \tag{13}$$

6. Формула ассоциированного с уравнением (P_6) полиномиального гамильтониана имеет вид

$$\widetilde{H}_{VI} = \frac{1}{z(z-1)}[w(w-1)(w-z)v_2{}^2 - \theta_0(w-1)(w-z)v_2 - r_1 w(w-z)v_2 + (r_2+1)w(w-1)v_2 -$$
$$-\frac{k^2-(\theta_\infty-1)^2}{4}(w-z)-(z-1)\theta_0 r_2 - z\theta_1 r_2] + Q_m(z,w), \tag{14}$$

$v_2 = u + P_m(z,w)$, $\theta_0{}^2 + 2\beta = 0$, $r_1{}^2 = 2\gamma$, $r_2{}^2 = 1-2\delta$, $(\theta_\infty - 1)^2 = 2\delta$,
$k = 1-\theta_0 - r_1 + r_2$.

Отметим, что в формулах (10)–(14) многочлены $P_m(z,w)$, $Q_n(z,w)$ связаны условием (3).

Некоторые классы уравнений нелинейной физики, связанные с уравнениями Пенлеве-типа

1. В работах [9, 28, 29] дано описание и проведена классификация систем вида

$$u_t = u_{xx} + f(u,v,u_x,v_x),\ -v_t = v_{xx} + g(u,v,u_x,v_x), \tag{15}$$

интегрируемых методом обратной задачи рассеяния и обладающих бесконечной серией законов сохранения. Из таких систем отметим нелинейные системы интегрируемых уравнений типа Шредингера (список содержит более 40 систем), среди которых можно выделить несколько основных (опорных) систем, связанных с помощью подходящих преобразований с остальными системами из списка (см. [28], [29]).

Поскольку системы (15) интегрируемы с помощью метода обратной задачи рассеяния, то они (согласно гипотез [6]) могут иметь автомодельные решения, выражающиеся через решения уравнений *P*-типа.

Пусть в (15) $f = 2uu_x + v_x$, $g = -2(uv)_x$. Тогда имеем систему

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x + v_x,\ v_t = -v_{xx} + 2(uv)_x, \tag{16}$$

моделирующую процесс распространения слабо нелинейных волн на поверхности воды в приближении длинных волн. С помощью преобразования

$$u(x,t) = (-t)^{-1/2} p(z),\ z = x(-t)^{-1/2} \tag{17}$$

от системы (16) перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2}(p + zp') = p'' + q' + 2pp',\ q + \frac{1}{2}zq' = -q'' + 2(pq)'. \tag{18}$$

Систему (18) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}zp = p' + q + p^2 - \frac{1}{2}\alpha,\ q + \frac{1}{2}zq' = -q'' + 2(pq)', \tag{19}$$

где α – произвольная постоянная. Уравнение, определяющее функцию *p*, имеет вид

$$p''' - 6p^2p' - \frac{1}{4}z^2p' + 3zpp' + \alpha p' + 2p^2 - \frac{3}{4}zp - \frac{\alpha}{2} = 0. \tag{20}$$

Выполняя в (20) преобразование $p \to \frac{1}{2}p_1$, $z \to 2\tau$, придем к уравнению

$$\frac{1}{8}p_1''' - \frac{3}{4}p_1^{\,2}p_1 - \frac{1}{2}\tau^2 p_1' + \frac{3}{2}\tau p_1 p_1' + \frac{\alpha}{2}p_1' + p_1^{\,2} - \frac{3}{2}\tau p_1 - \alpha = 0\,. \qquad (21)$$

Полагая в (21) $p_1 = y + 2\tau$ относительно функции y, получаем уравнение

$$y''' = 6y^2y' + 12\tau yy' + 4(\tau^2 - \alpha)y' + 4y^2 + 4\tau y\,, \qquad (22)$$

первым интегралом которого является уравнение (P_4) с произвольными параметрами α, β и независимой переменной τ. Таким образом, с учетом (17) имеет место [30]

Теорема 3. *Пусть* $y = y(\tau)$ *— решение уравнения* (P_4) *при произвольных значениях параметров* α, β *. Тогда функции*

$$u(x,t) = \frac{y(\tau) + 2\tau}{2\sqrt{-t}}\,,$$

$$v(x,t) = (4t)^{-1}\left[\frac{dy}{d\tau} + y^2 + 2\tau y + 2(1-\alpha)\right], \quad 2\tau = z, \quad z = x(-t)^{-1/2}$$

являются решениями системы (16).

Наряду с системой (16) рассмотрим систему связанных уравнений Шредингера

$$p_t = p_{xx} + p^2q, \quad -q_t = q_{xx} + q^2p\,. \qquad (23)$$

Известно, что если функции p, q — решения этой системы, то функции

$$u = \frac{p_x}{p}\,,\ v = pq$$

определяют [28] решение системы (16). Преобразованием

$$p(x,t) = i\sqrt{2}\,exp[\,xt + \tfrac{2}{3}t^3\,]\;p(\tau), \qquad (24)$$

$$q(x,t) = i\sqrt{2}\,exp[-xt - \tfrac{2}{3}t^3\,]q(\tau), \quad \tau = x + t^2, \quad i^2 = -1$$

система (23) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2p}{d\tau^2} = 2p^2q + \tau p, \quad \frac{d^2q}{d\tau^2} = 2pq^2 + \tau q\,, \qquad (25)$$

которая при условии $p = q$ сводится к уравнению (P_2) в случае $\alpha = 0$, а при равенстве $q = 0$ – к уравнению Эйри с независимой переменной τ. Имеет место [30]

Теорема 4. *Пусть* $w = w(\tau)$ *— решение уравнения* (P_2) *при произвольном значении параметра* α *. Тогда функции*

$$p = C\exp[\varepsilon\int w(\tau)d\tau]\,, \qquad (26)$$

$$q = (2C)^{-1}\,exp[-\varepsilon\int w(\tau)d\tau](\,w^2 + \varepsilon\tfrac{dw}{d\tau} - \tau\,),$$

$\varepsilon^2 = -1$, C *— произвольная постоянная* $(C \neq 0)$, *являются решениями системы* (25).

Используя соотношения (24), (26) можно получить явные формулы автомодельных решений системы (23), выражающихся через решения уравнения (P_2) .

2. Для исследования сложного динамического поведения нелинейных систем чаще всего применяются методы численного моделирования и физические эксперименты. Однако эти

методы и эксперименты не всегда обеспечивают полную адекватность описания нелинейных систем, если они не дополнены аналитическими методами.

Система

$$x = -\nu x + sy + yz, \quad \dot{y} = -\nu y - sx + xz, \quad \dot{y} = T - xy \qquad (27)$$

с постоянными параметрами ν, s, T (точка означает производную по независимой переменной *t*) является предложенной [31, 32]) для описания временного изменения магнитного поля Земли моделью двудискового динамо, в которой при определенных положительных значениях параметров возможно наличие хаотических движений. Очевидно, что явные аналитические решения системы (27) в этом случае невозможны и фактически ожидается, что они будут сложными функциями времени с подвижными особыми точками в плоскости комплексного переменного *t*.

Один из возможных вопросов, который возникает после сказанного выше, сводится к следующему: существуют ли значения параметров ν, s, T , для которых общее решение системы (27) может быть выражено через известные аналитические функции, подвижными особыми точками которых могут быть только полюсы. Если отвлечься от физического смысла параметров системы (27), то (ниже переменную *t* считаем комплексной) ответ на поставленный вопрос положителен. Так, например, в работе [33] показано, что решения системы (27) в случае $s = T = 0$ выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве в одном частном случае. Аналитические свойства решений системы (27) исследовались с использованием метода Пенлеве-анализа. При этом было отмечено (подобная ситуация имеет место и для других трехмерных динамических систем с квадратичными нелинейностями, которые сводятся к известным моделям, обладающим хаотическим поведением), что наличие у системы (27) свойства Пенлеве гарантирует отсутствие у нее решений с хаотическим поведением. Данное обстоятельство при исследовании конкретной системы позволяет, с одной стороны, сузить область поиска параметров, при которых ее решения обладают хаотическим поведением, а с другой стороны, дает возможность получить условия для параметров (обеспечивающие существование) и строить [34 - 37] специальные классы точных решений, обладающих свойством Пенлеве.

Для полноты изложения отметим, что ветвление решений принято связывать с хаотической динамикой и отсутствием интегралов – законов сохранения [38].

Замечание. Метод Пенлеве-анализа (в основе которого лежит преложенная С.В. Ковалевской идея исследования интегралов уравнений движения твердого тела около неподвижной точки) первоначально был использован для исследования аналитических свойств решений известной системы Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y + \rho x - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \qquad (28)$$

имеющей в случае $\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad b = \dfrac{2}{3}$ странный аттрактор. Сигур получил 4 набора параметров [33], при которых система (28) либо вырождается в линейную систему, либо ее решения выражаются через эллиптические функции, либо через функции-решения второго или третьего уравнения Пенлеве.

Заключение

Современный интерес к уравнениям Пенлеве-типа объясняется тем, что последние (как уже отмечалось выше) возникают как редукции многих вполне интегрируемых уравнений в частных производных. Обобщенные симметрии таких уравнений дают возможность записать высшие аналоги ОДУ. Таким образом, можно получить иерархии ОДУ из вполне интегрируемых уравнений в частных производных. В связи с этим остается открытой проблема классификации решений высших аналогов уравнений Пенлеве.

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF PAINLEVE′ TYPE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

V.V. TSEGELNIK

Abstract

For each of the six Painleve′ equations were received new formulas which define the general form of with them polinomial namiltonians associated. There have been shown the existence of associated with given equations hamiltonians different from polinomial.

Литература

1. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* //Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095-1097.
2. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М., 1980.
3. Солитоны / Под ред. Р.Буллаф, Ф. Кодри. М., 1983.
4. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. М., 1985.
5. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
6. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
7. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Под ред. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. М., 1988.
8. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М., 1989.
9. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. / Ред. В.Г. Барьях-тар, В.Е. Захаров, В.Н. Черноусенко. Киев, 1990.
10. *Маханьков В.Г., Рыбаков В.Ю., Санюк В.И.* // Успехи физических наук. 1994. Т.164, №2. С. 121-148.
11. *Kruskal M.D., Clarkson P.A.* // Stud. Appl.Math. 1992. Vol.86. P. 87-165.
12. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.
13. The Paileve′ property. One century later. CRM series in Mathematical Physics Ed. R.Conte. New-York, 1999.
14. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura Sh.* Painleve′ differential equations in the complex plane. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin - New-York, 2002.
15. *Цегельник В.В.* Уравнения Пенлеве-типа: аналитические свойства решений и их приложения: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2002.
16. *Ablowitz M.I., Segur H.* // Stud. Appl. Math. 1977. Vol. 57. P. 43-44.
17. *Новиков В.Ю.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №11. С. 1915-1926.
18. *Манаков С.В.* // Письма в журнал эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 35, вып. 5.С. 193-195.
19. *Creamer D.B., Thacker H.B., Wilkinson D.* // Phys. Rev.D. 1981. Vol. 23, №12. P. 3081-3084.
20. *Громак В.И.* // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 2000. Т.6. С. 65-74.
21. *Malmquist I.* // Ark. Mat. Astr. Fys. 1922-23. Vol.17. P. 1-89.
22. *Fuchs R.* // Comptes Rendus. 1905. Vol. 141. P. 555-558.
23. *Okamoto K.* // Proc. Japan Acad. 1980. Vol. 56A. P. 264-268; P. 367-371.
24. *Сато М., Дзимбо М., Мива Т.* Голономные квантовые поля. М., 1983.
25. *Jimbo M., Miwa T., Ueno K.* // Physica D. 1981. Vol. 2. P. 306-352.
26. *Sato M., Miwa T., Jimbo M.* // Proc. Japan Acad. 1977. Vol.53A. P. 6-10.
27. *Цегельник В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, №5. С. 45-47.
28. *Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И.* // Успехи матем. наук. 1987. Т.42, вып.4. С. 3-53.
29. *Mikhailov A.V., Shabat A.B., Yamilov R.I.* // Commun. Math. Phys. 1988. Vol. 115. P. 1-89.
30. *Цегельник В.В.* // Диф. уравнения. 1994. Т.30, №6. С. 992-997.
31. *Rikitake T.* // Proc. of the Cambridge Phylos. Society. 1958. Vol. 54, Part 1. P. 89-105.
32. Нелинейные волны. Сб. статей / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов. М., 1979.
33. *Bountis T.C., Ramani A., Grammaticos B., Dorizzi B.* // Physica. 1984. Vol. 128A, №1-2. P. 268-288.
34. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, №3. С. 396-402.
35. *Цегельник В.В.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, №5. С. 84-88.
36. *Цегельник В.В.* // Диф. уравнения. 1999. Т.35, №7. С. 1003-1004.
37. *Tsegelnik V.V.* //Regular and chaotic dynamics. 1999. Vol. 4, №4. P. 77-80.
38. *Козлов В.В.* // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, №1. С. 3-11.