

УДК 621.317.846

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЕТЕЛЬ ГИСТЕРЕЗИСА

В.М. ИЛЬИН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь,**Поступила в редакцию 30 мая 2006*

Показана возможность аналитической аппроксимации неоднозначных характеристик ферромагнитных и пьезоэлектрических устройств, а также феррорезонансных цепей. Сущность метода состоит в получении этих кривых через введение вспомогательных однозначных, легко аппроксимируемых кривых.

Ключевые слова: ферромагнетики, пьезодиэлектрики, феррорезонансные цепи, аналитическая аппроксимация неоднозначных характеристик.

Введение

По мере развития научно-технического прогресса в различных областях техники все шире применяются нелинейные устройства разнообразного назначения. Для качественного математического моделирования, машинных методов проектирования и получения исчерпывающей информации о стационарных и нестационарных режимах работы настоятельно требуется совершенствование аналитической аппроксимации их нелинейных характеристик. Объясняется это тем, что используемые теперь способы аппроксимации, даже в частных случаях, не только не обеспечивают необходимой точности при расчете, например, потерь мощности, экономичности, но часто не позволяют получить конечные расчетные соотношения. Относится это и к наиболее распространенным аппроксимациям в виде укороченного степенного ряда или с помощью гиперболических функций, а также к другим видам аппроксимации, менее распространенным.

Поэтому в учебной [1, 2] и научной литературе [3, 4] в разделах, рассматривающих нелинейные электрические цепи и устройства, в основном используют графические методы. Не редки случаи, когда нелинейные характеристики вообще линеаризуются, чтобы получить информацию хотя бы приближенно. Это относится к цепям, содержащим нелинейные резисторы, индуктивности (дроссели) или нелинейные емкости (вариконды), в особенности тогда, когда требуется учет гистерезиса нелинейных индуктивностей и емкостей, т.е. неоднозначности их характеристик; как при анализе, например, зависимости индукции от напряженности намагничивающего поля, так и обратной зависимости напряженности от индукции (напряжения), что еще в большей мере осложняет расчет.

Разнообразные эффекты, которые могут возникать в нелинейных цепях и устройствах из-за несовершенства аппроксимаций рассматриваются лишь в принципе, без глубокого анализа и практических выводов, что ущербно и в научном отношении, и для фундаментальной подготовки студентов, магистров и аспирантов. В этом явно выраженная слабость разделов электротехники, автоматики, радиотехники, электроники и других дисциплин, можно сказать, всей литературы по нелинейным задачам. Слабость и в том, что существующие подходы к решению

нелинейных задач не позволяют в полной мере использовать современную вычислительную технику в условиях интенсивной компьютеризации.

Между тем в отношении аппроксимации неоднозначных нелинейных характеристик типа петель гистерезиса и, в первую очередь, о петлях гистерезиса можно сказать, что содержащаяся в них информация, получаемая только экспериментально, позволяет разработать более гибкую и достаточно точную аппроксимацию. Она пригодна для аналитического описания нелинейных процессов, дает возможность вывести конечные расчетные соотношения, их характеризующие. Причем с учетом того, что и ферромагнетики, и пьезоэлектрики отличаются большим разбросом параметров самих этих материалов и, как следствие, готовых изделий из них [5], например, ферромагнитные материалы в зависимости от физико-химического состава подразделяющиеся на магнитно-мягкие и магнитотвердые, с небольшой и большой коэрцитивной силой, с обычной и с прямоугольной петлей гистерезиса, низкочастотные и высокочастотные. Эти материалы подразделяют также по величине индукции насыщения и максимальной проницаемости. Существенное влияние оказывают термообработка материалов, их легирование, а также технология изготовления изделий из них. Все это влияет на параметры петель гистерезиса, что обуславливает необходимость рассматривать их обобщенно, в относительных единицах.

Использование относительных единиц и общепринятых обозначений аргумента и его функций

Наиболее полно свойства каждой из разновидностей ферромагнетиков характеризуются так называемой предельной (наибольшей) петлей гистерезиса [5] с ее параметрами (рис. 1): индукцией насыщения B_{\max} и порождающей ее напряженностью магнитного поля H_{\max} , при которой все домены ферромагнетика сориентированы в одном направлении; остаточной индукцией B_r , возникающей при снижении H до нуля; коэффициентом прямоугольности B_r/B_{\max} , коэрцитивной силой H_c , т.е. напряженностью поля, которую нужно приложить в обратном направлении, чтобы снизить остаточную индукцию B_r до нуля.

Если напряженность поля (намагничивающий ток) циклически изменяется от $+H_{\max}$ до $-H_{\max}$ и обратно, то создается симметричная предельная петля гистерезиса. Если же напряженность H изменяется в меньших пределах, создаются частные гистерезисные петли (рис. 2,а). Кроме того, ферромагнетики характеризуются основной и первоначальной кривыми намагничивания. Первая из них — это кривая, проходящая через вершины частотных петель, вторая возникает, если на полностью размагниченный материал воздействует намагничивающее нарастающее до напряженности H_{\max} поле. Она близка к основной кривой. Особой характеристикой является безгистерезисная кривая намагниченности [6], которая из начала координат круто поднимается вверх, а далее приближается к верхней ветви предельной петли и характеризуется наибольшей магнитной проницаемостью B/H в начальной области намагничивания материала.

Вершины предельных гистерезисных циклов $+B_{\max}$ и $-B_{\max}$ (рис. 1) лежат в самом начале области насыщения ферромагнитных материалов, в которой домены их структуры полностью сориентированы в положительном или отрицательном направлении, обусловленном знаком напряженности H . Поэтому в области насыщения все кривые, характеризующие ферромагнетик, совпадают. Это значит, что зависимость между B и H в ней однозначна. Следовательно, аппроксимация кривых $B(H)$ и $H(B)$ должна охватывать в общем случае области неоднозначной и однозначной их зависимости.

Учитывая то, что все разнообразие характеристик ферромагнетиков получают на основании экспериментальных данных и задают в виде таблиц или графиков, для общности метода их аппроксимации введем относительные безразмерные величины индукции и напряженности магнитного поля. За базовые их значения примем B_{\max} и H_{\max} . Тогда текущее значение индукции будет равно $b=B/B_{\max}$, коэффициент прямоугольности будет равен b_r . Соответственно относительные величины напряженности равны: $h=H/H_{\max}$; $h_c=H_c/H_{\max}$; $h_{\max}=1$, следовательно, в относительных единицах вершины предельной петли гистерезиса любого ферромагнетика будут лежать в точках с координатами $(h=1, b=1)$ и $(h=-1, b=-1)$. Здесь речь идет о зависимости индукции от напряженности.

Но важна также зависимость $h(b)$. И тогда аргумент этой зависимости b необходимо будет откладывать по оси абсцисс, а по оси ординат — напряженность. Для общности рассмотрения этих обоих случаев обозначим величину аргумента через X и отложим его по оси абсцисс, а его функцию Y — по оси ординат, т.е. будем рассматривать в обоих случаях зависимость $Y(X)$, как это общепринято. Следует заметить, что в обоих случаях аргумент X и его функция Y непосредственно для петли гистерезиса в относительных единицах будут иметь значения, лежащие в пределах ± 1 (рис. 2,а, рис. 3,а).

Теорема, обосновывающая новую аппроксимацию петель гистерезиса

На основании экспериментальных значений ординат $Y_1(X)$ верхней ветки петли гистерезиса и ординат $Y_2(X)$ нижней ветви определим их суммы $f_1(X) = Y_1(X) + Y_2(X)$ и произведения $f_2(X) = Y_1(X)Y_2(X)$. Это дает основание сформулировать с учетом известной связи между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами следующую теорему:

Теорема. Каждому значению X соответствует пара функций $Y_1(X)$ и $Y_2(X)$ — ординат ветвей петли гистерезиса, являющихся действительными корнями квадратного уравнения

$$Y^2 - f_1(X)Y + f_2(X) = 0 \quad (1)$$

с попарно переменными коэффициентами $f_1(X)$ и $f_2(X)$.

Корни уравнения (1), т.е. ординаты обеих ветвей петли гистерезиса, в общем виде равны:

$$\begin{aligned} Y_{1,2} &= \frac{f_1(X)}{2} \pm \sqrt{\frac{f_1^2(X)}{4} - f_2(X)} = \frac{Y_1(X) + Y_2(X)}{2} \pm \sqrt{\frac{Y_1^2(X) + 2Y_1(X)Y_2(X) + Y_2^2(X)}{4} - Y_1(X)Y_2(X)} = \\ &= \frac{Y_1(X) + Y_2(X)}{2} \pm \sqrt{\frac{[Y_1(X) - Y_2(X)]^2}{4}} = \frac{Y_1(X) + Y_2(X)}{2} \pm \frac{Y_1(X) - Y_2(X)}{2} = \frac{Y_1(X)}{Y_2(X)}. \end{aligned}$$

Это полностью соответствует утверждению, содержащемуся в теореме.

Следует подчеркнуть, что уравнение (1) записано в общем виде. Но для петли гистерезиса аргумент X , ординаты ее ветвей, суммы ординат $f_1(X)$, их произведения $f_2(X)$ изменяются и по величине, и по знаку. Ординаты $f_1(X)$ верхней ветви петли и соответствующие ей корни квадратного уравнения в интервале значений аргумента $X = 1 \div (-X_c)$ положительны, а при значениях $X = (-X_c) \div -1$ отрицательны. Ординаты $Y_2(X)$ нижней ветви петли положительны в интервале $X = 1 \div X_c$ и отрицательны в интервале $X = X_c \div -1$. В силу этого значения суммы ординат $f_1(X)$ положительны в интервале $X = 1 \div 0$ и отрицательны в интервале $X = 0 \div -1$. Значения произведений ординат $f_2(X)$ в интервале $X = 1 \div X_c$ положительны, в интервале $X = X_c \div -X_c$ отрицательны и далее в интервале $X = -X_c \div -1$ опять положительны.

Симметрия петли гистерезиса относительно начала координат обуславливает симметрию сумм и произведений ординат, что в частности, сокращает вычисления и предопределяет их значения в наиболее характерных точках петли. Например, если $X = X_{\max} = 1$ $f_1(X) = 2$, $f_2(X) = 1$, уравнение (1) принимает вид

$$Y^2 - 2Y + 1 = 0. \quad (2)$$

Его решение дает кратные корни, равные 1. При $X = X_c$ имеем $f_1(X) = Y_1(X)$, $f_2(X) = 0$ и квадратное уравнение имеет вид

$$Y^2 - Y_1(X)Y = 0. \quad (3)$$

Его корни: $Y_1 = Y_1(X)$, $Y_2 = 0$.

В свою очередь, если $X = 0$, то $f_1(X) = 0$; $f_2(X) = -Y_1^2(X)$ и уравнение (1) преобразуется к виду

$$Y^2 - Y_1^2(X) = 0 \quad (4)$$

с корнями $Y_{12} = \pm Y_1(X)$.

При $X = -X_c$ $f_1(-X_c) = -Y_2(X_c)$, $f_2(-X_c) = 0$ имеет место уравнение

$$Y^2 + f_1(-X_c)Y = 0. \quad (5)$$

Его корни $Y_1 = 0$, $Y_2 - f_1(-X_c) = -Y_2(-X_c)$.

Для значения $X = -X_{\text{макс}}$ имеем $f_1(-X_{\text{макс}}) = -2$, $f_2(-X_{\text{макс}}) = 1$, а уравнение (1) имеет вид

$$Y^2 + 2Y + 1 = 0 \quad (6)$$

с кратным корнем равным -1 .

При всех значениях аргумента X , имеющих место между его значениями в отмеченных характерных точках, которым соответствуют решения частных уравнений (2)–(6), уравнение (1) будет полным квадратным и его корнями должны быть ординаты обеих ветвей петли гистерезиса с соответствующими величинами и знаками. Таким образом, при изменениях аргумента в пределах $X = X_{\text{макс}} \div -X_{\text{макс}}$ и наоборот должна происходить трансформация квадратного уравнения, описывающего петлю гистерезиса, от частного вида к общему виду и от него опять к частному виду. Такой переход должен происходить в каждой отмеченной характерной точке (всего их 5).

Аппроксимация слагаемых решения квадратного уравнения с переменными коэффициентами

В большинстве случаев аналитического решения нелинейных задач аппроксимации подвергаются однозначные нелинейные характеристики или их отдельные участки с различным уровнем точности. Неоднозначные кривые, такие, например, как петли гистерезиса, заменяют при этом однозначными характеристиками, пренебрегая гистерезисом, ибо не было найдено соответствующего этому явлению удовлетворительного математического описания. В данной работе предлагается новый подход в решении этой проблемы. Суть его заключается в том, что аппроксимируются не сами неоднозначные кривые, а полученные через их параметры однозначные кривые. Для аппроксимации трудно поддающихся ей петель гистерезиса такими однозначными кривыми логично принять слагаемые решения изложенного выше квадратного уравнения с переменными коэффициентами.

Таблица 1. Расчетные функции, через которые аппроксимируются зависимости $b(h)$

x f(x)	1	0,857	0,571	0,285	0,233=h _c	0	-0,233=h _c	-0,285	-0,571	-0,857	-1
$y_1(x)$	1	0,97959	0,93877	0,85714	0,83673	0,69387	0	-0,36734	-0,85714	-0,95918	-1
$y_2(x)$	1	0,95918	0,85714	0,36734	0	-0,69387	-0,83673	-0,85714	-0,93877	-0,97959	-1
$f_1(x) = y_1(x) + y_2(x)$	2	1,93877	1,79591	1,22448	0,83673	0	-0,83673	-1,22448	-1,79591	-1,93877	-2
$f_2(x) = y_1(x)y_2(x)$	1	0,93960	0,80465	0,31486	0	-0,48145	0	0,31486	0,80465	0,93960	-1
$f_3(x) = f_1(x)/2$	1	0,96938	0,89795	0,61224	0,41836	0	-0,41836	-0,61224	-0,89795	-0,96938	-1
$f_4(x) = \pm\sqrt{f_3^2(x) - f_2(x)}$	0	0,01036	0,04090	0,24498	0,41836	0,69387	0,41836	0,24498	0,04090	0,01036	0

Таблица 2. Расчетные функции, через которые аппроксимируются зависимости $h(b)$

x $f(x)$	1	0,727	0,70512= b_r	0,363	0,1815	0	-0,1815	-0,363	-0,70512= b_r	-0,727	-1
$y_1(x)$	1	0,46078	0,42156	0,27450	0,24117	0,22549	0,20098	0,16666	0	-0,04901	-1
$y_2(x)$	1	0,04901	0	-0,16666	-0,20098	-0,22549	-0,24117	-0,27450	-0,42156	-0,46078	-1
$f_1(x) = y_1(x) + y_2(x)$	2	0,50979	0,42156	0,10784	0,04019	0	-0,04019	-0,10784	-0,42156	-0,50979	-2
$f_2(x) = y_1(x)y_2(x)$	1	0,02258	0	-0,04574	-0,04847	-0,05134	-0,04847	-0,04574	0	0,02258	1
$f_3(x) = f_1(x)/2$	1	0,25489	0,21078	0,05392	0,02009	0	-0,02009	-0,05392	-0,21078	-0,25489	-1
$f_4(x) = \pm\sqrt{f_3^2(x) - f_2(x)}$	0	0,20589	0,21078	0,22056	0,22108	0,22659	0,22107	0,22056	0,21078	0,20589	0

Общий вид его решения, как уже отмечалось, следующий:

$$Y_{12} = f_1(X)/2 \pm \sqrt{f_1^2(X)/4 - f_2(X)}. \quad (7)$$

Следует иметь в виду, что при одинаковых знаках ординат $Y_1(X)$ и $Y_2(X)$ в дискриминанте $\frac{f_1^2(X)}{4} - f_2(X)$ уравнений (1) и (7) квадрат их суммы $f_1^2(X)$ преобразуется в квадрат их разности, и наоборот, при разных знаках $Y_1(X)$ и $Y_2(X)$ квадрат их разности преобразуется в квадрат их суммы. Это важное обстоятельство в конечном счете приводит знаки и величины корней уравнений (1) и (7) в соответствие с величинами ординат.

Введем обозначения: $f_3(x) = f_1(X)/2$ и $f_4(x) = \pm\sqrt{f_3^2(X) - f_2(X)}$, тогда уравнение петли гистерезиса можно в свернутом виде представить как

$$Y_{12} = f_3(X) \pm f_4(X), \quad (8)$$

где $f_3(X)$ — средняя кривая петли гистерезиса, проходящая через ее вершины и начало координат, относительно которого она симметрична; $f_4(X)$ — однозначная кривая с нулевыми значениями ординат в точках $X = \pm 1$ и максимальным значением в точке $(0, \mathcal{E}_r^2)$. Она симметрична относительно оси ординат, дополняет среднюю кривую до петли гистерезиса.

На рис. 2,б представлены эти кривые, построенные на основании расчетных данных табл. 1 для случая, когда петля гистерезиса выражает зависимость индукции от напряженности, а на рис. 3,б — по табл. 2 аналогичные кривые для зависимости напряженности от индукции. Для обоих видов кривых при их аппроксимации могут быть применены известные методы: наименьших квадратов или же выбранных точек с укороченным степенным рядом. Причем за выбранные удобно принять такие точки, которые соответствуют решениям частных уравнений (2)÷(6). Они имеют и симметричные значения координат — по пять на верхней и на нижней ветвях петли. С учетом отмеченной симметрии этих кривых можно обойтись только тремя выбранными точками с абсциссами $X=0$, $X=1$, а между ними взять, например, точку с $X=X_c$, для которой $f_1(X) = y_1(X)$, $f_2(X) = 0$. В зависимости от характера решаемой нелинейной задачи выбирается вид аппроксимации петли гистерезиса. В частности, если требуется определить площадь петли, которая пропорциональна потере мощности на перемагничивание ферромагнетика, когда X не является функцией времени, удобно пользоваться аппроксимацией $f_3(X) = \sin^m X$, $f_4(X) = b_r \cos^n X$ с одним коэффициентом аппроксимации m и n большим или меньшим 1, в зависимости от функций $b(h)$ или $h(b)$.

Область насыщения за пределами петли гистерезиса можно представить в виде прямой $y = a + dx$ (рис. 2,а). В точке $(x = 1, y = 1)$ выполнено равенство $a + d = 1$, что дает возможность с учетом заданного наклона прямой определить a и d .

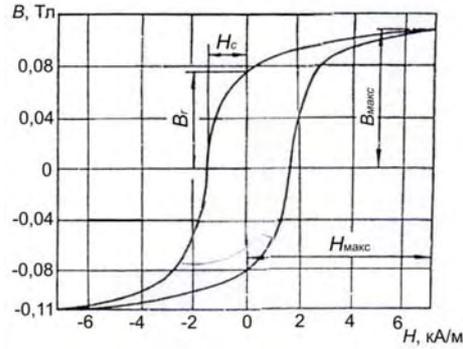


Рис. 1. Петля гистерезиса электротехнической стали

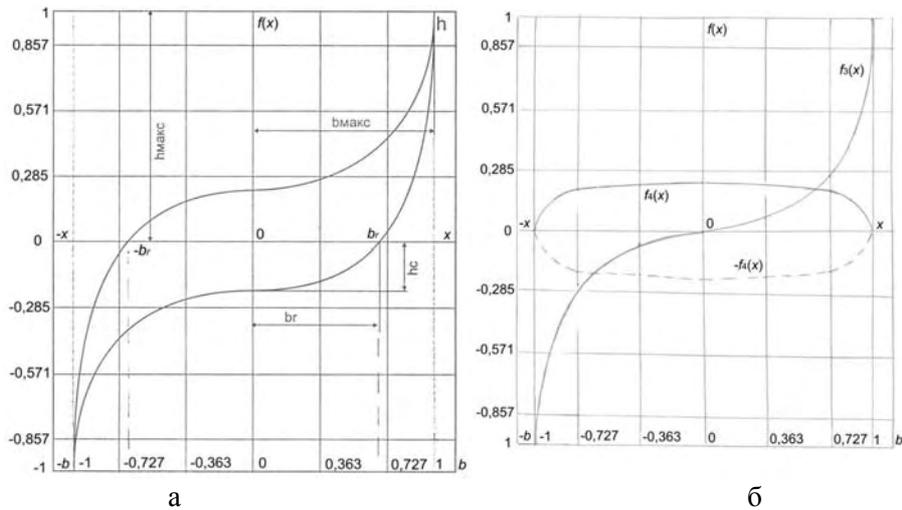


Рис. 2. Петли гистерезиса в относительных единицах $-b(h)$ (а) и аппроксимирующие функции $f_3(X)$ и $f_4(X)$ (б)

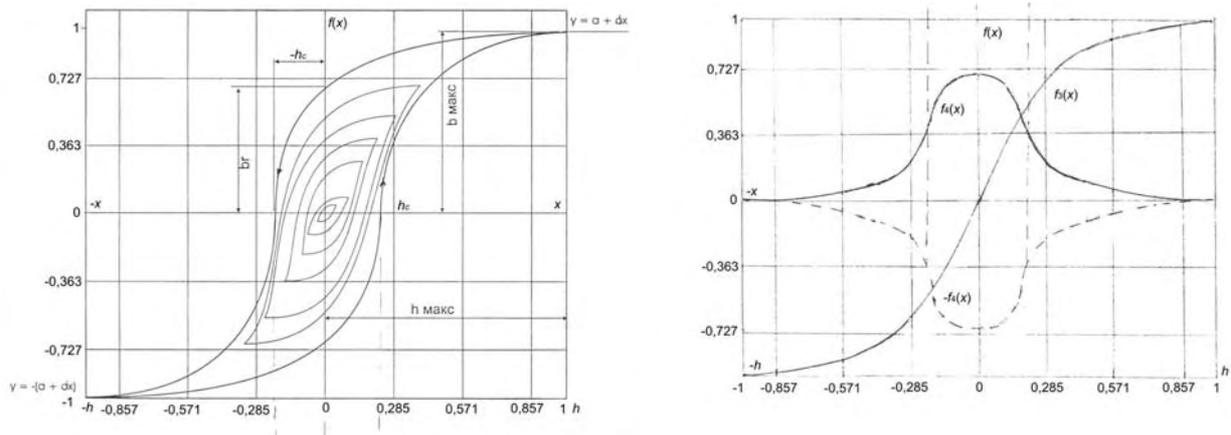


Рис. 3. Петля гистерезиса в относительных единицах $h(b)$ (а) и аппроксимирующие функции $f_3(X)$ и $f_4(X)$ (б)

В статье подробно рассмотрен новый метод аппроксимации петель гистерезиса ферромагнитных материалов и устройств как наиболее распространенных. Он пригоден для математического моделирования неоднозначных характеристик сегнетодиэлектриков и варикондов с их неоднозначной зависимостью заряда q от приложенного напряжения U , а также для аппроксимации других неоднозначных характеристик, например, феррорезонансных кривых. Метод

дает возможность создать программы для расчета многих нелинейных цепей и устройств на ЭВМ.

Заключение

В обобщенном виде изложены возможность аналитической аппроксимации неоднозначных характеристик ферромагнитных и пьезоэлектрических устройств, а также феррорезонансных цепей, т.е. зависимостей $B(H)$, $q(U)$ и обратных функций. Сущность метода состоит в том, что все эти зависимости получаются через введение вспомогательных однозначных, легко аппроксимируемых кривых. Доказана теорема о существовании такой возможности.

THE METHOD OF HYSTERESIS CURVES ANALYTICAL APPROXIMATION

V.M. ILYIN

Abstract

Analytical approximation possibility of complex characteristics of the ferromagnetic and piezoelectric devices and ferroresonance circuits is shown.

Литература

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. М., 1989.
2. Кушнир В.Ф., Ферсман Б.А. Теория нелинейных электрических цепей. М., 1974.
3. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. М., 1968.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., 1968.
5. Богородицкий Н.П., Пасынков В.В., Тареев Б.М. Электротехнические материалы. Л., 1985.
6. Ильин В.М., Бладыко В.М. // Изв. вузов СССР. 1960. № 4. С. 27–33.