УДК 517.925

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПЕРВЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь,

Поступила в редакцию 28 октября 2005

Получена формула, определяющая общий вид полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с первым уравнением Пенлеве. Доказано также существование других (отличных от полиномиальных) гамильтонианов, ассоциированных с данным уравнением.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, свойство Пенлеве, гамильтониан.

Введение

Области математического анализа, теории дифференциальных уравнений и математической физики, связанные с исследованиями нелинейных дифференциальных уравнений и систем P-типа (или со свойством Пенлеве, т.е. отсутствием у решений подвижных особых многообразий) интенсивно развиваются.

Шесть трансцендентных уравнений Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z, \qquad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \qquad (P_2)$$

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \qquad (P_3)$$

$$w'' = \frac{w'^2}{2w} - \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 - 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \qquad (P_4)$$

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma}{z}w + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \qquad (P_5)$$

$$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)w'^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' +$$

$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha+\frac{\beta z}{w^2}+\frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2}+\frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right) \qquad (P_6)$$

с постоянными параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, полученные впервые французским математиком Пенлеве и его учениками, обладают рядом важных свойств [1, 2]. В частности, каждое из них представимо в виде системы Гамильтона полиномиального типа. Так, например, уравнение (P_1) представимо в виде системы [3]

$$w'=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}, \quad u'=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial w}, \qquad (1)$$

где $\tilde{H}=-\frac{u^2}{2}+2w^3+zw$. Легко видеть, что функция $\tilde{H}=\frac{u^2}{2}-2w^3-zw$ также определяет гамильтониан (который будем называть простейшим), ассоциированный с уравнением (P_1). Но вопрос о существовании других полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (P_1) и отличных от $\tilde{H}$ и H, оставался открытым.

Полиномиальные гамильтонианы, ассоциированные с первым уравнением Пенлеве

Цель настоящее работы состоит в том, чтобы охарактеризовать весь класс полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (P_1), а также исследовать вопрос о существовании других (отличных от полиномиальных) гамильтонианов, описать их структуру и некоторые свойства. Решение указанной задачи важно по двум причинам. Во-первых, ее реализация позволяет описать все классы эквивалентных уравнению (P_1) гамильтоновых систем полиномиального типа. Другая мотивировка сводится к следующему. В работе [4] для простейших полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнениями (P_1)–(P_6), получены определяющие их дифференциальные уравнения (h-уравнения), которые являются уравнениями P-типа и имеют целый ряд приложений. В связи с этим важным является выделение среди ассоциированных с уравнением (P_1) таких гамильтонианов (не обязательно полиномиальных), что определяющие их дифференциальные уравнения совпадают с h-уравнением для простейшего гамильтониана H.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $P_m(z,w), Q_n(z,w)$ *— многочлены по* w *степени* $m,n\in Z_0$ *соответственно с аналитическими по* z *коэффициентами такие, что*

$$\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial z}\equiv\frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w}. \qquad (2)$$

Тогда множество ассоциированных с уравнением (P_1) *полиномиальных гамильтонианов определяется выражением*

$$H_1=\frac{[u+P_m(z,w)]^2}{2}-2w^3-zw+Q_n(z,w) \qquad (3)$$

с точностью до произвольной (зависящей от z*) функции и преобразования*

$$u\to pu, \quad H_1\to pH_1, \qquad (4)$$

где p *— отличный от нуля параметр.*

Доказательство. Пусть $H_2(u,w,z)$ — полиномиальный по переменным u,w с аналитическими по z с коэффициентами гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1). Тогда необходимо, чтобы

$$H_2 = \frac{f(z,w)u^2}{2} + \varphi(z,w)u + \psi(z,w), \tag{5}$$

где f,φ,ψ — многочлены по переменной w с аналитическими по z коэффициентами. Действительно, если предположить существование ассоциированного с (P_1) гамильтониана

$$\tilde{H}_2 = f(z,w)u^l + \sum_{k=1}^{l} f_k(z,w)u^{l-k}, \quad l>2,$$

в котором $f, f_k (k=\overline{1,l})$ — многочлены по w с аналитическими по z коэффициентами, то рассмотрению подлежат два случая:

1. $\tilde{H}_2 = f(z,w)(u+P_m(z,w))^l + f_{l-1}(z,w)(u+P_m(z,w)) + Q_n(z,w)$

$$\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial z} \equiv \frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w};$$

P_m, Q_n — многочлены по w.

2. $f(z,w)\not\equiv 0$ и хотя бы одна из функций $f_k(z,w)\not\equiv 0$ (считаем $\frac{\partial f_{l(z,w)}}{\partial w}\not\equiv 0$, если $f_l(z,w)\not\equiv 0$), но

$$\tilde{H}_2 \neq f(z,w)(u+P_m(z,w))^l + f_{l-1}(z,w)(u+P_m(z,w)) + Q_n(z,w),$$

$$\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial z} \equiv \frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w}.$$

Легко проверить, что соответствующая гамильтониану $\tilde{H}_2$ в первом случае система либо вырождается в уравнение первого порядка по переменной w при $f(z,w)\equiv 0$, либо эквивалентна по w уравнению $w''=R(z,w,w')$ (R — рациональная относительно w,w' с аналитическими по z коэффициентами функция), которое ни при каком выборе функций $f_{l-1}(z,w), P_m(z,w), Q_n(z,w)$ не сводится к уравнению (P_1).

Рассматривая второй случай, приходим к заключению, что соответствующая гамильтониану $\tilde{H}_2$ система эквивалентна уравнению второго порядка по переменной w с иррациональной относительно w,w' правой частью. Но правая часть (P_1) является многочленом второй степени относительно w. Таким образом, случай $l>2$ невозможен.

Пусть система

$$w' = \varphi(z,w) + f(z,w)u,$$

$$u' = -\frac{\partial\psi}{\partial w} - \frac{\partial\varphi}{\partial w}u - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w}u^2, \tag{6}$$

отвечающая гамильтониану (5), эквивалентна уравнению (P_1). Из (6) находим

$$w'' = \frac{1}{2} f\frac{\partial f}{\partial w}u^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \varphi\frac{\partial f}{\partial w}\right)u + \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} - f\frac{\partial\psi}{\partial w}. \tag{7}$$

Подставляя w' из (7) в (P_1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, получим систему уравнений в частных производных для определения функций f,φ,ψ

$$f\frac{\partial f}{\partial w}=0, \tag{8.a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\varphi\frac{\partial f}{\partial w}=0, \tag{8.b}$$

$$f\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}-f\frac{\partial\psi}{\partial w}=6w^2+z. \tag{8.c}$$

Из (8.a) следует, что либо $f=0$, либо $\frac{\partial f}{\partial w}=0$. Если $f=0$, то первое уравнение системы (6) вырождается в уравнение первого порядка по переменной w. Если $\frac{\partial f}{\partial w}=0$, то из (8.b) следует, что $\frac{\partial f}{\partial w}=0$. Значит, $f\equiv\text{const}$. Система допускает произвол в выборе функций f,φ,ψ. Например, она имеет решение

$$f=p,\qquad \varphi=0,\qquad \psi=-\frac{2w^3+zw}{p},$$

где $p\neq 0$ — параметр. Тогда имеем гамильтониан

$$H_3=\frac{pu^2}{2}-\frac{2w^3+zw}{p}. \tag{9}$$

Заметим, что при $p=1$ H_3 совпадает с H. Более того, параметр $p\neq 0$ всегда можно фиксировать, полагая $p=1$. Действительно, с помощью преобразования $u\to p^{-1}u,\ H_3\to p^{-1}H_3$ гамильтониан (9) переходит в H.

Пусть $\varphi=P_m(z,w)$ — многочлен относительно w степени $m\in Z_0$ с аналитическими по z коэффициентами. Тогда, полагая при $f=1,\ \psi=\frac{P_m^2(z,w)}{2}+Q_n(z,w)-2w^3-zw$, где $Q_n(z,w)$ — многочлен относительно w степени $n\in Z_0$ с аналитическими по z коэффициентами, приходим к заключению, что система (8.a)– (8.c) совместна, если выполнено условие (2). При этом для любого многочлена $P_m(z,w)$, исходя из условия (2), можно получить многочлен $Q_n(z,w)$. Функцию H_2 при указанных выше значениях f,φ,ψ можно представить в виде (3). Легко видеть, что с помощью преобразований (4) гамильтониан H_1 преобразуется в новый гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1).

Предположим, что существует ассоциированный с (P_1) гамильтониан

$$H_0=\frac{u^2}{2}+\varphi_1(z,w)u+\psi_1(z,w), \tag{10}$$

полиномиальный по u,w и отличный от H_1. Без ограничения общности будем считать коэффициенты при u^2 в H_1 и H_0 одинаковыми (в нашем случае равными $\frac{1}{2}$). Этого всегда можно добиться в силу свойства (4) гамильтониана H_1. Рассмотрим эквивалентные уравнению (P_1) системы

$$w' = u + P_m(z,w),$$

$$u' = -[u + P_m(z,w)]\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial w} - \frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w} + 6w^2 + z; \qquad (11)$$

$$w' = u + \varphi_1(z,w),$$

$$u' = -\frac{\partial \varphi_1(z,w)}{\partial w}u - \frac{\partial \psi_1(z,w)}{\partial w}, \qquad (12)$$

порождаемые гамильтонианами H_1 и H_0 соответственно. Приравнивая правые части первых уравнений систем (11) и (12) получаем, что

$$P_m(z,w) = \varphi_1(z,w). \qquad (13)$$

Очевидно, что при заданном многочлене $\varphi_1(z,w)$ по переменной w всегда можно подобрать многочлен $P_m(z,w)$ так, что будет выполнено условие (13). Поскольку каждая из систем (11), (12) эквивалентна уравнению (P_1) и их первые уравнения совпадают, то при выполнении этого условия, с учетом (2), совпадут и вторые уравнения, а гамильтониан H_1 преобразуется в H_0 с точностью до произвольной функции от z.

Таким образом, формула (3) с точностью до произвольной (зависящей от z) функции и масштабного преобразования (4) определяет общий вид полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с (P_1), при условии (2). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $K(z,w)$, $L(z,w)$ *— аналитические функции переменных* z, w *такие, что* $L = \int \frac{\partial K}{\partial z} dw$. *Тогда выражение*

$$H_4 = \frac{[u + K(z,w)]^2}{2} - 2w^3 - zw + L(z,w) \qquad (14)$$

определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (P_1). *Преобразование* $u \to pu$, $H_4 \to pH_4$ *с параметром* $p \neq 0$ *определяет гамильтониан, также ассоциированный с уравнением* (P_1).

Для доказательства теоремы достаточно из системы Гамильтона, отвечающей гамильтониану (14), исключить переменную u.

Если в (14) $K(z,w) = S(w)$ — аналитическая функция переменной w, то без ограничения общности гамильтониан H_4 можно записать в виде

$$H_5 = \frac{[u + S(w)]^2}{2} - 2w^3 - zw. \qquad (15)$$

Из (15) следует существование рациональных по w гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (P_1).

Рассмотрим эквивалентную уравнению (P_1) систему

$$w' = u + S(w),$$

$$u' = -[u + S(w)]S'(w) + 6w^2 + z\,, \tag{16}$$

отвечающую гамильтониану H_5. Вводя функцию $h_1(z) = H_5(z, w(z), u(z))$, находим, что $h_1'(z) = -w$, $h_1''(z) = -u - S(w)$.

Тогда из (16) с учетом того, что $H_5 = h_1(z)$, находим уравнение

$$h_1''^2 + 4h_1'^3 + 2(zh_1' - h_1) - 0\,, \tag{17}$$

определяющее функцию h_1. Так как в силу (16) $h_1(z) = \frac{w'^2}{2} - 2w^3 - 2zw$, то уравнение (17) является уравнением *P*-типа. Отметим, что (17) с точностью до обозначений совпадает с уравнением [4] для полиномиального гамильтониана *H*, ассоциированного с (P_1).

Примером отличного от полиномиального (по переменной *w*) гамильтониана является также гамильтониан

$$H_6 = \frac{(u + \frac{z}{w})^2}{2} - zw^3 - zw + \ln w\,, \tag{18}$$

ассоциированный с уравнением (P_1). Характерной особенностью гамильтониана (18) является то, что определяющее функцию $\tilde{h}_1(z) = H_6(z, w(z), u(z))$ дифференциальное уравнение не является (в отличие от уравнения (17)) уравнением *P*-типа.

Теорема 1 анонсирована в работе [6].

Заключение

Таким образом, в работе построены новые полиномиальные гамильтонианы, ассоциированные с уравнением (P_1), и доказана их единственность. Выделен класс ассоциированных с первым уравнением Пенлеве гамильтонианов таких, что определяющие их дифференциальные уравнения (*h*-уравнения) совпадают с аналогичным уравнением для простейшего полиномиального гамильтониана *H*. Доказано существование ассоциированных с уравнением (P_1) гамильтонианов, обладающих свойством, что определяющие их *h*-уравнения не являются уравнениями *P*-типа.

Представление уравнений Пенлеве в виде гамильтоновых систем тесно связано с теорией изомодромной деформации линейных уравнений и систем и имеет приложение в квантовой теории поля [5]. Суть этой связи заключается в том, что метод изомонодромной деформации линейных уравнений и систем ассоциируются с проблемой Римана–Гильберта и его реализация предполагает нахождение условий, которые есть суть уравнения Пенлеве-типа или эквивалентные уравнениям Пенлеве системы Гамильтона, в частности, полиномиального типа.

ON POLYNOMIAL HAMILTONIANS ASSOCIATED WITH THE FIRST PAINLEVE' EQUATION

V.V. TSEGELNIK

Abstract

The formula defining the general form of polynomial Hamiltonians associated with first Painleve' equation is obtained. The existence of other (different from polynomial) Hamiltonians associated with this equation, is also proved.

Литература

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
2. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
3. *Malmquist J.* Sur les equations differentieles du second ordre don't l'integral general a sespoints critiques fixes // Ark. Math. Astr. Fys. 1922–23. Vol. 17. P. 1–89.
4. *Okamoto K.* // Proc. Japan Acad. 1980. Vol. 56 A. P. 367–371.
5. *Сато М., Дзимбо М., Мива Т.* Голономные квантовые поля. М., 1983.
6. *Цегельник В.В.* Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 5. С. 45–47.