

УДК 351

## ОДНОКОНТУРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

С.В. СОЛОВЬЕВА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 3 февраля 2006*

Рассматривается решение актуальной задачи построения математических моделей систем организационно-ресурсного управления в классе одноконтурных динамических дискретных следящих систем с целью получения количественных оценок эффективности на основе методов динамического анализа и параметрической оптимизации.

Решение поставленной задачи осуществляется в соответствии с алгоритмом: поэлементная и обобщенная функциональные феноменологические модели – поэлементные и обобщенные структурные схемы как математические интерпретации функциональных схем – разностные уравнения для показателей эффективности – оценки эффективности.

*Ключевые слова:* организационно-ресурсное управление, математическая модель, одноконтурная динамическая дискретная следящая система, система организационного управления, обратная связь, целевое рассогласование, эффективность управления, количественная оценка.

### Введение

Рассматривается решение актуальной задачи построения математических моделей систем организационно-ресурсного управления в классе одноконтурных динамических дискретных следящих систем с целью получения количественных оценок эффективности на основе методов динамического анализа и параметрической оптимизации.

Решение поставленной задачи осуществляется в соответствии с алгоритмом: поэлементная и обобщенная функциональные феноменологические модели — поэлементные и обобщенные структурные схемы как математические интерпретации функциональных схем — разностные уравнения для показателей эффективности — оценки эффективности.

Феноменологические модели систем организационного управления и их наглядные функциональные представления рассмотрены в [1].

### Построение математических моделей

В качестве общего принципа структурного построения систем управления (принятия решения) можно предложить организацию обратной связи, принятую в кибернетическом подходе. При этом управление осуществляется по измеренному рассогласованию между желаемым законом изменения целевой функции и в действительности реализуемым системой. В такой модели априорно и апостериорно могут быть учтены возмущающие воздействия, искажающие отработку системой задающего (полезного) целевого воздействия в соответствии с его динамикой и свойствами управления. Свойства "формирователя" задающего воздействия (целевого

планирования), измерителя целевого рассогласования и иных элементов системы управления (принятия решения) могут быть формализованы линейными и нелинейными зависимостями и уравнениями, в том числе логического характера.

Например, при описании системы организационного управления в целях прогнозирования ее эффективности можно считать, что она построена по принципу следящей, где в качестве задающего (отслеживаемого) воздействия выступает желаемый закон изменения прибыли. В качестве выходной переменной — закон изменения реальной прибыли, полученной как результат функционирования СОУ. Управление формируется в соответствии с измеренным рассогласованием — разностью между прибылью желаемой и полученной.

Основными функционально-необходимыми элементами системы организационного управления являются стратегический маркетинг (стратегическое планирование в сфере производства или услуг), менеджмент – принятие управленческих решений, координация их выполнения и контроль полученных результатов с последующей коррекцией действий, собственно производство товаров или услуг, включая технологии, рыночный маркетинг как средство влияния на рынок.

Таким образом, система организационного управления поддается классическому описанию, принятому в теории управления. Объектом управления является рынок, выполняющий преобразование товар — деньги — прибыль. Исполнительная подсистема — программа маркетинга как средство влияния на рыночные отношения. Управляющая подсистема — программа менеджмента. Производство (материальное или услуг) исполняет роль преобразователя деньги — товар (услуги). "Энергетическим" носителем выступает программа финансирования, согласующая динамику желаемого закона изменения прибыли, измеренное (по прибыли) рассогласование с динамикой организационной системы в целом (рынка, программ менеджмента, производства и маркетинга).

Основным предметом исследования при заданных свойствах функционально-необходимых элементов системы выступает желаемый закон ресурсного управления, определяющий структуру желаемого управляющей подсистемы, обеспечивающей отслеживание желаемой прибыли с желаемой точностью (рассогласованием). "Ошибка" слежения (целевое рассогласование) определяет критерий качества функционирования системы организационного управления.

Структурным принципиальным отличием от чисто технических систем управления является наличие в организационных системах человеческого фактора (интеллекта) в планировании и реализации функций управления и измерения (а не только контроля, что в большей степени присуще техническим системам управления). Планирование, управление и измерение здесь требуют экспертных оценок, связанных с решением задачи выбора.

Построим динамическую математическую модель системы организационного управления. Для этого вначале сформулируем требования к ней.

Прежде всего математическая модель должна отражать динамику преобразования измеренного векторного или скалярного целевого рассогласования по множеству или отдельному экономическому показателю в реализуемый экономический показатель, т.е. в выходную переменную системы  $y(t)$ . Следовательно, прежде чем построить математическую модель системы в целом, необходимо определить математические модели каждого из функционально-необходимых элементов функциональной схемы системы. При описании преобразований, осуществляемых каждым элементом прямой цепи системы в непрерывном времени, учет динамики (учет конечного времени, затрачиваемого на выполнение производственных технологий, программ менеджмента и маркетинга, транспортные операции, реализацию продукта на рынке, работу бухгалтерских и финансовых служб и т.д.) может быть осуществлен в классе математических моделей в виде систем дифференциальных уравнений, решаемых при заданных начальных условиях. По структуре они могут быть линейными или нелинейными в зависимости от вида преобразований.

Таким образом, в непрерывном времени динамика организационно-ресурсной системы может быть формализована на решении систем дифференциальных уравнений, достигаемых их интегрированием.

При наиболее адекватной работе организационной системы и описании преобразований в дискретном времени каждый из функционально-необходимых элементов и система в целом могут быть формализованы в классе разностных уравнений с учетом заданных начальных условий. Динамика процессов, соответствующих каждому функционально-необходимому элементу системы, в этом случае формализуется в классе дискретных процессов. Существенным отличием от непрерывной формализации является возможность описания динамики рекуррентным (алгебраическим) способом путем решения разностных уравнений, не требующим интегрирования. Кроме того, следует отметить то, что формализация в классе разностных уравнений органично сочетается с возможностью цифрового моделирования организационно-ресурсной системы без дополнительных преобразований математической модели.

Разностные уравнения, равно как и дифференциальные, допускают операторную форму представления. Это дает возможность поставить в соответствие функциональной схеме наглядную математическую модель организационно-ресурсной системы в виде структурной схемы. На структурной схеме организационной системы каждому элементу функциональной схемы соответствует линейный или, в общем случае, нелинейный оператор. Сделаем важное допущение, позволяющее существенно упростить наглядное представление инерционных нелинейных преобразований (операторов). Будем полагать, что нелинейный характер преобразования по связи между входом и выходом нелинейного элемента ассоциируется с так называемым статическим режимом, по времени наступающим после переходного режима (режима окончания переходных процессов в элементе, вызываемых реакцией на ненулевые начальные условия). Тогда условно структуру нелинейного элемента можно разделить на безинерционную нелинейную и инерционную линейную части. Безинерционную нелинейную часть в дальнейшем будем называть нелинейным звеном, графически отображаемым в виде статической характеристики, по форме соответствующей нелинейности преобразования входного воздействия на звено в выходную переменную. Вторая часть структуры нелинейного элемента связана с его динамикой (инерционными свойствами) и допускает при бинарной интерпретации линейное операторное представление [2].

Если обозначить за  $f$  статическую характеристику измерителя рассогласования, за  $\varphi$  — статические характеристики остальных функционально-необходимых элементов, за  $K(z)$  — инерционные линейные операторы, то функциональной схеме модели организационной системы соответствует нелинейная структурная схема общего вида в форме следящей системы с единичной обратной связью (см. рис. 1). Структурная модель помимо наглядной нагрузки выполняет все функции математической модели экономики предприятия, учитывающей динамический характер протекающих в системе процессов.

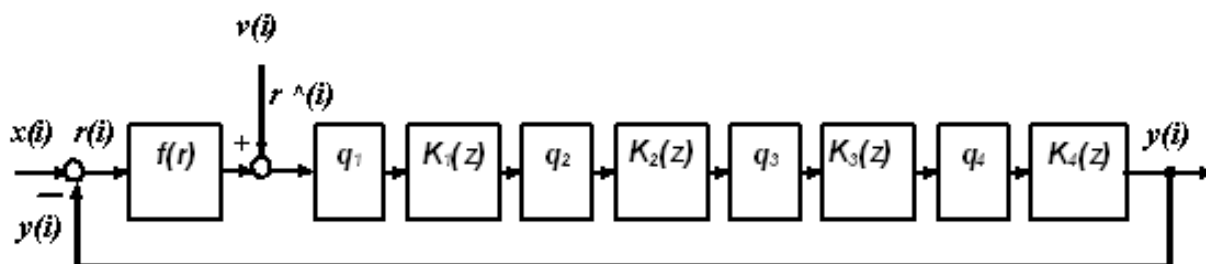


Рис. 1. Структурная схема модели системы организационного управления

Конкретизируем структурную схему с учетом особенностей формирования экономических показателей. В первую очередь выявим особенности нелинейных преобразований. В начале определим вид статической характеристики измерителя рассогласования. При этом будем иметь в виду, что входным воздействием на измеритель целевого-экономического рассогласования является истинное значение рассогласования  $r=x-y$ , которое по знаку в каждый момент времени  $t$  может быть как положительной, так и отрицательной величиной. В содержательном отношении  $r>0$  означает, что реализуемое значение экономического показателя  $y$  по величине меньше желаемого значения  $x$ . Обратное неравенство  $r<0$  означает, что реализуемое значение экономического показателя по величине больше желаемого значения. Как правило, при сбалан-

сированной системе экономических показателей существуют вполне определенные ограничения на величину рассогласования  $r$ , после достижения которых можно считать, что организационная система находится в стадии (на границе) разбалансировки. Обозначим величину этого ограничения с учетом знака  $\pm\Delta$ .

Таким образом, если величина рассогласования превышает величину ограничения  $|r| > \Delta$ , то можно считать, что организационная система перестала справляться со своим целевым назначением. Так, например, если под  $x$  понимать желаемую прибыль, соотнесенную с возможными инвестициями в производство товаров или услуг, то ограничение  $r = \Delta$  означает, что реальная прибыль  $y$  до предела возможного меньше желаемой  $x$ . Это индицирует необходимость увеличения инвестиций для снятия кризисной по прибыли ситуации и обеспечения неравенства  $r < \Delta$ . Если рассогласование по прибыли отрицательно и достигло своего ограничения —  $r = -\Delta$ , т.е. реальная прибыль  $y$  на величину ограничения превышает желаемую  $x$ , то это может индицировать излишнее инвестирование в производство данного вида продукта. Таким образом, в данном примере достижение рассогласованием  $r$  граничных значений  $\pm\Delta$  может означать определенный дисбаланс в инвестиционной программе предприятия. В этом смысле учет ограничений по рассогласованию наделяет математическую модель организационной системы избирательной (селективной) способностью по отслеживаемому показателю. Это подчеркивает еще одно из достоинств способа формализации динамики организационной системы в классе систем с обратной связью.

Нелинейная статическая характеристика измерителя рассогласования, отражающая селективные свойства организационной системы и ее модели, в классе статических характеристик измерителей получила название дискриминационной (разделительной) характеристики, при кусочно-линейной аппроксимации (рис. 2).

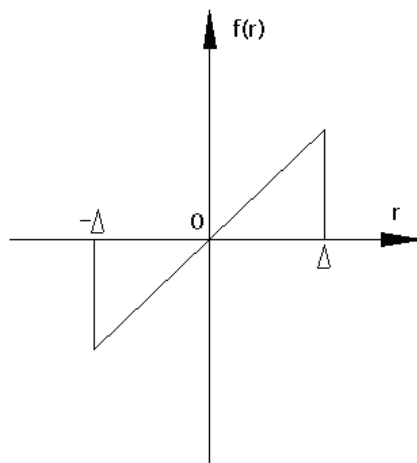


Рис. 2. Дискриминационная характеристика

Таким образом, в дальнейшем под  $f(r)$  будем понимать нелинейное звено дискриминационного типа.

Рассмотрим возможный вид нелинейностей остальных функционально-необходимых элементов организационной системы. Так как роль "энергетической" функции в организационной системе выполняют финансы (инвестиции), то с учетом ограничений на инвестиционные программы производства продукта, менеджмента и маркетинга нелинейные преобразования (статические характеристики), им соответствующие, удобно аппроксимировать нелинейными звеньями "ограничение". При графическом представлении нелинейного звена "ограничение" учтем, что каждый элемент функциональной схемы преобразует входное воздействие, связанное с разнознаковым рассогласованием. Поэтому без потери общности можно считать статические характеристики симметричными и рассматривать симметричные ограничения. Статическая характеристика "ограничение" показана на рис. 3.

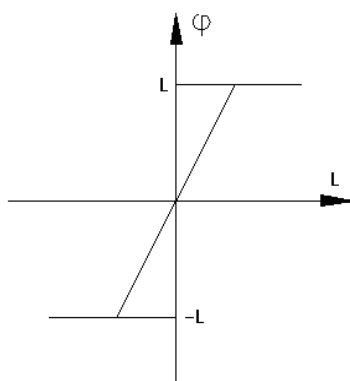


Рис. 3. Статическая характеристика "ограничения"

Очевидно, что уровень ограничений  $L$  для каждого функционально-необходимого элемента определяется ему присущими факторами и в общем различен. С учетом введенных статических характеристик функционально-необходимых элементов структурная схема модели организационной системы конкретизируется в виде Рис. 4.

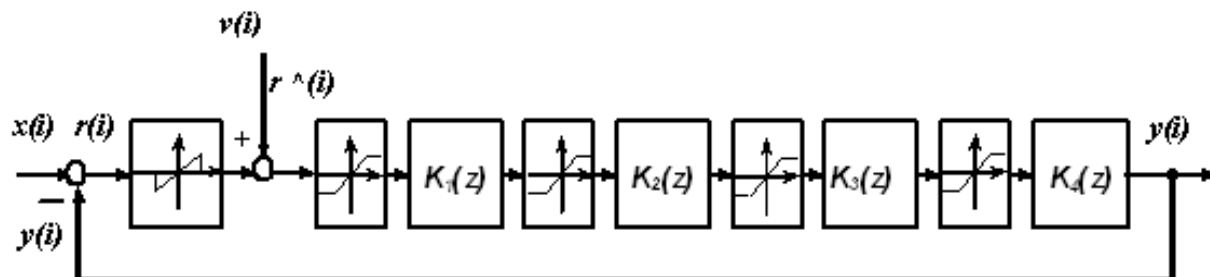


Рис. 4. Нелинейная структурная схема модели системы организационного управления

Таким образом, из вышерассмотренной интерпретации структурной схемы модели следует, что организационная система может быть формализована в классе нелинейных дискретных следящих систем. По структурной схеме модели могут быть рассмотрены возможные режимы работы системы, позволяющие сформулировать адекватные задачи анализа и оптимизации.

Анализ статических характеристик нелинейных звеньев системы показывает, что они имеют явно выраженный линейный участок. Причем при достаточно малых рассогласованиях, соответствующих номинальному (нормальному — бескризисному) режиму работы системы, входные воздействия на нелинейные звенья находятся на линейных участках статических характеристик.

Таким образом, при достаточно малых рассогласованиях математическая модель организационной системы линейризуется. Назовем линейризованный номинальный режим работы системы следящим режимом. Для него характерны малые рассогласования в динамике формирования выходных показателей системы по отношению к входным — желаемым. Очевидно, что в процессе работы предприятия организацией правильных управленческих мероприятий, включающих инвестиционную политику, необходимо обеспечить надежное удержание следящего режима. Истинное значение величины рассогласования  $r$ , рассчитываемое аналитически или машинным способом на цифровой модели, а также его измеренное значение  $\hat{r}$ , поддающееся непосредственной оценке по методикам бухгалтерского учета и анализа, являются индикаторами режима работы предприятия, в том числе и номинального — следящего режима. Таким образом, и с точки зрения режимов работы системы истинное рассогласование  $r$  и его измеренное значение  $\hat{r}$  являются непосредственными характеристиками качества — эффективности работы.

Так как основным режимом работы организационной системы является номинальный (нормальный) — линейризованный режим слежения, то рассмотрим возможные подходы к конкретизации линейризованной структурной схемы системы. При этом учтем, что дискретизация процессов в системе осуществляется с периодом измерения величины целевого (экономического) рассогласования  $T_{\Pi}$ . Временной интервал  $T_{\Pi}$  отводится на бухгалтерские расчеты по оценке целевого рассогласования. Очевидно, что по времени они занимают значительно меньшее количество, чем реализация программ производства, маркетинга, менеджмента и продукта на рынке. Поэтому инерционностью в оценке целевого рассогласования (инерционностью измерителя экономического рассогласования) можно пренебречь в сравнении с инерционностью (динамикой) остальных элементов функциональной и структурной схем организационной системы. В этой связи оператором измерителя целевого (экономического) рассогласования можно считать крутизну линейного участка его статической (дискриминационной) характеристики. Графически она определяется как тангенс угла наклона линейного участка дискриминационной характеристики. Обозначим эту величину за  $K_r$  и назовем коэффициентом преобразования измерителя рассогласования. Линейные операторы программ производства продукта, менеджмента, маркетинга и рынка объединим оператором исполнительной части системы  $K_{py}(z)$ .

Обратим внимание на важнейшую особенность дискретной формализации работы организационно-ресурсной системы. В процессном отношении адекватным является формирование управленческих воздействий в системе по ранее измеренному целевому рассогласованию. Отсюда следует органичное этому эффекту дискретное описание организационной системы в режиме экстраполяции (в режиме запаздывания в выработке управляющих воздействий на исполнительную часть системы) на один или несколько периодов в измерении целевого рассогласования и принятия управленческого решения —  $T_{\Pi}$ . Обозначим оператор запаздывания на один период в формировании управляющего воздействия на исполнительную часть системы за  $(z)^{-1}$ -оператор. Если считать, что запаздыванием на один период синхронизируются процессы управления в системе, то структурная схема модели организационно-ресурсной системы в номинальном режиме работы принимает вид, изображенный на рис. 5. На этой схеме все возмущения, действующие на различные элементы системы, сведены в одно эквивалентное, показанное на выходе чувствительного к качеству управления элемента — измерителя целевого рассогласования. Назовем эквивалентное возмущение  $v(i)$  погрешностью (шумом) измерения целевого рассогласования.

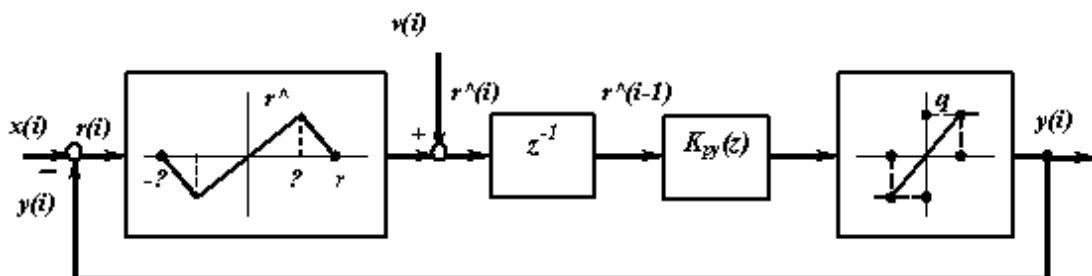


Рис. 5. Обобщенная структурная схема модели организационной системы

Таким образом, управление в организационно-ресурсной системе осуществляется по измеренному на предыдущий дискретный момент времени целевому рассогласованию  $\hat{r}(i-1)$  между желаемым (задающим) значением показателя  $x(i)$  и реализуемым (действительным) его значением  $y(i)$ . В результате выполнения функции контроля по выбранному закону управления  $K_{py}(z)$  собственно через рынок формируется реализуемый показатель  $y(i)$  как выходная переменная организационно-ресурсной системы. Формирование действительного экономического показателя осуществляется в условиях возмущений  $v(i)$ , учитывающих различные мешающие факторы.

Для решения основных задач анализа качества работы организационно-ресурсной системы с учетом динамики целевой функции с использованием математической модели в виде структурной схемы (рис. 6.) необходимо рассмотреть возможные способы математического описания (формализации) дискретных процессов управления в организационной системе.

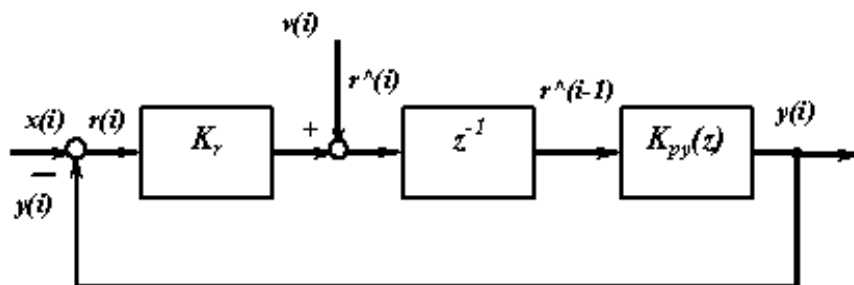


Рис.6. Структурная схема как математическая модель СОУ

Управление в системе организационного управления необходимо рассматривать как управление всеми видами ресурсов (как ресурсное управление). Ресурсное управление осуществляется по принципу отрицательной обратной связи по информации об измеренном целевом рассогласовании между целевой функцией (желаемым состоянием) и реальным состоянием организационной системы. Основными информационными модулями, обеспечивающими адаптацию управленческих решений к изменяющимся условиям разнообразных сред, являются программы динамического прогнозирования и контроля.

#### Классификация типовых законов ресурсного управления (ТЗРУ)

| Тип ЗРУ                                                                                                                | ПФ — оператор ТЗРУ                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Пропорционально измеренному целевому рассогласованию<br>(управление СОУ с учетом положения – значения целевой функции) | $\frac{K_{py} [1 + \tau_2 (1 - z^{-1})]}{1 + \tau_1 (1 - z^{-1})}$                  |
| С интегрированным целевым рассогласованием<br>(управление СОУ с учетом скорости изменения целевой функции)             | $\frac{K_{py} [1 + \tau_2 (1 - z^{-1})]}{(1 - z^{-1}) [1 + \tau_1 (1 - z^{-1})]}$   |
| С дважды интегрированным целевым рассогласованием<br>(управление СОУ с учетом ускорения изменения целевой функции)     | $\frac{K_{py} [1 + \tau_2 (1 - z^{-1})]}{(1 - z^{-1})^2 [1 + \tau_1 (1 - z^{-1})]}$ |

#### Математическая модель системы организационного управления с информационно-усеченным типовым законом ресурсного управления 2

Покажем уравнения для математической модели СОУ с информационно-усеченным ТЗРУ 2 [3]:

уравнение алгоритма функционирования модели СОУ

$$y(i) = y(i-1) + K_{py} \hat{r}(i-1); \quad (1)$$

уравнение эффективности функционирования СОУ

$$r(i) = (1 - K)r(i-1) + x(i) - x(i-1) - K_{py} v(i-1), \quad K = K_r K_{py}, \quad (2)$$

условия устойчивости СОУ

$$0 < K < 2; \quad (3)$$

уравнение для переходной характеристики

$h_{yx}(i)$  — реакция модели  $y(i)$  на единичный перепад — единичную функцию  $x(i)=1(i)$  ( $1(i)=1$  при  $i=0,1,2,3,\dots$ ) при нулевых начальных условиях  $y(0)=h_{yx}(0)=0$  определяется разностным уравнением

$$h_{yx}(i) + (K - 1)h_{yx}(i - 1) = K1(i - 1), \quad (4)$$

целевая эффективность (целевое рассогласование) установившегося режима работы СОУ для линейно-нарастающей целевой функции

$$r_x(i) = D_1 V T_{II} = \frac{V}{K} T_{II} = \text{const}. \quad (5)$$

### Заключение

Таким образом, представленные структурная и математическая модели СОУ в форме разностных уравнений при конкретизации типовых законов ресурсного управления позволяют в аналитической и численной формах решить основные задачи управления:

оценить параметрические условия устойчивости математических моделей;

оценить эффективность управления в переходном режиме работы предприятия с дифференциацией случаев динамически согласованного и перераспределенного режимов управления (монотонная и колебательная переходные характеристики соответственно);

оценить эффективность управления в установившемся режиме работы предприятия (после выхода на запланированные производственные мощности и стабильную рыночную деятельность) с учетом динамик целевых функций, законов ресурсного управления, угроз внешних сред — рисков возмущений;

оптимизировать интенсивность ресурсного управления при выбранных структурах законов;

согласовать выбираемые ситуационно-условные типовые законы ресурсного управления с динамикой целевых функций для случаев существенно-ограниченных ресурсов предприятия (ТЗРУ 1 — постоянная целевая функция), ограниченных ресурсов (ТЗРУ 2 — линейная по динамике целевая функция), условно-ограниченных ресурсов (ТЗРУ 3 — квадратическая по динамике целевая функция).

## SINGLE-CIRCUIT MATHEMATICAL MODEL OF SYSTEMS ADMINISTRATION

S.V. SOLOVYEVA

### Abstract

It is considered decision of the actual problem of the building of the mathematical resource model of organizational management system in class single-circuit dynamic discrete watching systems to achieve the quantitative estimation to efficiency on base of the methods of the dynamic analysis and parametric optimization.

The decision of the delivered problem is realized in accordance with algorithm: term wise and generalized functional phenomenological model — term wise and generalized structured schemes as mathematical interpreting the functional schemes — the differential equations for factors of efficiency — an estimations to efficiency.

### Литература

1. Кузнецов А.П., Соловьева С.В.// Докл. БГУИР. 2005. № 1. С. 119–124.
2. Ганэ В.А., Мацкевич А.Н. Аналитические методы анализа качества линейных непрерывных и дискретных следящих систем. Мн., 2000.
3. Ганэ В.А., Соловьева С.В. Основы теории управления: теория систем и системного анализа. Мн., 2004.