

УДК 621.37

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЙНИЯ  
ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ В РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ**

В.П. СОЛДАТЕНКОВ, О.А. ЮРЦЕВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 7 июня 2007*

Анализируются характеристики рассеяния прямоугольной проводящей пластины в резонансной области. Используется метод конечных разностей во временной области. Для него выбирается простая и эффективная реализация. Рассматривается диаграмма рассеяния и эффективная площадь рассеяния. Для сравнения эти же характеристики рассеяния анализируются методом интегральных уравнений. Используется интегральное уравнение Поклингтона в тонкопроволочном приближении. При этом пластина заменяется системой тонких проводников, параллельных вектору электрического поля падающей плоской электромагнитной волны. Анализ обоими методами проводится при облучении пластины монохроматической волной с заданным направлением распространения. Как частный случай, рассматривается задача рассеяния плоской электромагнитной волны проводником определенной длины. Результаты численного моделирования сравниваются с имеющимися в литературе данными. Исследуется влияние толщины и размеров пластины на диаграмму рассеяния.

*Ключевые слова:* метод конечных разностей во временной области, метод интегральных уравнений, эффективная площадь рассеяния, диаграмма рассеяния.

**Введение**

Одним из наиболее простых и универсальных средств решения различных электродинамических (ЭД) проблем является метод конечных разностей во временной области (КРВО). Он впервые был предложен американским ученым Йе в 1966 г. [1]. На протяжении многих лет применение метода сдерживалось требованиями значительных вычислительных ресурсов. Особенно данное обстоятельство свойственно рассмотрению объектов, имеющих большие волновые размеры. Ввиду бурного развития компьютерной техники, открываются все большие возможности использования метода КРВО.

Развитие теории КРВО и рост числа посвященных ей публикаций приводят к неоднозначности в построении вычислительного алгоритма. Для многих его составляющих возникают альтернативные варианты. Часто они сложны для реализации и требуют повышенных затрат оперативной памяти и процессорного времени. В то же время имеется возможность на основе сравнительно экономных подходов решать широкий круг ЭД задач. В статье используется одна из компактных и эффективных реализаций метода КРВО. Вычислительный алгоритм тестируется с помощью известных данных. Кроме того, проверка метода КРВО осуществляется на основе сравнения с результатами, полученными методом интегральных уравнений (ИУ). Исследуется влияние геометрических параметров металлической пластины на ее характеристики рассеяния. Найденные зависимости соответствуют резонансному диапазону длин волн. Следует отметить тот факт, что анализ характеристик рассеяния оказывается возможным даже тогда,

когда геометрия рассматриваемого объекта описывается по одной или двум координатам всего одним пространственным сегментом.

### Основные составляющие вычислительного алгоритма

Для формирования вычислительного алгоритма необходимо выбрать способ реализации основных компонент метода КРВО. К ним относятся:

базовый алгоритм (уравнения Максвелла, записанные в форме централизованных конечно-разностных выражений);

входное (задающее) воздействие;

условия граничного поглощения.

В методе КРВО рассеивающий объект помещается в ограниченную пространственную область, состоящую из элементарных частей. Данную область обычно называют областью (сеткой) КРВО, а его части – ячейками КРВО. Составляющие векторов электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{H}$ ) полей разносятся в пространстве. Любая составляющая вектора  $\vec{E}$  по одной какой-либо координате окружена четырьмя составляющими вектора  $\vec{H}$  по двум другим координатам, и наоборот.

В прямоугольной системе координат система уравнений Максвелла эквивалентна шести скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_a} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right); & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_a} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right); & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_a} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right); \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_a} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho H_x \right); & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_a} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho H_y \right); & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_a} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho H_z \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $\sigma$  и  $\rho$  — удельные электрическая и магнитная проводимости среды. Пусть ячейки области КРВО имеют кубическую форму. Тогда координаты узла сетки КРВО с номером  $(i, j, k)$  равны  $x=i\delta, y=j\delta, z=k\delta$ , где  $\delta$  — пространственный дискрет. Вычисление векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  осуществляется на чередующихся временных полушагах. Для составляющих третьего уравнения системы (1) конечно-разностные представления имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \left( E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2) \right) / \Delta t; & E_z &= \left( E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) + E_z^n(i, j, k+1/2) \right) / 2; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \left( H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2) \right) / \delta; & \sigma &= \sigma(i, j, k+1/2); \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \left( H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k+1/2) \right) / \delta; & \varepsilon_a &= \varepsilon_a(i, j, k+1/2), \end{aligned}$$

где  $n$  — номер временного шага,  $\Delta t$  — временной дискрет. Подставляя данные выражения в третье уравнение системы (1) после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) &= E_z^n(i, j, k+1/2) (2\varepsilon_a - \sigma \Delta t) / (2\varepsilon_a + \sigma \Delta t) + \left( H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - \right. \\ &\left. - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2) + H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) \right) 2\Delta t / (\delta(2\varepsilon_a + \sigma \Delta t)). \end{aligned} \quad (2)$$

Шестое уравнение системы (1) в результате конечно-разностной аппроксимации принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) &= H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) (2\mu_a - \rho \Delta t) / (2\mu_a + \rho \Delta t) + \left( E_x^n(i+1/2, j+1, k) - \right. \\ &\left. - E_x^n(i+1/2, j, k) - E_y^n(i+1, j+1/2, k) + E_y^n(i, j+1/2, k) \right) 2\Delta t / (\delta(2\mu_a + \rho \Delta t)). \end{aligned} \quad (3)$$

Остальные уравнения системы (1) заменяются конечно-разностными выражениями аналогичным образом. Базовый алгоритм выполняется по следующей схеме. На первом временном

полушаге определяются компоненты магнитного поля по формулам типа (3). На втором временном полушаге вычисляются электрические составляющие с помощью выражений вида (2). Далее происходит чередование временных полушагов.

Для реализации падающего монохроматического поля применяется концепция источников Гюйгенса [2]. Эти источники представляют собой эквивалентные поверхностные электрический и магнитный токи, формируемые соответственно на внешней и внутренней поверхностях. Данные поверхности отстоят друг от друга наполовину пространственного дискрета. Области, заключенные внутри них, имеют в общем случае форму прямоугольного параллелепипеда. Вычисление источников Гюйгенса производится по формулам  $\vec{J}_{\text{эКВ}} = \vec{n} \times \vec{H}^{\text{inc}}$  и  $\vec{M}_{\text{эКВ}} = \vec{E}^{\text{inc}} \times \vec{n}$ . Здесь  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по внутренней нормали к поверхности источников,  $\vec{H}^{\text{inc}}$  и  $\vec{E}^{\text{inc}}$  — магнитная и электрическая составляющие падающего электромагнитного поля (ЭМП).

На левой грани внутреннего параллелепипеда ( $y=y_{\text{left}}$  ( $j=j_{\text{left}}$ )) учет задающего воздействия производится следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i-1/2, j_{\text{left}}, k) &= E_x^{n+1}(i-1/2, j_{\text{left}}, k)_o - J_{\text{эКВ } x}^{n+1/2}(i-1/2, j_{\text{left}}-1/2, k), \quad i \in [i_a+1, i_b], \quad k \in [k_a, k_b] \\ E_z^{n+1}(i, j_{\text{left}}, k-1/2) &= E_z^{n+1}(i, j_{\text{left}}, k-1/2)_o - J_{\text{эКВ } z}^{n+1/2}(i, j_{\text{left}}-1/2, k-1/2), \quad i \in [i_a, i_b], \quad k \in [k_a+1, k_b] \\ J_{\text{эКВ } x}^{n+1/2}(i-1/2, j_{\text{left}}-1/2, k) &= \left| \vec{n} \times \vec{H}_z^{\text{inc}} \right| = \frac{H_z^{\text{inc}}(t(n+1/2), i-1/2, j_{\text{left}}-1/2, k)}{\delta} \\ J_{\text{эКВ } z}^{n+1/2}(i, j_{\text{left}}-1/2, k-1/2) &= \left| \vec{n} \times \vec{H}_x^{\text{inc}} \right| = \frac{-H_x^{\text{inc}}(t(n+1/2), i, j_{\text{left}}-1/2, k-1/2)}{\delta}, \end{aligned}$$

где  $t(n)$  — время соответствующее  $n$ -му временному шагу, индекс "o" соответствует значению компоненты ЭМП до добавления падающей электромагнитной волны (ЭМВ).

На границе области КРВО приходится заменять для электрического поля базовые конечно-разностные уравнения специальными выражениями — условиями поглощения. Одним из наиболее простых и эффективных способов решения данной проблемы являются условия поглощения Мура второго порядка (ГУ 2 Мура) [3]. Если сетка КРВО ограничена в пространстве плоскостями  $x=0$ ,  $x=\delta n_i$ ,  $y=0$ ,  $y=\delta n_j$ ,  $z=0$ ,  $z=\delta n_k$ , то они имеют вид:

$$\begin{aligned} (c_0^{-1} \partial_{xt}^2 - c_0^{-2} \partial_t^2 + (\partial_y^2 + \partial_z^2)/2) W_1|_{x=0} &= 0, \quad (c_0^{-1} \partial_{xt}^2 + c_0^{-2} \partial_t^2 - (\partial_y^2 + \partial_z^2)/2) W_1|_{x=n\delta} = 0, \\ (c_0^{-1} \partial_{yt}^2 - c_0^{-2} \partial_t^2 + (\partial_x^2 + \partial_z^2)/2) W_2|_{y=0} &= 0, \quad (c_0^{-1} \partial_{yt}^2 + c_0^{-2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_z^2)/2) W_2|_{y=n_j\delta} = 0, \\ (c_0^{-1} \partial_{zt}^2 - c_0^{-2} \partial_t^2 + (\partial_x^2 + \partial_y^2)/2) W_3|_{z=0} &= 0, \quad (c_0^{-1} \partial_{zt}^2 + c_0^{-2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2)/2) W_3|_{z=n_k\delta} = 0, \end{aligned}$$

где  $W_1 \in \{E_y, E_z\}$ ,  $W_2 \in \{E_x, E_z\}$ ,  $W_3 \in \{E_x, E_y\}$ ;  $c_0$  — скорость света в вакууме.

Условия поглощения Мура первого порядка (ГУ 1 Мура) менее точные. Их приходится применять для составляющих электрического поля, удаленных от линий пересечения граничных плоскостей менее чем на величину пространственного сегмента. ГУ 1 Мура могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (\partial_x - c_0^{-1} \partial_t) W_1|_{x=0} &= 0, \quad (\partial_x + c_0^{-1} \partial_t) W_1|_{x=n\delta} = 0, \quad (\partial_y - c_0^{-1} \partial_t) W_2|_{y=0} = 0, \\ (\partial_y + c_0^{-1} \partial_t) W_2|_{y=n_j\delta} &= 0, \quad (\partial_z - c_0^{-1} \partial_t) W_3|_{z=0} = 0, \quad (\partial_z + c_0^{-1} \partial_t) W_3|_{z=n_k\delta} = 0, \end{aligned}$$

где  $W_1, W_2, W_3$  те же, что и в ГУ 2 Мура ([3]).

Для получения ЭМП рассеяния в дальней зоне применим известный подход, реализация которого описана в [4]. В течение периода колебаний ЭМВ на поверхностях интегрирования определяются амплитуды и фазы эквивалентных токов. Интегрируя эти токи, получаем компоненты рассеянного ЭМП в дальней зоне, а затем и эффективную площадь рассеяния (ЭПР).

## Тестирование вычислительного алгоритма

Для проверки работоспособности вычислительного алгоритма рассмотрено рассеяние монохроматической ЭМВ на металлической сфере и на симметричном вибраторе (рис. 1).

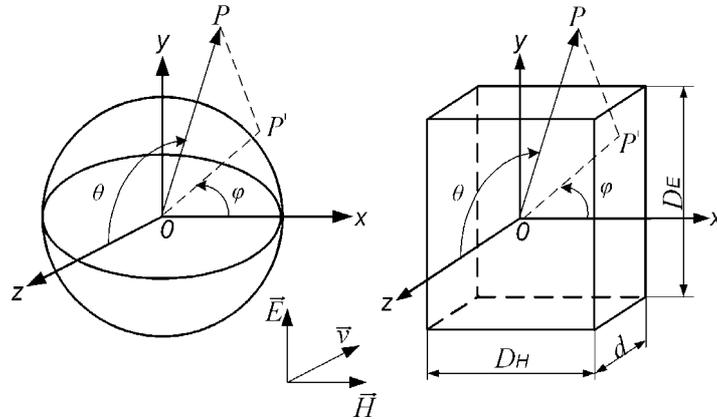


Рис. 1. Рассеяние ЭМВ на металлической сфере и на симметричном вибраторе

Роль вибратора выполняет проводящая пластина, у которой толщина ( $d$ ) и ширина в магнитной плоскости ( $D_H$ ) равны  $1\delta$ . Размер в электрической плоскости ( $D_E$ ) соответствует длине вибратора. Ось  $z$  перпендикулярна плоскости пластины (вибратора).

В первом примере волна падает на объект в направлении  $\theta=180^\circ$ ,  $\varphi=90^\circ$ . Радиус сферы  $a = 5,3/k$ , где  $k$  – волновое число. На рис. 2 показаны результаты расчета нормированной (к  $\pi a^2$ ) ЭПР в электрической плоскости при двух значениях числа сегментов на длину волны ( $N_S$ ). Производится сравнение с известными данными [5]. Даже в случае, когда  $N_S$  равно 20, полученная зависимость по своему характеру соответствует эталонному графику. При  $N_S=40$  наблюдается хорошее соответствие между результатом расчета и точным решением. Для  $140^\circ < \theta \leq 180^\circ$  нормированная ЭПР принимает большие значения и для обоих значений  $N_S$  расчетные зависимости практически не отличаются от известных данных.

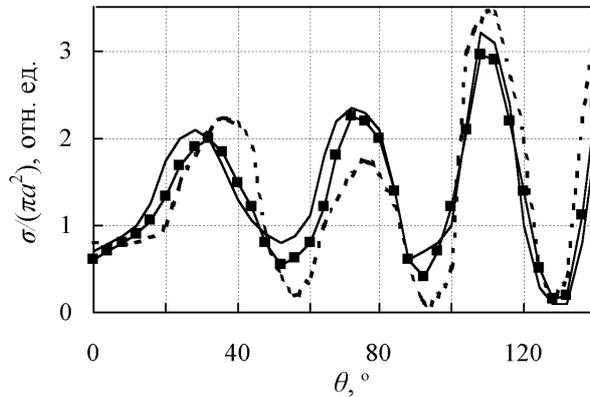


Рис. 2. Нормированная бистатическая ЭПР проводящей сферы в электрической плоскости: — точное решение; --- метод КРВО ( $N_S=20$ ), —■— метод КРВО ( $N_S=40$ )

Во втором примере плоская ЭМВ падает по нормали к симметричному вибратору, диаметр которого составляет  $0,01$  длины волны ( $\lambda$ ). В этом же направлении методом ИУ рассчитана зависимость нормированной к квадрату длины волны ЭПР от волновой длины вибратора (рис. 3).

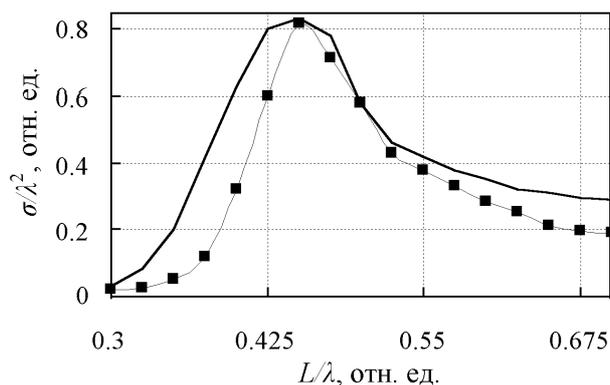


Рис. 3. Нормированная ЭПР в направлении нормали к вибратору в зависимости от его волновой длины: — метод ИУ; —■— экспериментальные данные

На рис. 3 использованы следующие обозначения:  $\sigma$  – ЭПР,  $\lambda$  – длина волны ЭМП,  $L$  – длина вибратора. Для сравнения приведена экспериментальная зависимость из работы [6]. Максимум ЭПР соответствует резонансной длине вибратора, когда его реактивное входное сопротивление в режиме передачи равно нулю. В таком вибраторе направление максимума диаграммы рассеяния (ДР) слабо зависит от направления распространения ЭМВ ( $\theta_i, \varphi_i$ ), изменяется только значение ЭПР, что иллюстрирует рис. 4.

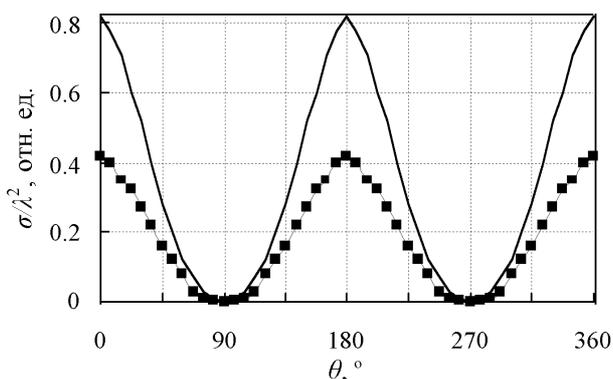


Рис. 4. Нормированная ЭПР вибратора в электрической плоскости при  $L$ , соответствующей первому резонансу  $\varphi_i=90^\circ$ : —  $\theta_i=0^\circ$ ; —■—  $\theta_i=45^\circ$ . Метод ИУ

ЭПР, рассчитанная методом КРВО, несколько ниже, чем при методе ИУ (рис. 5).

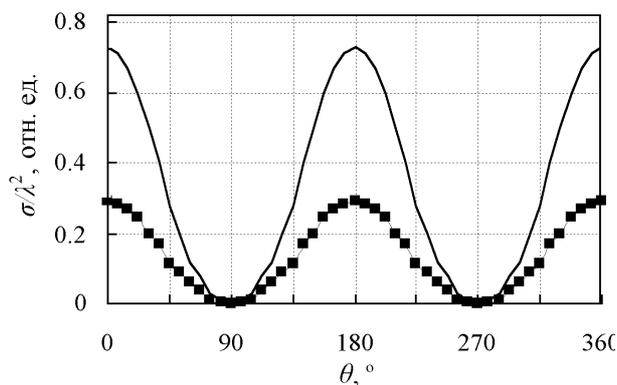


Рис. 5. Нормированная ЭПР вибратора в электрической плоскости при  $L$ , соответствующей первому резонансу  $\varphi_i=90^\circ$ : —  $\theta_i=0^\circ$ ; —■—  $\theta_i=45^\circ$ . Метод КРВО

## Результаты и их обсуждение

Анализ характеристик рассеяния прямоугольной проводящей пластины (рис. 1) выполнен двумя методами — ИУ и КРВО. Вектор скорости ЭМВ  $\vec{v}$  и вектор  $\vec{E}$  находятся в плоскости  $zy$ , т.е.  $\varphi_i=90^\circ$ .

При использовании метода ИУ пластина заменена системой прямолинейных проводников, параллельных вектору электрического поля облучающей ЭМВ. Расстояние между соседними проводниками равно  $0,05 \lambda$ . Диаметр проводников равен толщине пластины. На рис. 6 показана нормированная бистатическая ЭПР в электрической плоскости для пластины, имеющей следующие электрические размеры:  $D_E=0,5 \lambda$ ,  $D_H=0,25 \lambda$ ,  $d=0,01 \lambda$ .

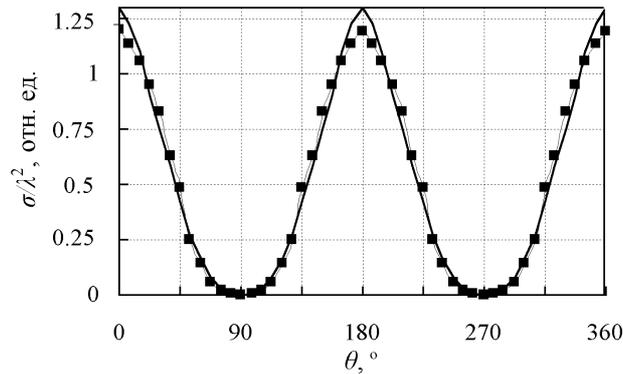


Рис. 6. Нормированная бистатическая ЭПР пластины в электрической плоскости при  $\theta_i=0^\circ$ ,  $\varphi_i=90^\circ$ :  
 — метод ИУ°, —■— метод КРВО°

Следует отметить то, что хорошее соответствие результатов метода КРВО с методом ИУ достигнуто даже при одном пространственном сегменте, описывающем торец пластины.

Для такого же условия методом КРВО (рис. 7) проведен численный анализ зависимости нормированных однопозиционной ЭПР ( $\theta=180^\circ$ ) и ЭПР прямого рассеяния ( $\theta=0^\circ$ ) металлической пластины от ее толщины.

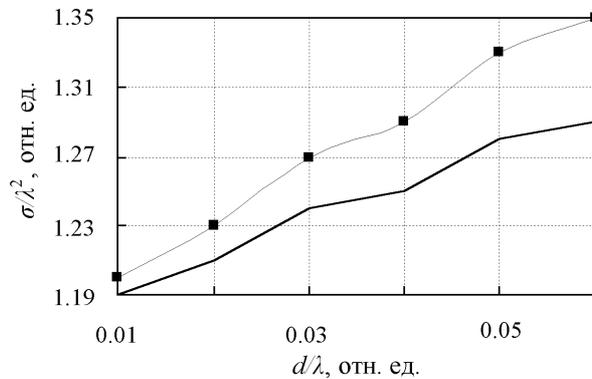


Рис. 7. Зависимость нормированных ЭПР металлической пластины от ее толщины:  
 —  $\theta=180^\circ$  (обратное рассеяние), —■—  $\theta=0^\circ$  (прямое рассеяние)

ЭПР прямого рассеяния во всех случаях немного превышает моностатическую ЭПР. При этом отношение этих ЭПР с ростом толщины пластины линейно возрастает (рис. 8).

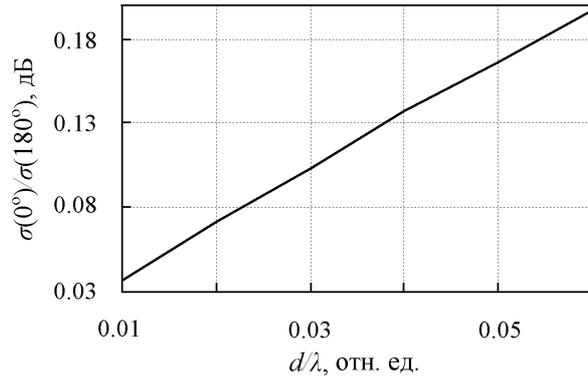


Рис. 8. Отношение ЭПР прямого рассеяния к однопозиционной ЭПР

В следующей задаче ЭМВ падает в направлении  $\theta_i=45^\circ$ ,  $\varphi_i=90^\circ$  на металлическую квадратную пластину. Толщина пластины  $d=0.025\lambda$ , волновые размеры  $D_E=D_H$  изменяются в пределах от  $0,4\lambda$  до  $2\lambda$ . Рассматривается бистатическая ЭПР в электрической плоскости. Во всех случаях имеются два направления максимального рассеяния —  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Установлено, что пространственное положение максимумов рассеянного ЭМП зависит от размеров пластины. Например, при  $D_E=D_H=0,8\lambda$  максимумы ДР (рис. 9) не ориентированы вдоль  $\theta=45^\circ$  (прямое рассеяние) и  $\theta=135^\circ$  (зеркальное отражение).

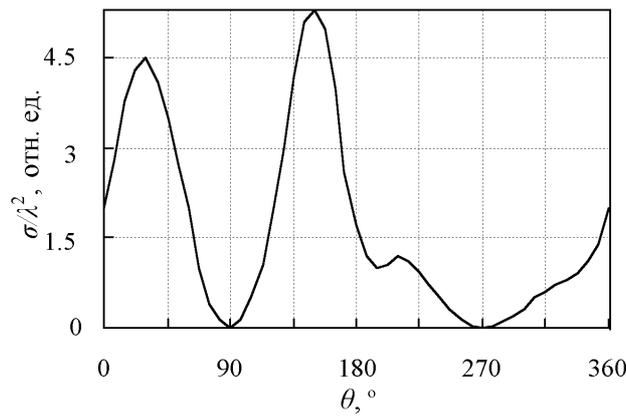


Рис. 9. Рассеяние на проводящей пластине при  $D_E=D_H=0,8\lambda$ ;  $d=0,025\lambda$ ;  $\theta_i=45^\circ$ ;  $\varphi_i=90^\circ$

Когда  $D_E=D_H \geq 2\lambda$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  близки к направлениям распространения и зеркального отражения ЭМВ (рис. 10).

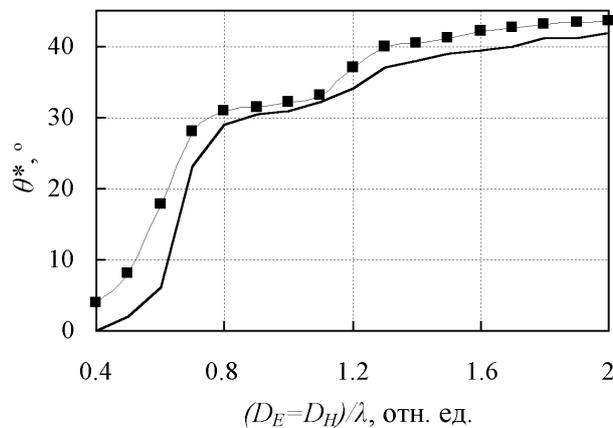


Рис. 10. Зависимость направлений максимумов рассеяния квадратной проводящей пластины от ее волновых размеров: —  $\theta^*=\theta_1$ ; -■-  $\theta^*=180^\circ-\theta_2$

Уменьшение размеров пластины приводит к отклонению максимумов ДР. При  $D_E=D_H=0,4\lambda$   $\theta_1$  и  $\theta_2$  направлены, практически, по нормальям к плоскости пластины.

Когда  $D_E=D_H$  принадлежат промежутку  $[0,6\lambda; 0,7\lambda]$  имеет место особо быстрое изменение характера рассеяния ЭМВ.

## STUDY OF SCATTERING CHARACTERISTICS OF CONDUCTING PLATE FOR RESONANCE FREQUENCY REGION

V.P. SOLDATENKOV, O.A. YURTSEV

### Abstract

Scattering characteristics of perfectly conducting rectangular flat plate are analyzed for frequency region near resonance. The finite-difference time-domain method is proposed as a means of this analysis. We choose simple and efficient components for this method. Scattering diagram and radar cross-section are examined. These scattering characteristics are obtained also by integral equation method for comparison. Thin-wire approach of Pocklington integral equation is used. According to this principle we replace the plate by system of thin wires. These elements are parallel to electric field vector of incident plane electromagnetic wave. Both methods applications are realized when incident monochrome wave has definite directions of propagation. Problem of electromagnetic scattering by conductor of some length is considered as a special case. Results of numerical modelling are compared with well-known data. Influences of thickness and sizes of the plate on scattering diagram are examined.

### Литература

1. Yee K.S. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1966. Vol. AP-14, № 3. P. 302–307.
2. Merewether D.E., Fisher R., Smith F.W. // IEEE Trans. on Nuclear Science. 1980. Vol. NS-27, № 6. P. 1819–1833.
3. Mur G. // IEEE Trans. on electromagnetic compatibility. 1981. Vol. EMC-23, № 4. P. 377–382.
4. Taflove A., Umashankar K. // IEEE Trans. on electromagnetic compatibility. 1983. Vol. EMC-25, № 4. P. 433–440.
5. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М., 1977.
6. Kouyoumjian R.G. The calculation of the echo areas of perfectly conduction objects by variational method. Ph.D. dissertation, Dept.of Elec.Engrg., The Ohio State University, Columbus, December 1953.