УДК 621.316.726.078

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.Л. БУСЬКО, А.А. ЛОБАТЫЙ, Л.В. РУСАК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 июня 2008

На основе теории марковских процессов случайной структуры решается задача обоснования математических моделей для анализа и оптимизации дискретных систем с фазовым управлением.

Ключевые слова: модель, фазовое управление, плотность вероятности, квантование, моделирование.

Введение

Дискретные системы с фазовым управлением (ДСФУ) получили широкое развитие в различных областях автоматики, радиотехнике и связи. Одной из основных проблем стоящих перед разработчиками ДСФУ, является выбор и обоснование математических моделей, позволяющих синтезировать ДСФУ и проводить всесторонний анализ, исследуя их свойства в различных условиях работы.

Если исследователь имеет дело с такими математическими моделями, которые не позволяют заранее вычислить или предсказать результат, то для исследования поведения реальной сложной системы проводится имитационное моделирование — численный метод проведения экспериментов на ЭВМ. Сложность данного подхода состоит в необходимости обеспечения адекватности модели реальному процессу. Иногда необходимо моделировать процессы, происходящие на молекулярном уровне, это требует больших экспериментальных исследований на реальных образцах техники.

Для проведения предварительного проектирования и оптимизации системы, исследования ее характеристик используются так называемые аналитические модели, отражающие основные, наиболее важные свойства системы, позволяющие решать широкий круг задач анализа и синтеза.

Широкое распространение получили аналитические модели ДСФУ вида [1]

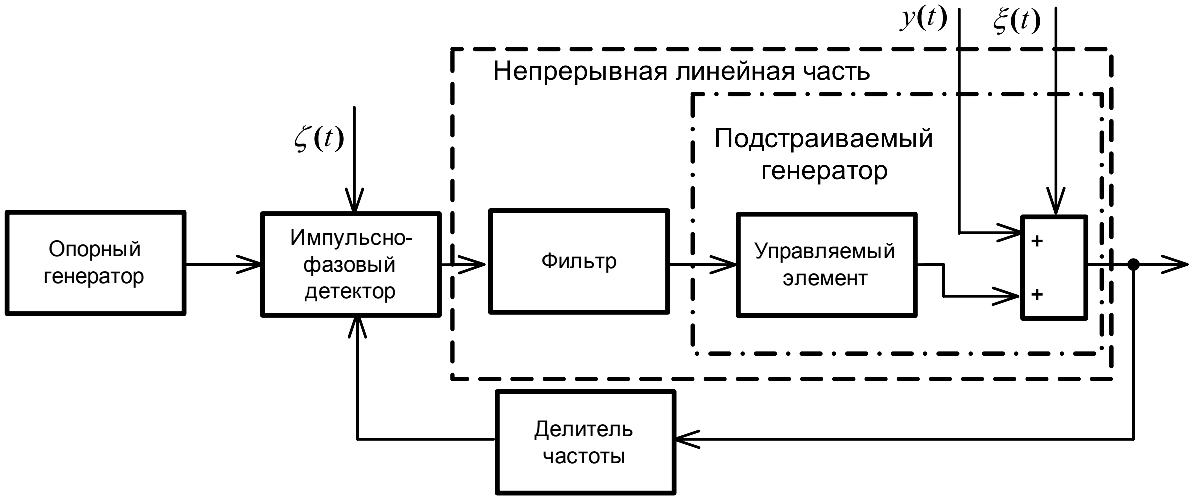
$$X(t) = F(X,t,t_n) + \int_{t_n}^{t} \varphi(X,U,t)dU, \qquad (1)$$

где $X(t)$ — вектор фазовых координат ДСФУ; $F(X,t,t_n)$ — в общем случае нелинейная функция; t_n — момент появления импульса положительной полярности; $\varphi(X,U,t)$ — нелинейная функция, зависящая от управляющего воздействия U, представляющего собой разность (набег) фаз в интервале $t \in [nT+\tau_n, (n+k)T]$, где T — период дискретизации.

Применение модели (1) в виде интегральных уравнений для решения многих задач связано с трудностями, обусловленными необходимостью вычисления переходной матрицы состояния непрерывной части системы. Кроме того, интегральные уравнения не в полной мере отражают динамику процессов, происходящих в ДСФУ. Исходя из этого, представляет практический интерес моделирование ДСФУ с помощью динамической аналитической модели, построенной на основе дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Рассмотрим общий принцип функционирования ДСФУ, структурная схема которой представлена на рисунке.



Обобщенная структурная схема ДСФУ: $\xi(t)$ — случайные возмущения (шумы) присутствующие в регулируемом сигнале $y(t)$; $\zeta(t)$ — помеха случайного характера, типа флуктуационного шума, обусловленная шумами элементов электронных устройств и приведенная ко входу импульсного фазового детектора (ИФД)

Отличия конкретных ДСФУ обычно заключаются в выборе сравнивающего устройства, в объекте управления и области применения.

Как следует из структурной схемы, на выходе системы — квантованный по уровню сигнал. На входе ИФД с опорного генератора и делителя частоты поступают последовательности импульсов, разность фаз которых представляет собой управляющий сигнал, действующий на непрерывную линейную часть (НЛЧ). Пренебрегая длительностью этих импульсов, поведение компонент вектора фазовых координат $X=[x_1,\dots,x_n]^T$ ДСФУ можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i(t)=a_i(X,t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(X,t)\nu_j(X,t)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(t)\xi_j(t)\,,\ (i=\overline{1,n})\,, \qquad (2)$$

$a_i, b_{ij}, \varphi_{ij}$ — в общем случае нелинейные функции; $\xi_j(t)$ — случайные функции времени (шумы); $\nu_j(X,t)$ — последовательность δ-функций, моменты времени появления которых t_{ik} зависят от X.

$$\nu_j(X,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{jk}\delta(t-t_{jk}). \qquad (3)$$

$\delta(t-t_{jk})$ — δ-функции с амплитудами c_{jk}, возникающие в моменты времени t_{jk}.

В векторно-матричной форме стохастическое уравнение, описывающее динамику процессов, происходящих в ДСФУ, имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(X,t) - B(X,t)\nu(X,t,T) + F\xi(t), \tag{4}$$

$A(X,t)$ — векторная функция, отображающая наличие непрерывной составляющей процесса $X(t)$; $B(X,t)$ — матричная функция, отображающая дискретную составляющую с амплитудной модуляцией; $\nu(X,t,T)$ — вектор дискретных воздействий, отображающий дискретную составляющую с частотной модуляцией; T — период следования импульсов опорного генератора (период дискретизации).

В частном случае, если $B(X,t)=0$ и $\xi(t)$ — вектор белых шумов, процесс $X(t)$ будет непрерывным марковским.

Из (4) следует, что уравнение ДСФУ с амплитудной модуляцией (АИМ) имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(X,t) + B(X,t)\nu(t,T) + F\xi(t). \tag{5}$$

Соответственно ДСФУ с фазовой модуляцией (ФИМ) описываются уравнением вида

$$\dot{X}(t) = A(X,t) + B\nu(X,t,T) + F\xi(t). \tag{6}$$

Заметим, что для описания ДСФУ с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) в уравнениях (2), (4) необходимо учесть последовательность как положительных, так и отрицательных δ-функций, отстоящих друг от друга на ширину модулируемого импульса.

Статистические характеристики ДСФУ

Наиболее полной характеристикой процесса $X(t)$ является плотность распределения вероятности (ПРВ) $f(X,t)$. Если в уравнении (4) $B(X,t)=0$, то $f(X,t)$ при отсутствии поглощающих границ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмагорова вида

$$\dot{f}(X,t) = -\nabla_x^T \pi(X,t). \tag{7}$$

Здесь $\nabla_x^T = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T$ — векторный оператор дифференцирования; $\pi(X,t)$ — вектор плотности потока вероятности с составляющими

$$\pi_i(X,t) = a_i(X,t)f(X,t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varphi_{ip}\varphi_{jp}g_{pq} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{8}$$

$a_i(X,t)$ — составляющие вектора $A(X,t)$; $\varphi_{ij}(t)$ — элементы матрицы F; $g_{pq}(t)$ — элементы матрицы $G(t)$ — интенсивности шумов $\xi(t)$.

Если в уравнении (4) $B(X,t) \neq 0$, то при условии рассмотрения стохастических интегралов в симметризованной форме Стратоновича это означает, что каждый δ-импульс в момент t_{jk} вызывает скачкообразные изменения амплитуды $x_i(t)$ на величину c_{jk}.

Таким образом, компоненты векторно-матричного уравнения (4) описывают кусочно-непрерывные марковские процессы со скачком в моменты времени t_{jk}. Для таких процессов в [2] получено уравнение для ПРВ, которое как при амплитудной, так и при частотной модуляции имеет вид

$$\dot{f}(X,t) = -\nabla_x^T \pi(X,t) - \nu(X,t)f(X,t) + \sum_{j=1}^{n}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right| f(h_j(X,t)), \tag{9}$$

где $\nu(X,t)=\sum_{j=1}^{n}\nu_j(X,t)$ — суммарная интенсивность (частота) квантования; ν_j — интенсивность квантования в потоках входных дискретных воздействий; $h_j(X,t)=X(t)-b_j(X,t)$, где $b_j(X,t)=\left[b_{1j}(X,t),b_{2j}(X,t),\ldots,b_{nj}(X,t)\right]^T$ — совокупность векторных функций, столбец с индексом j матрицы $B(t)$ $(j=\overline{1,n})$. Таким образом, матричная функция $B(X,t)$ с элементами $b_{ij}(X,t)$ $(i,j=\overline{1,n})$ разбита на совокупность векторных функций $b_j(X,t)$. $\left|\dfrac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|$ — якобиан функции $h_j(X,t)$.

Если имеет место только амплитудная модуляция, то входящие в уравнение (9) функции ν не зависят от X, т.е. $\nu(X)=\nu$. Для систем с частотной модуляцией третье слагаемое в правой части уравнения (9) имеет вид $\sum_{j=1}^{n}\nu_j(X+b_j)f(X+b_j)$.

Уравнения для вероятностных моментов первого и второго порядков определяются из уравнения (9). Умножив обе части (9) на x_i и проинтегрировав их по всем составляющим вектора X в бесконечных пределах, получим дифференциальное уравнение для математического ожидания i-й фазовой координаты ДСФУ:

$$\dot{m}_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(X,t)dX-\nu(X,t)m_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|f(h_j(X,t))dX \tag{10}$$

Здесь учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_i\dot{f}(X,t)dX=\dot{m}_i(t), \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_i\nabla_x^T\pi(X,t)dX=-\int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(X,t)dX. \tag{12}$$

Уравнения для корреляционных моментов фазовых координат ДСФУ получаются умножением обеих частей (9) на произведение $(x_i-m_i)(x_r-m_r)$ и интегрированием в бесконечных пределах:

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_{ir}(t)=&\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)\pi_i(X,t)dX-\int_{-\infty}^{\infty}(x_r-m_r)\pi_i(X,t)dX-\nu(X,t)\Theta_{ir}(t)+\\&+\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\nu_j(x_i-m_i)(x_r-m_r)\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|f(h_j(X,t))dX.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)(x_r-m_r)\dot{f}(X,t)dX=\dot{\Theta}_{ir}(t), \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)(x_r-m_r)\nabla_x^T\pi(X,t)dX=-\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)\pi_r(X,t)dX-\int_{-\infty}^{\infty}(x_r-m_r)\pi_i(X,t)dX. \tag{15}$$

Решая дифференциальные уравнения (10) и (13) с заданными начальными условиями, можно определить математические ожидания и корреляционные моменты ДСФУ.

Так как для вычисления входящих в (10) и (13) интегралов необходимо знать функцию ПРВ $f(X,t)$, то приходится применять ее аппроксимацию. В большинстве практических задач лучше всего подходит гауссова двухмоментная аппроксимация $f(X,t)$. В некоторых случаях для вычисления интегралов приходится раскладывать $f(X,t)$ в функциональный ортонормированный ряд по центральным моментам высших порядков или по кумулянтам (семиинвариантам) случайного процесса на основе полиномов, которые соответствуют некоторой производящей функции [3]. Если производится разложение ПРВ по центральным моментам на основе нормального распределения, то получается ряд Грама–Шарлье, состоящий из членов, убывающих неравномерно. Быстро сходящимся рядом является ряд Эджворта, представляющий собой разложение ПРВ по семиинвариантам.

Оптимизация ДСФУ

Оптимизация системы заключается в определении таких ее характеристик (параметров), при которых заданный критерий принимает экстремальное значение (минимум или максимум).

ДСФУ в большинстве случаев выполняет роль следящей системы. Для таких систем наиболее распространенным критерием является минимум среднего квадрата ошибки:

$$M[(X - X_T)^2] \to \min, \tag{16}$$

X — выходной сигнал системы; X_T — требуемый выходной сигнал; M — символ математического ожидания.

Для системы, изображенной на рисунке, задача состоит в оптимизации параметров непрерывной линейной части ДСФУ. Если в качестве динамической характеристики оптимальной НЛЧ рассматривается весовая функция $g_0(t,\tau)$, то задача сводится к решению интегрального уравнения Винера–Хопфа [3]

$$\int_0^{t_k} g_0(t,\tau) R_Y(\tau,\lambda)\, d\tau = R_{X_T Y}(t,\lambda). \tag{17}$$

$R_Y(\tau,\lambda) = M[Y(\tau)Y(\lambda)]$ — корреляционная функция входного сигнала Y, которым в данном случае является выходной сигнал ИФД; $R_{X_T Y}(t,\lambda) = M[X_T(t)Y(\lambda)]$ — взаимная корреляционная функция требуемого выходного и входного сигналов.

Уравнение (17) легко решается в случае, когда случайная функция $Y(\tau)$ представляет собой белый шум. Это обеспечивается расширением вектора фазовых координат Y путем введения в математическую модель ДСФУ формирующего фильтра — оператора, преобразующего белый шум в случайный процесс с заданной корреляционной функцией (спектральной плотностью).

Другим направлением теории оптимизации динамических систем является задача оптимального оценивания (фильтрации) фазовых координат на основе использования результатов измерений и априорной информации о математической модели оцениваемого процесса. Большинство алгоритмов оптимального оценивания основаны на использовании уравнения для апостериорной плотности вероятности распределения фазовых координат системы, называемого уравнением Стратоновича-Кушнера. Произведем вывод этого уравнения применительно к рассматриваемой ДСФУ.

Задачу сформулируем следующим образом. Необходимо определить математическую модель фильтра ДСФУ, обеспечивающего оптимальное оценивание (сглаживание) сигнала с выхода ИФД.

Пусть все элементы ДСФУ, кроме ИФД и фильтра, описываются векторно-матричным уравнением (4). Вектор $X(t)$ имеет размерность n. ИФД является безынерционным измерителем вектора $X(t)$ и описывается выражением

$$Z(t) = C(X,t) + \zeta(t)\,, \tag{18}$$

$C(X,t)$ — m-мерная векторная функция; $\zeta(t)$ — m-мерный вектор центрированного гауссова шума с матрицей интенсивности $Q(t)$ $(m \le n)$.

Полной вероятностной характеристикой вектора $X(t)$ по результатам наблюдения вектора $Z(t)$ на интервале наблюдения $\tau \in [t_0, t]$ является апостериорная функция плотности вероятности

$$\hat{f}(X,t) = f(X,t \,|\, Z,\tau). \tag{19}$$

Считаем, что измерения производятся дискретно в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_k$, разделенные равными интервалами $\Delta t \ll T$ (T — период следования импульсов опорного генератора ДСФУ).

В момент времени t_k для функции $\hat{f}(X,t)$, характеризующей апостериорный (после фильтра) закон распределения вектора $\hat{X}(t_k)$, справедлива формула Байеса для апостериорной плотности вероятности [4]:

$$\hat{f}(X,t+\Delta t) = \frac{f(X,t+\Delta t) f_z(Z,t+\Delta t \,|\, X, Z_0^t)}{f(Z,t+\Delta t \,|\, Z_0^t)}\,, \tag{20}$$

$f(X,t+\Delta t)$ — априорная ПРВ; $f(Z,t+\Delta t \,|\, Z_0^t)$ — условная ПРВ вектора $Z(t+\Delta t)$ при фиксированном состоянии X в момент времени t; $Z_0^t = (Z_0, Z_{\Delta t}, \ldots, Z_{t-\Delta t}, Z_t)$ — последовательность наблюдений значений вектора Z на интервале $[t_0, t]$;

$$f(Z,t+\Delta t \,|\, Z_0^t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X,t+\Delta t) f_z(Z,t+\Delta t \,|\, X, Z_0^t)\, dX, \tag{21}$$

где $f_z(Z,t+\Delta t \,|\, X, Z_0^t)$ — условная функция правдоподобия, которая при фиксированных значениях $Z_{t+\Delta t}$ показывает, насколько одно из возможных значений вектора X более правдоподобно, чем другое.

Пусть входящая в выражение (18) функция $C(X,t)$ будет линейной. Тогда для малых интервалов времени Δt условная ПРВ дискретного вектора $\zeta(t+\Delta t)$ (для гауссова белого шума) имеет вид

$$f(Z,t+\Delta t \,|\, X, Z_0^t) = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{(2\pi)^m \,|Q(t)|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Delta t \rho(X,Z,t)\right], \tag{22}$$

где $\rho(X,Z,t)$ — так называемая функция невязки, определяемая выражением

$$\rho(X,Z,t) = \frac{1}{2}\left[Z - C(X,t)\right]\frac{1}{Q}\left[Z - C(X,t)\right]^T. \tag{23}$$

С учетом (22), (23) выражение (20) перепишем в виде

$$\hat{f}(X,t+\Delta t)=\frac{f(X,t+\Delta t)\exp\left[-\frac{1}{2}\Delta t\rho(X,Z,t)\right]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(X,t+\Delta t)\exp\left[-\frac{1}{2}\Delta t\rho(X,Z,t)\right]dX}. \tag{24}$$

Входящая в выражение (20) априорная функция ПРВ $f(X,t+\Delta t)$ удовлетворяет обобщенному для систем вида (4) уравнению Фоккера–Планка–Колмагорова (9).

Запишем выражение для априорной ПРВ $f(X,t+\Delta t)$ для момента времени $t+\Delta t$ в предположении, что апостериорная ПРВ в момент t известна:

$$\begin{gathered} f(X,t+\Delta t)=f(X,t)-\Delta t\nabla_x^T\hat{\pi}(X,t)-\Delta t\nu(X,t)\hat{f}(X,t)+ \\ +\Delta t\sum_{j=1}^{n}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|\hat{f}(h_j(X,t)). \end{gathered} \tag{25}$$

Подставим (25) в (24) и разложим дифференцируемую часть полученного выражения, включающую ПРВ, в ряд Маклорена по малой величине Δt, ограничившись членами первого порядка малости. С учетом того, что функция ν в явной форме не зависит от X, получим выражение

$$\begin{gathered} \hat{f}(X,t+\Delta t)=\hat{f}(X,t)-\Delta t\nabla_x^T\hat{\pi}(X,t)-\Delta t\nu(X,t)\hat{f}(X,t)+ \\ +\Delta t\sum_{j=1}^{n}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|\hat{f}(h_j(X,t))- \\ -\frac{1}{2}\Delta t\rho(X,Z,t)\hat{f}(x,t)+\frac{1}{2}\Delta t\hat{f}(x,t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(X,t)dX+ \\ +\frac{1}{2}\Delta t\hat{f}(x,t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla_x^T\hat{\pi}(X,t)-\nu(t)\hat{f}(x,t)+\Delta t\sum_{j=1}^{n}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|\hat{f}(h_j(X,t))\right]dX. \end{gathered} \tag{26}$$

Выражение (26) представляет собой рекуррентный алгоритм определения апостериорной плотности вероятности для случая дискретных наблюдений.

Пусть существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{f}(X,t+\Delta t)-\hat{f}(X,t)}{\Delta t}=\frac{\partial\hat{f}(X,t)}{\partial t}. \tag{27}$$

Разделив левую и правую части выражения (26) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим обобщенное уравнение Стратоновича–Кушнера для апостериорной плотности вероятности ДСФУ:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\hat{f}(X,t)}{\partial t}=-\nabla_x^T\hat{\pi}(X,t)-\nu(t)\hat{f}(X,t)+\sum_{j=1}^{n}\nu_j[h_j(X,t)]\left|\frac{\partial h_j(X,t)}{\partial X}\right|\hat{f}(h_j(X))- \\ -\frac{1}{2}\rho(X,Z,t)\hat{f}(x,t)+\frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(X,Z,t)\hat{f}(X,t)dX\right]\hat{f}(X,t). \end{gathered} \tag{28}$$

Алгоритм фильтрации (апостериорные уравнения для моментов) получается умножением левой и правой части (28) соответственно на x_i или $(x_i-m_i)(x_r-m_r)$ и интегрированием по X в бесконечных пределах.

Если в уравнении рассматриваемой системы (4) $A(X,t)$ — линейная функция, а $B(X,t)=0$, то апостериорные уравнения для моментов представляют собой классический фильтр Калмана–Бьюси.

Заключение

Предложенная аналитическая математическая модель ДСФУ, представляющая собой марковский стохастический процесс разрывного типа, отражает основные свойства ДСФУ при различной форме модуляции сигнала и позволяет учесть как динамические свойства, так и воздействие случайных факторов.

Полученное для рассматриваемой модели обобщенное уравнение для апостериорной плотности вероятности фазовых координат является основой для составления алгоритмов фильтрации, экстраполяции и идентификации ДСФУ.

Предлагаемый подход дает возможность при разработке ДСФУ определять оптимальную структуру и параметры непрерывной линейной части при заданном критерии качества.

ANALYTICAL MODELING OF THE PHASE CONTROL SYSTEMS

V.L. BUSKO, A.A. LOBATY, L.V. RUSAK

Abstract

Suggested analytical mathematical model of the phase control discrete system (PCDS), that is essentially Markov stochastic process of discrete type, represents the main parameters of PCDS by various signal modulations and let us to take into account dynamical characteristics and random factors influence.

Литература

1. *Батура М.П.* Дискретные системы с фазовым управлением Минск, 2002.
2. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.*. Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
3. *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Теория стохастических систем М., 2004.
4. *Казаков И.Е., Гладков Д.И.* Методы оптимизации стохастических систем. М., 1987.