2008 № 3 (33)

УДК 519.85

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

О.И. КОСТЮКОВА[1], Т.В. ЧЕМИСОВА[2], С.А. ЕРМОЛИНСКАЯ[3]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь

[2]Университет Авейро, 3810-193 Авейро, Португалия

[3]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 15 мая 2008

Рассматриваются задачи выпуклого полубесконечного программирования с континуумом ограничений, заданных аналитическими функциями. Целью данной статьи является получение нового эффективного критерия оптимальности для таких задач без предположения о выполнении условия Слейтера.

Ключевые слова: выпуклое программирование, полубесконечное программирование, условие Слейтера, критерий оптимальности.

Введение

Задачи полубесконечного программирования (ПБП) встречаются в физике, машиностроении, социальных, экономических и других науках, а также в оптимальном управлении при решении задачи оценивания на основе непрерывного наблюдения с неизвестными, но ограниченными помехами. Последние десятилетия теме полубесконечной оптимизации уделяется пристальное внимание из-за роста числа практических приложений и тесной связи с другими областями математики [1, 2].

Рассмотрим следующую задачу ПБП:

$$c(x) \to \min_x, \; f(x,t) \le 0, \; \forall t \in T = [t_*, t^*] \subset R, \tag{1}$$

где T — континуальное множество индексов; $x \in R^n$; функция $c: R^n \to R$ достаточно гладкая в R^n и $f: R^n \times T \to R$ аналитическая в $R^n \times T$. Полагается, что обе функции выпуклы по x.

Обозначим $X = \{x \in R^n : f(x,t) \le 0, t \in T\}$ множество допустимых планов задачи (1). Для каждого $x \in X$ определим множество активных индексов из T: $T_a(x) = \{t \in T : f(x,t) = 0\}$.

Говорят, что задача (1) удовлетворяет условию Слейтера, если существует такой вектор $\tilde{x} \in X$, что $f(\tilde{x},t) < 0$ для всех $t \in T$, т.е. $T_a(\tilde{x}) = \varnothing$.

В данной статье будем использовать следующие обозначения:

$$\nabla c(x) = \partial c(x)/\partial x,\ \nabla_x f(x,t) = \partial f(x,t)/\partial x,\ \nabla_{xx} f(x,t) = \partial^2 f(x,t)/\partial x^2;$$

$$f^{(0)}(x,t) = f(x,t),\ f^{(s)}(x,t) = \partial^s f(x,t)/\partial t^s,\ s \in N;\ \ N(q) = \{0,1,...,q\},\ \ q \in Z_+ = \{0,1,2,...\},$$

$|I|$ – количество элементов во множестве I.

В дальнейшем будем считать, что выполняется

Предположение 1. *Существует такой* $\bar{x} \in X$, *что* $f(\bar{x},t) \neq 0$ *сразу для всех* $t \in T$.

Определение 1. *Индекс* $t \in T$ *называется неподвижным индексом ограничений задачи (1), если* $f(x,t) = 0$ *для любого* $x \in X$.

Обозначим через T^* множество всех неподвижных индексов из T. По предположению 1 это множество представимо в виде $T^* = \{t_i^0,\ i = 1,..., p^0\}$, где $p^0 < \infty$. Очевидно, что задача (1) удовлетворяет условию Слейтера тогда и только тогда, когда $T^* = \varnothing$.

Определение 2. *Число* $q(t) \in \{0,\ 1,...\}$ *назовем степенью неподвижности индекса* $t \in T^*$ *в задаче (1), если для любого* $x \in X$ *выполняются равенства* $f^{(s)}(x,t) = 0,\ \ s \in N(q(t))$, *и существует такой вектор* $x(t) \in X$, *что* $f^{(q(t)+1)}(x(t),t) \neq 0$.

Положим, $\delta(t) = 1$, если $t \in T \setminus \{t^*\}$, и $\delta(t) = (-1)^{q(t)+1}$, если $t = t^*$.

В [3] был предложен конструктивный алгоритм определения множества неподвижных индексов и их степеней неподвижности и доказано существование такого плана $\tilde{x} \in X$, что

$$f^{(s)}(\tilde{x},t) = 0,\ \ s \in N(q(t)),\ \ \delta(t) f^{(q(t)+1)}(\tilde{x},t) < 0,\ \ \forall t \in T. \tag{2}$$

Было показано, что неподвижные индексы и их степени являются существенными характеристиками ограничений исходной задачи и не связаны непосредственно с оптимизацией. Поэтому можно считать, что они определены до начала решения задачи оптимизации.

Построим задачу нелинейного программирования (НЛП), зависящую от плана $x^0 \in X$:

$$\begin{gathered} c(x) \to \min,\quad f(x,t_i^0) \le 0,\ \ i \in I(x^0), \\ f^{(s)}(x,t_i^0) = 0,\ \ s \in N(q(t_i^0)),\quad \delta(t_i^0) f^{(q(t_i^0)+1)}(x,t_i^0) \le 0,\ \ i = 1,..., p^0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\{t_i^0,\ i \in I(x^0)\} \subset T_a(x^0) \setminus T^*,\quad |I(x^0)| < \infty. \tag{4}$$

Задачу (3) будем называть *вспомогательной задачей НЛП* для задачи ПБП (1).

Теорема 1. (Неявный критерий оптимальности) *Вектор* $x^0 \in X$ *оптимален в задаче ПБП (1) тогда и только тогда, когда существует такое множество* $I(x^0)$, *определенное согласно (4), что он оптимален в задаче НЛП (3).*

В [3] показано, что для задачи НЛП (3) следующее множество выпуклое

$$\overline{Y} = \{x \in R^n : f^{(s)}(x,t_i^0) = 0,\ \mathrm{s} \in N(q(t_i^0)),\ \ \delta(t_i^0) f^{(q(t_i^0)+1)}(x,t_i^0) \le 0,\ i = 1,..., p^0\}. \tag{5}$$

Тогда, переписав задачу (3) в виде

$$c(x) \to \min,\ \ f(x,t_i^0) \le 0,\ \ i \in I(x^0),\ \ x \in \overline{Y}, \tag{6}$$

заключаем, что задача (6) и, следовательно, задача (3) являются задачами *выпуклого программирования* (ВП) для любого плана задачи (1).

Критерий оптимальности для задач ПБП с аналитическими ограничениями

Покажем вначале, что вспомогательная задача НЛП для задачи ПБП (1) эквивалентна некоторой задаче ВП с линейными ограничениями-равенствами, если функция ограничений $f(x,t)$ аналитическая.

Рассмотрим нелинейную задачу следующего вида:

$$c(x) \to \min, \ \ x \in Y = H \bigcap G, \tag{7}$$

где $H = \{x \in R^n : \ h(x) = 0\}$, $h(x) = (h_j(x), \ j = 1,...,l)$, $G = \{x \in R^n : \ g_i(x) \le 0, \ i = 1,...,m\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть множество Y допустимых планов задачи (7) непустое и выпуклое, а вектор-функция* $h(x)$ *аналитическая. Если существует вектор* $y_0 \in Y$ *такой, что* $g_i(y_0) < 0, \ i = 1,...,m,$ *то будет верным представление* $Y = Z \bigcap G,$ *где*

$$\mathrm{Z} := Z(\psi_1,...,\psi_r) = \{x \in R^n : \ x = y_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \psi_i, \ \alpha_i \in R, \ i = 1,...,r\} \tag{8}$$

с произвольным максимальным (по количеству элементов) множеством линейно независимых векторов $\psi_i \in R^n$, $i = 1,...,r,$ *удовлетворяющих равенствам*

$$M^k(y_0, \psi_i) = 0, \ \ i = 1,...,r, \ \ k = 1, 2, ..., \tag{9}$$

где $M^k(x,\psi) = D^k(x,\psi)\psi, \ D^k(x,\psi) = \nabla_x M^{k-1}(x,\psi), \ D^1(x,\psi) = D^1(x) = \nabla h(x).$

Пусть $Y(x^0)$ — множество планов задачи (6). Представим его как $Y(x^0) = H \bigcap G,$ где

$$H = \{x \in R^n : \ h(x) = 0\}, \ \ \ h(x) = (h_{js}(x) = f^{(s)}(x, t_j^0), \ \ s \in N(q(t_j^0)), \ j = 1,..., p^0), \tag{10}$$

$$\begin{gathered} G = G(x^0) = \{x \in R^n : \ g_j(x) \le 0, \ j \in J(x^0)\}, \ \ g_j(x) = \delta(t_j^0) f^{(q(t_j^0)+1)}(x, t_j^0), \ j = 1,..., p^0, \\ g_j(x) = f(x, t_j^0), \ j \in I(x^0), \ \ \ J(x^0) = \{1,..., p^0\} \bigcup I(x^0). \end{gathered} \tag{11}$$

Легко проверить, что множество $Y(x^0)$ удовлетворяет условиям утверждения 1 с вектором $y_0 := \tilde{x},$ определенным в (2). Поэтому оно представимо в виде $Y(x^0) = Z \bigcap G,$ где Z определено в (8). Тогда задача (3) будет эквивалентна следующей:

$$c(x) \to \min_{x \in R^n, \ \alpha \in R^r}, \ \ x - \tilde{x} - \Psi\alpha = 0, \ \ g_j(x) \le 0, \ j \in J(x^0). \tag{12}$$

Здесь $\Psi = (\psi_i, \ \ i = 1,...,r) \in R^{n \times r}$ и $\psi_i \in R^n$, $i = 1,...,r,$ — максимальное число линейно независимых векторов, удовлетворяющих (9) с $h(x)$ из (10) и $y_0 = \tilde{x}$, где $\tilde{x}$ удовлетворяет (2).

Замечание 1. Построение матрицы Ψ в (12) не связано с решением оптимизационной задачи (3). Эта матрица определяется свойствами множества (5) и не зависит от выбора плана x^0.

Таким образом, для аналитических ограничений-равенств (обычно, нелинейных функций) задачи (3) существует такая матрица Ψ, что задача ВП (3) эквивалентна задаче (12) с линейными ограничениями-равенствами. Ограничения-неравенства задачи ВП (12) принимают вид строгих неравенств при $x = \tilde{x}.$ Следовательно, для нее выполняется условие Слейтера. Учитывая этот факт, будет верной следующая теорема.

Теорема 2. *Вектор* $y^0 \in Y(x^0)$ *оптимален в задаче ВП (12) тогда и только тогда, когда существуют множители* $\mu_j \ge 0, \ j \in J(x^0)$ *такие, что*

$$\mu_j g_j(y^0)=0,\ j\in J(x^0),\qquad \Psi'(\nabla c(y^0)+\sum_{j\in J(x^0)}\mu_j\nabla g_j(y^0))=0. \tag{13}$$

Из теорем 1 и 2 получаем критерий оптимальности для задач ПБП с аналитическими ограничениями. Заметим, что в следующей ниже теореме 3 нет требований о выполнении условия Слейтера в задаче ПБП (1).

Теорема 3. *Вектор $x^0\in X$ оптимален в задаче ПБП (1) тогда и только тогда, когда существуют такие множество $I(x^0)$, удовлетворяющее соотношениям (4), и множители $\mu_j\geq 0,\ j\in J(x^0)$, где $J(x^0)$ определено в (11), что выполняются равенства (13) с $y^0=x^0$.*

Сравнение различных форм условий оптимальности для задач ПБП

Сравним критерии оптимальности для выпуклых задач ПБП, представленные в настоящей статье, с известными ранее условиями оптимальности. Неявный критерий оптимальности, доказанный в [4], позволяет формулировать условия оптимальности для задач с континуумом ограничений в виде условий оптимальности для задач НЛП с конечным числом ограничений. В случае выполнения условия Слейтера в задаче ПБП (1) условие 1-го порядка (см. [5]) в задаче НЛП (3) будет необходимым и достаточным условием оптимальности для плана x^0 в задаче (1). Эти условия совпадают с классическими критериями [6, 7] для задач ПБП в предположении, что выполнено условие Слейтера. Если же в задаче (1) условие Слейтера нарушается, то вспомогательная задача (3) будет анормальной. Это приводит к тому, что классические условия оптимальности становятся неинформативными.

В [8] нами предложены новые достаточные условия оптимальности 1-го и 2-го порядков для плана x^0 в задаче ПБП. Эти условия учитывают специфику задачи, носят конструктивный характер и являются более эффективными для задач ПБП по сравнению с достаточными условиями из [6, 7]. Однако эти условия тоже не всегда позволяют проверить оптимальность плана.

Подчеркнем, что для задач с аналитическими ограничениями в данной статье получены условия оптимальности (теорема 3), которые не требуют выполнения условия Слейтера, и являются как необходимыми, так и достаточными, т. е. имеют форму критерия.

Сравним условия оптимальности из теоремы 3 с условиями оптимальности для задач ПБП, предложенными в [9]. Для нашего случая (когда все функции достаточно гладкие в своей области определения) условия из [9] можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Вектор $x^0\in X$ является оптимальным планом задачи ПБП (1) тогда и только тогда, когда существуют конечный набор индексов I и последовательности*

$$x^k\in R^n,\ \lambda_i^k\geq 0,\ t_i^k\in T,\ i\in I,\ k=1,2,..., \tag{14}$$

такие, что

$$\nabla c(x^0)+\sum\nolimits_{i\in I}\lambda_i^k\nabla_x f(x^k,t_i^k)\to 0,\ \|x^k-x^0\|\to 0,\ \text{и}\ \sum\nolimits_{i\in I}\lambda_i^k f(x^k,t_i^k)\to 0\ \text{при}\ k\to\infty. \tag{15}$$

Из данной теоремы следует, что для проверки оптимальности плана x^0 в задаче (1) необходимо построить несколько явно заданных последовательностей (14), а затем доказать требуемые сходимости (15). Очевидно, что построение таких последовательностей — задача более сложная по сравнению с нахождением конечного числа линейно-независимых векторов, удовлетворяющих равенствам (9).

Пример. Рассмотрим следующую задачу ПБП:

$$\begin{aligned}&c(x):=x_1+x_2+3x_3+x_4+x_1^2/2+x_2^2/2+x_3^2/2+x_4^2/2\to\min,\ x\in R^4,\\&f(x,t):=-t^2x_1+tx_2+\sin(t)x_3+x_4^4-t^2-t^3/6-5t^4\leq 0,\quad t\in T=[-1,\ 2].\end{aligned} \tag{16}$$

В этой задаче один неподвижный индекс $t_1^0=0$ со степенью неподвижности $q(t_1^0)=1$.

Рассмотрим допустимый план $x^0=(-1,\ 1,\ -1,\ 0)'$ задачи (16) и вспомогательную задачу

$$c(x)\to\min,\quad x_4^4=0,\ x_2+x_3=0,\ -2x_1-2\le 0. \tag{17}$$

Легко проверить, что известные достаточные условия оптимальности (см. [1]) для данного плана x^0 не выполняются в задаче (17), а значит, и в задаче ПБП (16).

Докажем оптимальность плана x^0 в задаче (16), используя теорему 3. Нетрудно проверить, что векторы $\psi_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)'$ и $\psi_2=(0,\ 1,\ -1,\ 0)'$ линейно-независимы и удовлетворяют равенствам (9) при $y_0=\tilde{x},\ \tilde{x}=(0,\ 1,\ -1,\ 0)'$. Положим

$$\Psi'=(\psi_1,\ \psi_2)'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда $\Psi'(\nabla c(x^0)+\mu_1\nabla g_1(x^0))=(-2\mu_1,\ 0)'$, где $g_1(x)=-2x_1-2$, и условия теоремы 3 выполняются при $\mu_1=0$. Согласно этой теореме, план x^0 оптимален в задаче (16).

Докажем теперь оптимальность плана $x^0=(-1,\ 1,\ -1,\ 0)'$ с помощью условий, предложенных в [9] и сформулированных в теореме 4. Подчеркнем, что в [9] не описывается способ построения множества и последовательностей (14). Эта задача является нетривиальной.

Для построения последовательностей (14) в задаче (16) найдем решение x^k возмущенной задачи ПБП(k):

$$c(x)\to\min,\ x\in R^4,\ f(x,t,\tau):=f(x,t)-\tau(k)\le 0,\ \ t\in T=[-1,\ 2],\ k=1,2,..., \tag{18}$$

где функция $\tau(k)>0$ определена ниже.

Положим

$$\begin{gathered}I=\{1\},\ \ t_1^k=-10^{-(k+3)},\ \ \lambda_1^k=-(40(t_1^k)^3+(t_1^k)^2+2+6\cos t_1^k)/(4(t_1^k)^3+2t_1^k+2\sin t_1^k\cos t_1^k),\\ x^k=(x_1^k,x_2^k,x_3^k,x_4^k)'=(\lambda_1^k(t_1^k)^2-1,\quad -\lambda_1^k t_1^k-1,\quad -\lambda_1^k\sin t_1^k-3,\\ \sqrt[3]{(\lambda_1^k)^2(3\sqrt{3}\sqrt{(1+27\lambda_1^k)/\lambda_1^k}-27)}/6/\lambda_1^k-0.5/\sqrt[3]{(\lambda_1^k)^2(3\sqrt{3}\sqrt{(1+27\lambda_1^k)/\lambda_1^k}-27)})',\\ \tau(k)=-(t_1^k)^2x_1^k+t_1^kx_2^k+\sin t_1^kx_3^k+(x_4^k)^4-(t_1^k)^2-(t_1^k)^3/6-5(t_1^k)^4.\end{gathered} \tag{19}$$

Можно проверить, что для заданных таким образом последовательностей выполняется $\lim\limits_{k\to\infty}x_1^k=-1,\ \ \lim\limits_{k\to\infty}x_2^k=1,\ \ \lim\limits_{k\to\infty}x_3^k=-1,\ \ \lim\limits_{k\to\infty}x_4^k=\lim\limits_{\lambda_1^k\to\infty}x_4^k=0,\ \ \lim\limits_{k\to\infty}\tau(k)=0,\ \ \lambda_1^k>0$ и $\tau(k)>0$, $k=1,2,...$ Очевидно, что при $\tau(k)>0$ задача (18) удовлетворяет условию Слейтера. Вектор x^k по построению последовательностей (19) является оптимальным планом задачи (18), для которого выполняется критерий оптимальности $\nabla c(x^k)+\lambda_1^k\nabla f(x^k,t_1^k)=0$ с множителем λ_1^k. Отсюда получаем $\lim\limits_{\|x^k-x^0\|\to 0}\nabla c(x^0)+\lambda_1^k\nabla f(x^k,t_1^k)=\lim\limits_{\|x^k-x^0\|\to 0}\nabla c(x^0)-\nabla c(x^k)=0.$

Гораздо более трудоемкой задачей оказывается проверка сходимости к нулю выражения $\lambda_1^k f(x^k,t_1^k)$ при $k\to\infty$. Для этого пришлось воспользоваться математическим пакетом Maple 8 из-за сложности и громоздкости полученного явного выражения для $\lambda_1^k f(x^k,t_1^k)$.

Проведя довольно большие расчеты по построению последовательностей, что фактически потребовало от нас нахождения решения параметрической задачи (18) в аналитическом виде, и доказав требуемые сходимости, нам удалось доказать оптимальность плана x^0 в задаче

(16) и по теореме 4. Отметим, что кроме сложности вычисления требуемых сходимостей весьма нетривиальной является задача построения самих последовательностей, которая может быть более трудоемкой, чем решение исходной задачи ПБП.

Заключение

В статье получены условия оптимальности для задач ПБП с аналитическими функциями ограничений. Эти условия имеют форму критерия и справедливы для задач, в которых условие Слейтера может не выполняться. Данный критерий не имеет аналогов в теории ПБП. Для его применения нужно построить максимальное число (не более n) линейно-независимых векторов, удовлетворяющих равенствам (9). Процесс построения этих векторов не связан с решением оптимизационной задачи НЛП, но обусловлен свойствами множества допустимых планов исходной задачи ПБП.

OPTIMALITY CRITERIA FOR CONVEX SEMI-INFINITE PROGRAMMING PROBLEMS

O.I. KOSTYUKOVA, T.V. TCHEMISOVA, S.A. YERMALINSKAYA

Abstract

Convex semi-infinite programming (SIP) problems with analytic constraint functions are considered. The aim of this paper is to formulate and justify a new efficient optimality criterion for such problems. The criterion is applicable to SIP problems that do not satisfy Slater condition.

Литература

1. *Hettich R., Kortanek K.O.* // SIAM Review. 1993. Vol. 35. P. 380–429.
2. *Polak E.* // Semi-Infinite Programming and Application, Lect. Notes Econ. Math. Syst. 1983. № 215. P. 234–248.
3. *Kostyukova O.I., Tchemisova T.V., Yermalinskaya S.A.* // International Journal of Applied Math. and Statistics. 2008. Vol. 13, № J08. P. 13–30.
4. *Костюкова О.И., Чемисова Т.В., Ермолинская С.А.*// Вестник ГрГУ. 2007. Сер. 2, № 2. С. 73–81.
5. *Ben Tal A.* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1980. Vol. 31, № 2. P. 143–165.
6. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. Springer-Verlag, New-York, 2000.
7. *Reemtsen R., Ruckmann J.-J.* Semi-Infinite Programming. Kluwer, Boston, 1998.
8. *Костюкова О.И., Чемисова Т.В., Ермолинская С.А.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 1. С. 38–43.
9. *Jeyakumar V., Lee G.M., Dinh N.* // SIAM Jour. of Optim. 2003. Vol. 14, № 2. P. 534–547.