

ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 681.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ РАКЕТЫ С РЕГУЛЯТОРОМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХ

О.В. СИДОРОВИЧ

*Военная академия Республики Беларусь
Гуртьева 1, Минск, 220057, Беларусь**Поступила в редакцию 30 октября 2008*

Решается задача вероятностного анализа системы стабилизации с регулятором переменной структуры в канале тангажа. Предлагается один подход к определению вероятности нахождения системы в той или иной структуре и дисперсии сигнала ошибки в скользящем режиме, основывающийся на рассмотрении каждой из структур отдельно. Сравниваются результаты моделирования с расчетными данными.

Ключевые слова: система с переменной структурой, система стабилизации ракеты, скользящий режим.

Введение

Задача вероятностного анализа работы систем с переменной структурой сложна и является актуальной, так как все системы действуют в условиях помех. Система стабилизации ракеты с регулятором переменной структуры содержит нелинейное звено типа ψ -ячейки, которое определяет движение системы в скользящем режиме за счет переключения коэффициентов усиления. По существу, система из одной структуры переходит в другую и наоборот, следует отметить, что переходы в системе происходят в случайные моменты времени [1,2]. Анализировать систему с нелинейным звеном затруднительно и громоздко. Поэтому имеет место вопрос об анализе таких систем методами линейной теории, а это возможно, если рассмотреть каждую структуру отдельно.

Постановка задачи

Система стабилизации ракеты с регулятором переменной структуры в канале тангажа представлена на рис. 1.

Основная часть

Проведем теоретически-вероятностный анализ системы стабилизации ракеты переменной структуры, рассматривая каждую структуру отдельно. Для одной из структур запишем уравнения для математических ожиданий и дисперсий

$$\dot{m}_1(t) = -m_2(t) - \frac{1}{T_\xi} m_4(t), \quad \dot{m}_2(t) = m_3(t),$$

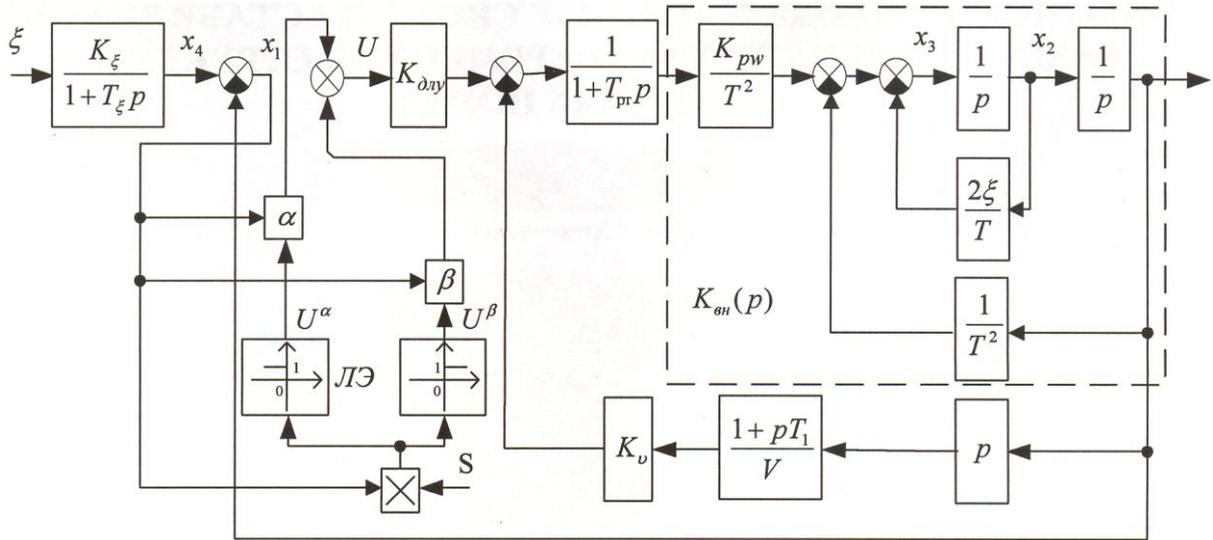


Рис. 1. Система стабилизации ракеты с регулятором переменной структуры в канале тангажа: x_1 — сигнал ошибки; ЛЭ — логический элемент; $U = \alpha x_1$ при $x_1 S > 0$, $U = \beta x_1$ при $x_1 S < 0$ — управляющее воздействие; $K_{\text{вн}}(p) = K_{pw} / (1 + 2\xi T p + T^2 p^2)$ — передаточная функция ракеты по нормальному ускорению; $1 / (1 + T_{\text{пр}} p)$ — передаточная функция рулевого привода; V — скорость полета ракеты; ξ — белый шум; $K_{\xi} / (1 + T_{\xi} p)$ — формирующий фильтр; $S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ — сигнал переключения; x_1, x_2, x_3, x_4 — фазовые координаты системы

$$\dot{m}_3(t) = \left(\frac{\alpha K_{\text{oly}} K_{pw} + 1}{T^2 T_{\text{пр}}} \right) m_1(t) - \left(\frac{K_{pw} K_v}{V T^2 T_{\text{пр}}} + \frac{1}{T^2} + \frac{2\xi}{T T_{\text{пр}}} \right) m_2(t) - \left(\frac{K_{pw} K_v T_1}{V T^2 T_{\text{пр}}} + \frac{1}{T_{\text{пр}}} + \frac{2\xi}{T} \right) m_3(t) - \frac{1}{T^2 T_{\text{пр}}} m_4(t),$$

$$\dot{m}_4(t) = -\frac{1}{T_{\xi}} m_4(t),$$

$$\dot{D}_1(t) = -2D_{12}(t) - \frac{2}{T_{\xi}} D_{14} + \frac{K_{\xi}^2}{T_{\xi}^2} N_{\xi}, \quad \dot{D}_2(t) = 2D_{23}(t),$$

$$D_3(t) = \left(\frac{2\alpha K_{\text{oly}} K_{pw} + 2}{T^2 T_{\text{пр}}} \right) D_{13}(t) - \left(\frac{2K_{pw} K_v}{V T^2 T_{\text{пр}}} + \frac{2}{T^2} + \frac{4\xi}{T T_{\text{пр}}} \right) D_{23}(t) - \left(\frac{2K_{pw} K_v T_1}{V T^2 T_{\text{пр}}} + \frac{2}{T_{\text{пр}}} + \frac{4\xi}{T} \right) D_3(t) - \frac{2}{T^2 T_{\text{пр}}} D_{34}(t),$$

$$\dot{D}_4(t) = -\frac{2}{T_{\xi}} D_4(t) + \frac{K_{\xi}^2}{T_{\xi}^2} N_{\xi},$$

$$\dot{D}_{12}(t) = -D_2(t) - \frac{1}{T_{\xi}} D_{24}(t) + D_{13}(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{13}(t) = & -D_{23}(t) - \frac{1}{T_\xi} D_{34}(t) + \left(\frac{\alpha K_{\partial y} K_{pw} + 1}{T^2 T_{pr}} \right) D_1(t) - \left(\frac{K_{pw} K_v}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T^2} + \frac{2\xi}{TT_{pr}} \right) D_{12}(t) - \\ & - \left(\frac{K_{pw} K_v T_1}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T_{pr}} + \frac{2\xi}{T} \right) D_{13}(t) - \frac{1}{T^2 T_{pr}} D_{14}(t), \end{aligned}$$

$$\dot{D}_{14}(t) = -D_{24}(t) - \frac{1}{T_\xi} D_4(t) - \frac{1}{T_\xi} D_{14}(t) + \frac{K_\xi^2}{T_\xi^2} N_\xi,$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{23}(t) = & D_3(t) + \left(\frac{\alpha K_{\partial y} K_{pw} + 1}{T^2 T_{pr}} \right) D_{12}(t) - \left(\frac{K_{pw} K_v}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T^2} + \frac{2\xi}{TT_{pr}} \right) D_2(t) - \frac{1}{T^2 T_{pr}} D_{24}(t) - \\ & - \left(\frac{K_{pw} K_v T_1}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T_{pr}} + \frac{2\xi}{T} \right) D_{23}(t), \end{aligned}$$

$$\dot{D}_{24}(t) = D_{34}(t) - \frac{1}{T_\xi} D_{24}(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{34}(t) = & \left(\frac{\alpha K_{\partial y} K_{pw} + 1}{T^2 T_{pr}} \right) D_{14}(t) - \left(\frac{K_{pw} K_v}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T^2} + \frac{2\xi}{TT_{pr}} \right) D_{24}(t) - \frac{1}{T^2 T_{pr}} D_4(t) - \\ & - \left(\frac{K_{pw} K_v T_1}{VT^2 T_{pr}} + \frac{1}{T_{pr}} + \frac{2\xi}{T} + \frac{1}{T_\xi} \right) D_{34}(t). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти вероятность пребывания системы в α -структуре, необходимо найти математическое ожидание на выходе логического элемента (ЛЭ) представленного на рис. 1 и описываемого уравнением

$$U^\alpha = \varphi^\alpha(x_1 S) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 S > 0, \\ 0 & \text{при } x_1 S < 0. \end{cases}$$

Для простоты положим, что произведение $x_1 S$ распределено по нормальному закону. Математическое ожидание на выходе логического элемента равно

$$m_u^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^\alpha(x_1 S) f(x_1 S) dx_1 S = 0 \cdot \left(\int_{-\infty}^0 f(x_1 S) dx_1 S \right) + 1 \cdot \left(\int_0^{\infty} f(x_1 S) dx_1 S \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 S) dx_1 S,$$

$f(x_1 S)$ — плотность вероятности произведения случайных величин x_1 и S , будем для простоты считать, что они распределены по нормальному закону.

Пользуясь формулой для вероятности того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, примет значение, заключенное в интервале (a, b) , получим

$$P \ a < x_1 S < b = \Phi \frac{b - m_{x_1 S}}{\sqrt{D_{x_1 S}(t)}} - \Phi \frac{a - m_{x_1 S}}{\sqrt{D_{x_1 S}(t)}}$$

Перепишем формулу для математического ожидания

$$m_u^\alpha = 0,5 + \Phi \frac{m_{x_1 S}}{\sqrt{D_{x_1 S}(t)}} \quad (1)$$

где $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа; $P_\alpha = m_u^\alpha$ — вероятность пребывания системы в α -структуре; $P_\beta = 1 - P_\alpha$ — вероятность пребывания системы в β -структуре.

Найдем математическое ожидание и дисперсию произведения сигнала ошибки и сигнала переключения соответственно:

$$m_{x_1S}(t) = m_1 m_S(t) + c_1 D_1(t) + c_2 D_2(t) + c_3 D_3(t),$$

где $m_S(t) = c_1 m_1(t) + c_2 m_2(t) + c_3 m_3(t)$.

$$D_{x_1S}(t) = M \left[x_1 S - m_{x_1S} \right]^2 = M \left[x_1^2 S^2 - 2x_1 S m_{x_1S} + m_{x_1S}^2 \right] = M \left[x_1^2 S^2 \right] - 2M \left[x_1 S m_{x_1S} \right] + M \left[m_{x_1S}^2 \right].$$

С учетом $S(t) = m_S(t) + \overset{0}{S}(t)$, $x_1(t) = m_1(t) + \overset{0}{x_1}(t)$ запишем

$$M \left[x_1^2 S^2 \right] = M \left[\left(m_S(t) + \overset{0}{S}(t) \right)^2 \left(m_1(t) + \overset{0}{x_1}(t) \right)^2 \right] = M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \overset{0}{S} + 2 \overset{0}{S} \overset{0}{x_1} + \overset{0}{x_1} m_S^2 + 2 \overset{0}{x_1} \overset{0}{S} m_1 \right] + M \left[4 \overset{0}{x_1} \overset{0}{S} m_1 m_S + 2 \overset{0}{x_1} m_1 m_S^2 + 2 \overset{0}{S} m_1^2 + 2 \overset{0}{S} m_S m_1^2 + m_1^2 m_S^2 \right].$$

Из [3]

$$M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \overset{0}{S} \right] = M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \overset{0}{S} \right] = M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{x_1} \right] M \left[\overset{0}{S} \overset{0}{S} \right] + M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \right] M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \right] + M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \right] M \left[\overset{0}{x_1} \overset{0}{S} \right] = D_1(t) D_S(t) + D_{1S}(t) D_{1S}(t) + D_{1S}(t) D_{1S}(t) = D_1(t) D_S(t) + 2 D_{1S}(t)^2.$$

где $D_{1S}(t)$ — взаимная дисперсия случайных функций $S(t)$, $x_1(t)$

$$D_{1S}(t) = M \left[\overset{0}{S}(t) \overset{0}{x_1}(t) \right] = c_1 m_1^2 + D_1 + c_2 m_1 m_2 + D_{12} + c_3 m_1 m_3 + D_{13} - M \overset{0}{x_1} M \overset{0}{S} = c_1 D_1(t) + c_2 D_{12}(t) + c_3 D_{13}(t).$$

Для центрированных случайных процессов можно записать $M \left[\overset{0}{S}(t) \right] = 0$, $M \left[\overset{0}{x_1} \right] = 0$.

Из общей теории вероятности известно $M \left[\overset{0}{S} \overset{0}{x_1} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overset{0}{S} \overset{0}{x_1} \right) f(x; S) dx dS$,

где r — коэффициент взаимной корреляции $S(t)$ и $x_1(t)$,

$$f(x; S) = \frac{1}{2\pi \sqrt{D_S D_1} \sqrt{1-r^2}} \exp \left(-0.5 \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{x_1 - m_1}{D_1} - \frac{2r(x_1 - m_1)(S - m_S)}{\sqrt{D_S D_1}} + \frac{(S - m_S)^2}{D_S} \right) \right)$$

плотность распределения вероятности $S(t)$ и $x_1(t)$,

Произведем в двойном интеграле замену переменных, положив

$$\frac{x_1 - m_1}{\sqrt{2D_1}} = u, \quad \frac{1}{\sqrt{2(1-r^2)}} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sqrt{D_1}} - r \frac{x_s - m_s}{\sqrt{D_s}} \right) = w.$$

Якобиан данного преобразования равен

$$I = 2\sqrt{1-r^2} D_1 D_s.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ S & x_1 & \end{bmatrix} &= \frac{2\sqrt{2D_s(1-r^2)} D_1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 w e^{-u^2-w^2} dudw + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3 r}{\sqrt{1-r^2}} e^{-u^2-w^2} dudw \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2D_s(1-r^2)} D_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} w e^{-w^2} dw + \frac{2\sqrt{2D_s(1-r^2)} D_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3 r}{\sqrt{1-r^2}} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \end{aligned}$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} w e^{-w^2} dw = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3 r}{\sqrt{1-r^2}} e^{-u^2} du = 0 \quad \text{как интегралы от нечетной функции в симметричных}$$

пределах, следовательно, можно записать $\mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ S & x_1 & \end{bmatrix} = 0$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} D_{x_1 S}(t) &= \mathbf{M} \left[x_1 S - m_{x_1 S} \right]^2 = D_1(t) D_s(t) + m_s(t)^2 D_1(t) + m_1(t)^2 D_s(t) + D_{1S}(t)^2 \\ &+ 2m_1(t)m_s(t)D_{1S}(t). \end{aligned}$$

Дисперсия ошибки запишется

$$D_1(t) = D_1^\alpha(t)P_\alpha + D_1^\beta(t)P_\beta, \quad (2)$$

где D_1^α — дисперсия ошибки в α -структуре, D_1^β — дисперсия ошибки в β -структуре.

Результаты моделирования

Решим дифференциальные уравнения моментов для каждой из структур при следующих параметрах системы стабилизации представленной на рис. 1: $\alpha = 0,1$, $K_\xi = 4,47$, $T_\xi = 2,5 \text{ c}^{-1}$, $K_{\partial y} = 0,15 \text{ c}^2 \text{ рад/м}$, $T_{\rho r} = 0,01 \text{ c}^{-1}$, $K_{\rho w} = 1000 \text{ м/с}^2 \text{ рад}$, $T = 0,05 \text{ c}^{-1}$, $\xi = 0,1$, $T_1 = 0,033 \text{ c}^{-1}$, $V = 600 \text{ м/с}$, $K_v = 0,5$, $\beta = 0,01$. На рис. 2 и рис. 3 представлены графики дисперсии сигнала ошибки в α -структуре и β -структуре соответственно, являющиеся результатом решения дифференциальных уравнений моментов при нулевых начальных условиях $m_i(0) = 0$, $D_{ik}(0) = 0$, $i, k = 1, 4$.

В установившемся режиме значения дисперсий равны $D_1^\alpha(t_{\text{уст}}) = 0,15 \text{ (м}^2/\text{с}^4)$, $D_1^\beta(t_{\text{уст}}) = 1 \text{ (м}^2/\text{с}^4)$.

Пользуясь (1) найдем вероятности пребывания системы в каждой из структур

$$P_\alpha = 0,5 + \Phi \left(\frac{85}{\sqrt{1,52 \cdot 10^4}} \right) = 0,755, \quad P_\beta = 1 - P_\alpha = 0,245.$$

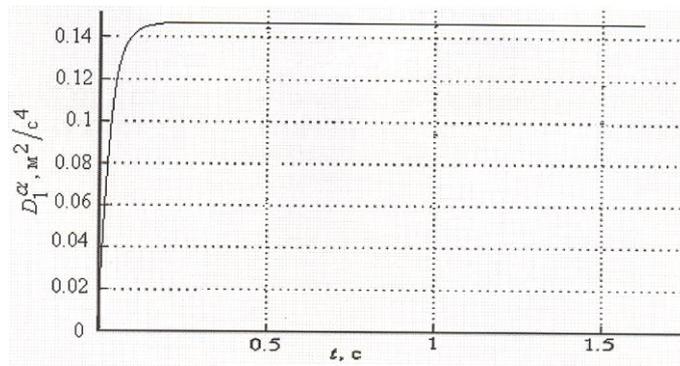


Рис. 2. Дисперсия сигнала ошибки в α -структуре

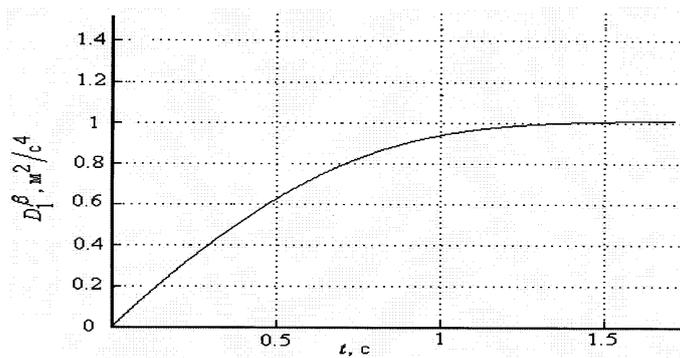


Рис. 3. Дисперсия сигнала ошибки в β -структуре

Из (2) дисперсия сигнала ошибки в скользящем режиме для системы стабилизации ракеты в канале тангажа

$$D_1 = 0,755 \cdot 0,15 + 0,245 \cdot 1 = 0,59 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Сравним результат решения уравнений моментов с результатами моделирования системы. Выявим оценки для математического ожидания и дисперсии сигнала ошибки [3]

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^n x_i / n, \quad \tilde{D} = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 / n - \tilde{m}^2 \right] n / n - 1 .$$

где n — количество опытов, x_i — значения случайной функции для фиксированных моментов времени. На рис. 4 представлена одна из реализаций случайного процесса сигнала ошибки.

Согласно [4] при $\varepsilon = 0,1$ и доверительной вероятности $p_1 = 0,97$, необходимое количество опытов для получения оценок математического ожидания и дисперсии $n = 499$. После проведения опытов на математической модели находим, что оценка математического ожидания равна $\tilde{m} = 0,019$, оценка для среднего квадратичного отклонения равна $\tilde{\sigma} = 0,571 \text{ м/с}^2$.

Сравнивая результаты моделирования с расчетными, можно утверждать, что предложенный метод позволяет производить вероятностный анализ системы стабилизации ракеты с регулятором переменной структуры в условиях воздействия помех.

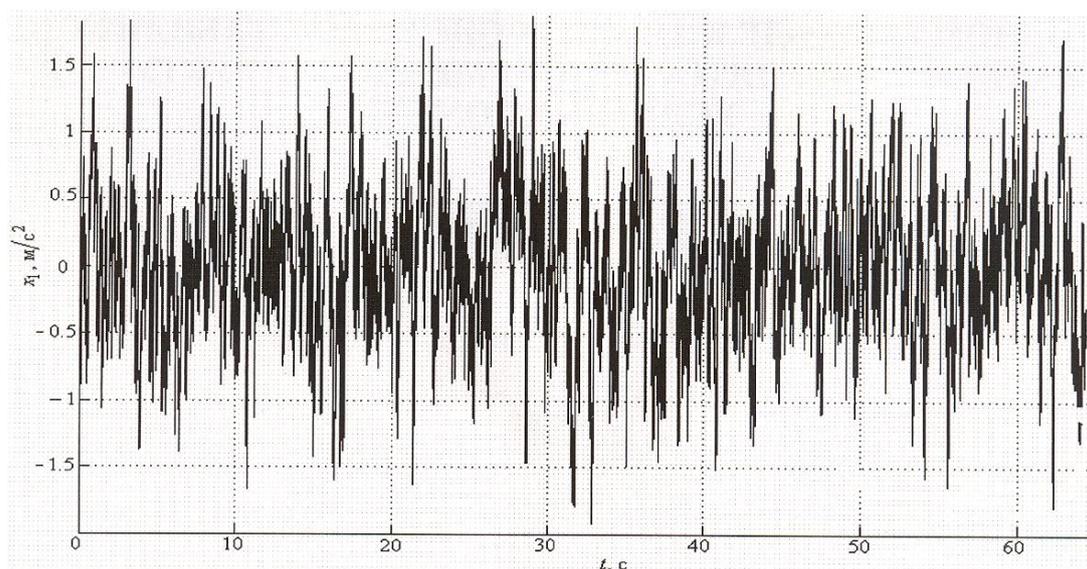


Рис. 4. Сигнал ошибки

Заключение

Приведенные формулы (1) и (2) позволяют провести теоретически-вероятностный анализ систем стабилизации ракет с регулятором переменной структуры, рассматривая каждую структуру отдельно, что позволяет значительно упростить анализ всей системы в условиях действия помех. Ошибки метода лежат в пределах 10–15% от результатов моделирования. Данный подход можно обобщить для систем более высокого порядка.

ABOUT ONE APPROACH TO THE ANALYSIS OF SYSTEM OF STABILIZATION OF A MISSILE WITH A REGULATOR OF VARIABLE STRUCTURE IN CONDITIONS OF HANDICAPS

O.V. SIDOROVICH

Abstract

The problem of the probability analysis of system of stabilization with a regulator of variable structure in the channel pitch is solved. One approach to definition of probability of a finding of system in this or that structure and a dispersion of a signal of a mistake in the sliding mode, based on consideration of each of structures separately is offered. Comparison of results of modeling with settlement data is lead.

Литература

1. Пупков К.А., Егунов Н.Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. М., 2004.
2. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. М., 1977.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., 1986.
4. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., 1963.