Принцип наследования в задачах полиэдральной комбинаторики

Исаченко А.Н.
Кафедра информационных систем управления, факультет прикладной математики и информатики
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
e-mail: isachen@bsu.by

***Аннотация* — Рассматривается наследование ограничений при переходе от задачи поиска оптимальных решений на множестве перестановок к задаче поиска оптимальных решений на множестве циклических перестановок.**

Ключевые слова: наследование, полиэдральная комбинаторика, перестановка

I. Введение

Одним из подходов к решению задач комбинаторной оптимизации является построение эквивалентной задачи линейного программирования. При этом для полиноминально разрешимых задач, удаётся получить полную неприводимую систему линейных ограничений (равенств и неравенств). Для полиноминально неразрешимых задач построение полной неприводимой системы ограничений является не менее трудоёмким, чем решение исходной задачи. Частичное описание системы линейных ограничений даёт возможность построения релаксационной задачи с поиском приближения к оптимальному решению. Для частичного описания можно использовать наследуемые грани многогранника допустимых решений. Их число определяет размерность релаксационной задачи.

Понятие наследуемой грани введено в работе [1]. Пусть M_1, M_2 – многогранники размерности $d>2$, причем $\mathrm{vert}M_1 \subset \mathrm{vert}M_2$, а G есть m-мерная грань многогранника M_1 ($1\leq m < d$). G является наследуемой гранью (относительно многогранника M_2), если существует грань F многогранника M_2 такая, что $\mathrm{dim}G=\mathrm{dim}F$ и $\mathrm{vert}G \subseteq \mathrm{vert}F$.

II. Наследуемые гиперграни многогранника
III. Задачи на циклических перестановках

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу

$$\min_{\pi\in C_n}\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}b_i$$

Здесь C_n – множество циклических перестановок элементов множества $N=\{1,2,..,n\}$, $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ - множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1<a_2<\ldots<a_n$, $b_1<b_2<\ldots<b_n$. Пусть

$$M(C_n)=conv\{a(\pi)=(a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\ldots,a_{\pi(n)}) \mid \pi\in C_n\},$$

Для перестановочного многогранника $M(S_n)$ и многогранника циклических перестановок выполняются соотношения $\mathrm{dim}M(C_n)=\mathrm{dim}M(S_n)$, $\mathrm{vert}M(C_n)\subset \mathrm{vert}M(S_n)$, Для перестановочного многогранника $M(S_n)$ задающая его полная неприводимая система имеет вид [2]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\,,$$

$$\sum_{i\in\omega} x_i \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j\,,\ \forall\,\omega\subset N,\ |\omega|\leq n-1\,. \qquad (1)$$

Известно [3] , что при $n \geq 5$ для $|\omega|=1$, $\omega\subset\{2,3,\ldots,n\}$ и для $|\omega|=2$, $\omega\subset\{3,4,\ldots,n\}$ соответствующие неравенствам из (1) гиперплоскости определяют наследуемые относительно $M(S_n)$ гиперграни многогранника $M(C_n)$.

Рассмотрим неравенства для $|\,\omega\,|=3$ из системы (2).

Теорема 1. При $n \geq 5$ каждая гиперплоскость

$$H(i,j,k)=\{x\in E^n \mid x_i+x_j+x_k=a_1+a_2+a_3\},$$
$$i\in\{1,2,3\},\ j,k\in\{4,\ldots,n\},\ j< k,$$

определяет гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Доказательство проводится непосредственно по определению размерности, указанием соответствующего множества аффинно-независимых точек.

IV. Нижняя оценка для числа гиперграней

Пусть $f(M(C_n))$ - число гиперграней многогранника $M(C_n)$.

Теорема 2. Для числа гиперграней $f(M(C_n))$ многогранника $M(C_n)$ при $n\geq5$ справедливо неравенство

$$f(M(C_n))\geq\begin{cases}((k-1)!)^2+8k^2-24k+20, & n=2k,\\ (k-1)!k!+8k^2-17k+10, & n=2k+1.\end{cases}$$

Данная нижняя оценка получена из оценки, приведенной в работе [3] и теоремы 1.

[1] Исаченко Я.А.. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках. Современные информационные компьютерные технологии: Сб. науч. ст., ч. 2. Гродно : ГрГУ, 2008. С.203-206.
[2] Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Наука, 1981. 344 с.
[3] Исаченко А.Н., Исаченко Я.А. Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках. Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 187-190.