

Метод решения задачи динамической булевой ОПТИМИЗАЦИИ

Герман О.В.; Садовская О.И.; Герман Ю.О.

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: ovgerman@tut.by, ign_olga@mail.ru, yuliagerman@tut.by

Аннотация—представлен математический подход к задаче синтеза поведения системы, описываемой множеством булевых уравнений с временным параметром. Описание построено на примере, который может быть относительно легко формализован и обобщен. Метод может быть использован в системе синтеза поведения интеллектуальных роботов, управлении динамическими процессами, например, в системах коммутации энергии и т.п.

Ключевые слова: система; алгоритм поведения; синтез; решение уравнений

I. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему булевых уравнений с временным параметром t , играющим роль дискретного шага в рассматриваемом алгоритме. Пусть система описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) \vee x(t+1) \vee x(t+2) \\ \bar{x}(t) \vee \bar{x}(t+1) \vee \bar{x}(t+2) \\ x(t) \vee x(t+1) \\ x(t) \vee \bar{x}(t+2) \end{aligned} \quad (1)$$

Переменная x играет роль переменной состояния системы, определяемой в различные моменты времени t . Разумеется, описание системы может использовать не одну, а десятки переменных состояния, но в иллюстративных целях это излишне. Очевидно, что булевы уравнения (1) определяют в общем случае множество допустимых траекторий развития системы, начиная с $t=0$. Задача оптимизации поведения требует выбрать некую одну траекторию на интервале $[0, T]$, где T задает конечный или максимально допустимый номер шага процесса. При этом оптимальная траектория может быть определена некоторыми условиями, которые она должна обеспечивать. Пусть такими условиями будут

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \\ T = 4, t_{fin} \leq T, \\ x(t_{fin}) = 1, x(t_{fin} - 1) = 0, x(t_{fin} - 2) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что условия (2) должны определять допустимое состояние в смысле (1). Кроме того, начальное состояние здесь известно, так что остается найти последовательные промежуточные состояния, удовлетворяющие (1) и обеспечивающие переход в конечное состояние.

Приведенная постановка задачи расширяет рамки работ [1,2,3], в которых использовались только уравнения с

переменными $x(t), x(t+1)$, связывающими соседние состояния. Рассматриваемая постановка расширяет пределы общности задачи.

II. ИЛЛЮСТРАЦИЯ АЛГОРИТМА

Идея алгоритмов, представленных в источниках [1,2], сводилась к двухэтапной схеме: сначала найти подстановки вида

$$x(t) = f(x(t+1)) \& \varepsilon(t) \quad (3)$$

с неизвестной новой переменной $\varepsilon(t)$. Затем последовательно составлять системы булевых уравнений относительно неизвестных переменных $\varepsilon(t)$ и искать решение, удовлетворяющее конечному состоянию системы. С учетом того, что мы используем переменные $x(t), x(t+1), x(t+2)$ этот подход следует расширить. Для получения подстановок вида (3) исключим из системы $x(t+2)$, используя метод исключения литер, описанный в [2]. Получим систему следующего вида:

$$x(t) \vee x(t+1) \quad (4)$$

Из (4) на основании техники эквивалентных подстановок [1,2] получаем подстановку:

$$\bar{x}(t+1) = x(t) \& \varepsilon_1(t) \quad (5)$$

Аналогичным образом из системы (1) удалим методом исключения литер переменную $x(t)$ и получим логически эквивалентную ей систему вида

$$\bar{x}(t+1) \vee \bar{x}(t+2) \quad (6)$$

Из (6) получаем подстановку

$$x(t+2) = \bar{x}(t+1) \& \varepsilon_2(t) \quad (7)$$

С учетом того, что переменная t принимает любые значения, начиная с 0, перепишем (7) так:

$$x(t+1) = \bar{x}(t) \& \varepsilon_2(t) \quad (8)$$

Примем во внимание, что условие (8) становится действительным, начиная со второго такта (шага), когда определены значения $x(0), x(1), x(2)$, и остается действительным для последующих моментов времени. Теперь мы можем объединить (5) и (8):

$$\begin{aligned} x(t+1) = \bar{x}(t) \& \varepsilon_3(t), \\ \varepsilon_3(t) = \varepsilon_1(t) \vee \varepsilon_2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Полученная нами итоговая подстановка является ключевой. Она позволяет определить оптимальную траекторию развития процесса в соответствии с условиями (2).

III. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

В силу условий (2) стартуем из состояния $x(0)=0$. На этом такте используем подстановку (5) и получаем:

$$\bar{x}(1) = 0 \rightarrow x(1) = 1$$

На втором такте уже следует использовать подстановку (9), которая дает:

$$x(2) = 0, x(1) = 1, x(0) = 0$$

Теперь каждый последующий шаг определяется согласно подстановки (9). Далее имеем:

$$\begin{aligned} x(3) &= \varepsilon_3(3), \\ x(4) &= \bar{\varepsilon}_3(3) \& \varepsilon_3(4) \end{aligned} \quad (10)$$

Мы достигли финального шага $T=4$. Остается выяснить, можно ли к этому шагу выйти на оптимальную в смысле условий (2) траекторию. Очевидно, должны выполняться условия:

$$x(4) = 1, x(3) = 0, x(2) = 0$$

Это соответственно дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(3) &= 0, \\ \bar{\varepsilon}_3(3) \& \varepsilon_3(4) &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, все свелось к задаче решения системы логических уравнений. В случае системы (11) решение очевидно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(3) &= 0, \\ \varepsilon_3(4) &= 1 \end{aligned}$$

Данное решение окончательно определяет искомую траекторию:

$$x(4) = 1, x(3) = 0, x(2) = 0, x(1) = 1, x(0) = 0$$

играет роль переменной состояния системы. Разумеется, описание системы может использовать

IV. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Переход к общему случаю на вызывает принципиальных сложностей. В самом деле, сначала следует исключить из системы все переменные с временным параметром $(t+2)$ и выше. Для этого мы применяем технику исключения дитер. Далее получим систему подстановок, скажем для первой переменной

$$x_1(t+1) = f(x_1(t), x_2(t+1), x_2(t), \dots, x_k(t+1), x_k(t)) \quad (12)$$

Подставим (12) в исходную систему и выполним аналогичные шаги для получения новой подстановки, скажем,

$$x_2(t+1) = f(x_2(t), x_3(t+1), x_3(t), \dots, x_k(t+1), x_k(t))$$

и т.д.

Следовательно, итогом будет система подстановок для переменных состояния, которую следует использовать по аналогии с рассмотренным нами примером для системы, описываемой единственной переменной. Ясно, что при рассмотрении общего случая придется многократно решать системы логических уравнений, возникающих на итерациях алгоритма. Учитывая NP-полноту задачи Выполнимость, эта особенность, к сожалению, потенциально ограничивает эффективность алгоритма для систем, описываемых десятками и сотнями переменных состояния.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный подход можно использовать для синтеза управления в системах дискретного действия, поведение которых определяется заданной системой логических уравнений с временным параметром. К такого рода системам можно отнести, например, системы планирования поведения интеллектуальных роботов [4], системы синтеза программ и др.

- [1] О.В.Герман, Д.В. Семерюк. Одна полиномиально разрешимая задача синтеза поведения интеллектуального робота. – Автоматика и телемеханика (Москва), 2001, №2, с.с. 15- 24.
- [2] О.В. Герман, Д.В.Занько. Синтез управляющего алгоритма в системе производственных правил с временным параметром. – Автоматика и телемеханика (Москва), 2003, № 5. – с.с. 41-52.
- [3] Д. Бохманн, Х.Постхоф. Двоичные динамические системы. М., Энергоатомиздат, 1986, – 400с.
- [4] Э.В.Попов, Г.Р. Фирдман. Алгоритмические основы интеллектуальных роботов и искусственного интеллекта. М.,Наука, 1976, – с.456.