

ТЕХНОЛОГИИ

УДК 629.7.051.001

**ПРИМЕНЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНОГО РЕГУЛЯТОРА В СИСТЕМЕ
ФАЗОВОГО УПРАВЛЕНИЯ**

А.А. ЛОБАТЫЙ, М.В. ПОЧЕБУТ

*Белорусский национальный технический университет
Независимости, 65, Минск, 220013, Беларусь**Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П.Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 21 апреля 2009*

Рассматривается методика построения робастной системы фазового управления с применением анизотропийного регулятора. Путем математического моделирования получены коэффициенты оптимального регулятора.

Ключевые слова: анизотропийный регулятор, критерий оптимальности, стохастическая система.

Введение

Системы фазового управления (СФУ) играют значительную роль в различных областях науки и техники; развитию теории фазового управления посвящен ряд работ [1]. При решении конкретных задач оптимальные СФУ являются чувствительными к параметрам модели реального объекта и иногда теряют не только оптимальность, но и работоспособность в тех случаях, когда априорная информация об объекте и внешней среде известна не точно. Задачи синтеза регулятора и оценивания состояния с учетом неопределенности в модели объекта и характеристиках входных воздействий являются одними из центральных в современной теории автоматического управления. Новым направлением развития систем управления, в том числе и СФУ, является применение в задачах синтеза теории робастного управления, основная идея которой состоит в том, чтобы единственным регулятором обеспечить устойчивость системы не только для номинального (без учета ошибок модели) объекта, но и для любого реального объекта с учетом неопределенности наших знаний о параметрах объекта управления и возмущениях.

Представляет интерес рассмотрение в качестве критерия оптимальности СФУ H_∞ -нормы многомерной передаточной функции замкнутой системы [2], представляющей собой энергию выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией. При этом, если выходом является ошибка, а входом возмущение, то минимизируя H_∞ -норму мы минимизируем энергию ошибки для наихудшего случая входного возмущения.

Стохастический подход к H_∞ -оптимизации систем автоматического управления основан на использовании критерия качества стохастической нормы системы, которая количественно характеризует чувствительность выхода системы к случайным входным возмущениям, вероятностное распределение которых известно не точно. Это приводит к специальному варианту стохастической нормы – анизотропийной норме [3]. Анизотропийная норма системы характеризует ее чувствительность к входным гауссовым шумам, средняя анизотропия которых ограничена сверху неким неотрицательным параметром α .

Теоретический анализ

Рассмотрим дискретную СФУ [4], в состав которой входит оптимальный регулятор с передаточной функцией $W_{кy}$, задачей которого является изменение фазовых координат управляемого элемента с передаточной функцией $W_{yз}$ в соответствии с заданным критерием качества. Обобщенная структурная схема такой СФУ имеет вид:

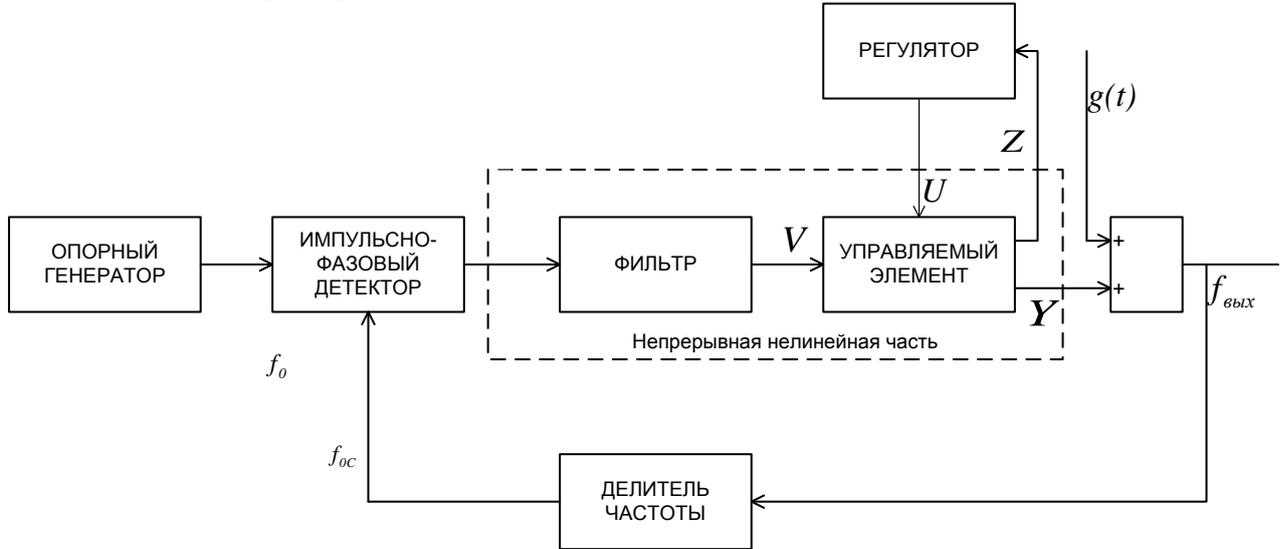


Рис.1. Обобщенная структурная схема ДСФУ

В соответствии с рис.1 и методикой получения дискретных моделей систем с фазовым управлением в общем случае управляемый элемент с регулятором в пространстве состояний описывается рекуррентными векторно-матричными выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}_1\mathbf{V}_k + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_k, \\ \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_k + \mathbf{D}_{11}\mathbf{V}_k + \mathbf{D}_{12}\mathbf{U}_k, \\ \mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{C}_2\mathbf{X}_k + \mathbf{D}_{21}\mathbf{V}_k, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{X} – n -мерный вектор внутреннего состояния управляемого элемента; \mathbf{V} – m_1 -мерный вектор выходного сигнала фильтра; \mathbf{Y} – p_1 -мерный вектор выходного управляемого сигнала; \mathbf{Z} – p_2 -мерный вектор наблюдения; \mathbf{U} – m_2 -мерный вектор управления, $\mathbf{A}, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_j, \mathbf{D}_{ij}$ ($i, j = \overline{1, 2}$) – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть $W_{кy}$ – допустимый регулятор, имеющий h -мерное внутреннее состояние (матрицу \mathbf{H}), связанное с сигналами наблюдения \mathbf{Z} и управления \mathbf{U} рекуррентными формулами

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{k+1} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{H}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}_k, \\ \mathbf{U}_k = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{H}_k \end{cases} \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ – неизвестные постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Задача состоит в определении матриц $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$, описывающих оператор $W_{кy}$ в пространстве состояний, таких, что минимизируется α – анизотропийная норма замкнутой системы $\Phi(W, W_{кy})$, описываемой выражениями (1) и (2). Формула для вычисления α анизотропийной нормы системы (1)-(2) имеет вид [2]:

$$\|\alpha(W, W_{ky})\| = \left\{ \frac{1}{q} \left[I - \frac{m_1}{\text{tr}\{\mathbf{LPL}^T + \mathbf{S}\}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Для вычисления (3) необходимо решить три алгебраических матричных уравнения Риккати

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{A}} + q \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}, \\ \boldsymbol{\Sigma} \equiv \left[\mathbf{I}_{m_1} - q \mathbf{D}_{11}^T \mathbf{D}_{11} - \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{B}} \right]^{-1}, \\ \mathbf{L} \equiv [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2] \equiv \boldsymbol{\Sigma} \left[\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{A}} + q \mathbf{D}_{11}^T \bar{\mathbf{C}} \right], \end{cases} \quad (4)$$

где q - скалярный параметр, принимающий значения из полуоткрытого интервала $[0; \|\alpha(W, W_{ky})\|_{\infty}^{-2}]$, а матрица \mathbf{L} разбита на блоки $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$.

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{L}_1] \cdot \mathbf{S} \cdot [\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{L}_1]^T + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}_1^T - \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda}^T, \\ \boldsymbol{\Theta} \equiv [\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{L}_1] \cdot \mathbf{S} \cdot [\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{L}_1]^T + \mathbf{D}_{21} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}_{21}^T, \\ \boldsymbol{\Lambda} \equiv \left[[\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{L}_1] \cdot \mathbf{S} \cdot [\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{L}_1]^T + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}_{21}^T \right] \boldsymbol{\Theta}^{-1}. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{C}}^T \underline{\mathbf{C}} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Pi} \mathbf{N}, \\ \boldsymbol{\Pi} \equiv \underline{\mathbf{B}}^T \mathbf{T} \underline{\mathbf{B}} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12}, \\ \mathbf{N} \equiv [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \equiv -\boldsymbol{\Pi}^{-1} \left(\underline{\mathbf{B}}^T \mathbf{T} \underline{\mathbf{A}} + \mathbf{D}_{12}^T \underline{\mathbf{C}} \right), \end{cases} \quad (6)$$

где матрица \mathbf{N} разбита на блоки $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, а матрицы $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{C}} & * \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{M} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{M} + \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} \mathbf{M} & * \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2.$$

Искомые матрицы $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ оптимального анизотропийного H_{∞} -регулятора вычисляются по формулам [2]

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}} + [\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Lambda}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Lambda}, \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2. \end{cases} \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ - матрицы реализации допустимого регулятора, \mathbf{I}_n - единичная матрица ($n \times n$).

Если возмущения, действующие на СФУ, считать белым шумом, то выражения для вычисления оптимального регулятора в пространстве состояний упрощаются и имеют вид

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{N} - \mathbf{A} \mathbf{C}_2, \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}, \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{N}, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{A} \mathbf{\Theta} \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{\Theta} = \mathbf{C}_2 \mathbf{S} \mathbf{C}_2^T + \mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T, \\ \mathbf{A} \mathbf{\Theta} = [\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{C}_2^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T] \mathbf{\Theta}^{-1}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{N}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{N}, \\ \mathbf{\Pi} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{T} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12}, \\ \mathbf{N} = -\mathbf{\Pi}^{-1} [\mathbf{B}_2^T \mathbf{T} \mathbf{A} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1] \end{cases} \quad (10)$$

(при этом матрицы $\mathbf{A} - \hat{\mathbf{B}} \mathbf{C}_2$ и $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}}$ асимптотически устойчивы).

Выражения (8)-(10) соответствуют нулевой средней анизотропии $\alpha=0$ и представляют собой H_2 - оптимальный регулятор.

Применение H_2 или H_∞ - регулятора обусловлено типом действующих на систему шумов. Так H_2 - оптимальный плохо функционирует, если на входе системы сильно окрашенный случайный шум. H_∞ - регулятор проявляет консервативность (излишнюю перестраховочность) если входной сигнал белый шум или слабо окрашенный шум.

Экспериментальная часть

Для расчета коэффициентов оптимального регулятора управляемого элемента СФУ, описываемого системой

$$\begin{cases} x_{k+1} = a x_k + b_1 v_k + b_2 u_k, \\ y_{k+1} = c_1 x_k + d_{11} v_k + d_{12} u_k, \\ z_{k+1} = c_2 x_k + d_{21} v_k, \end{cases}$$

при следующих коэффициентах

$$a = -0,03, \quad b_1 = 0,02, \quad b_2 = 1, \quad c_1 = -0,03, \quad d_{11} = 0,02, \quad d_{12} = 1, \quad c_2 = d_{21} = 1$$

необходимо учитывать рекуррентные выражения (2), которые в данном случае имеют вид $u_k = \hat{\mathbf{c}} \mathbf{N}_{k+1}$ и $\mathbf{N}_{k+1} = \hat{\mathbf{a}} \mathbf{N}_k + \hat{\mathbf{b}} \mathbf{Z}_k$. В соответствии с (8)-(10), путем последовательных вычислений; искомые коэффициенты оптимального регулятора принимают следующие значения: $\hat{\mathbf{a}} = -0,108$, $\hat{\mathbf{b}} = 0,018$, $\hat{\mathbf{c}} = 0,06$.

Заключение

Применение анизотропных регуляторов в СФУ является перспективным, т.к. позволит снизить влияние на качество работы системы неопределенностей, обусловленных различиями между выбранной математической моделью и реальной оптимизируемой системой.

APPLICATION OF ANISOTROPY REGULATOR IN SYSTEM OF PHASE CONTROL

A.A. LOBATY, M.V. POSHEBUT

Abstract

The method of construction the robust system of phase control is examined with the use of anisotropy regulator. The coefficients of optimum regulator are got by a mathematical design.

Литература

1. *Батура М.П.* Дискретные системы с фазовым управлением. Минск, 2002.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.5.: Методы современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егулова. М., 2004.
3. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* // Автоматика и телемеханика. 1999. №3.
4. *Бусько В.Л., Лобатый А.А., Русак Л.В.* Анализ вероятностных характеристик дискретных систем фазового управления.// Докл. БГУИР. 2008. №8. С. 93-99.