

УДК 517.938

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОРТАЛЬНЫХ КРАНОВ

А.П. КУЗНЕЦОВ, А.В. МАРКОВ, А.С. ШМАРЛОВСКИЙ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 30 апреля 2009*

Получены математические модели поведения грузов при их транспортировке порталными кранами. Рассмотрены случаи перемещения груза в двух- и трехмерном пространстве. Проведена линеаризация полученных математических моделей. Составлены структурные схемы и передаточные функции порталных кранов как объектов управления.

Ключевые слова: кран, математические модели, порталный кран.

Введение

Подъемные краны широко используются для транспортировки грузов в промышленности, на строительных площадках, складах и в портах. Подъемные краны различаются по конфигурации рабочей зоны, виду перемещаемых грузов и точности позиционирования. В зависимости от требований по данным характеристикам существуют различные типы конструкций кранов.

Для перемещения тяжелых грузов чаще используют порталные (козловые) краны. Одним из самых распространенных кранов такой конструкции является контейнерный кран. В большинстве случаев порталные краны характеризуются низким сопротивлением к скручивающим нагрузкам на конструкцию (прочностью при кручении). При разработке электроприводов и управляющего оборудования следует учитывать высокую вероятность возникновения вибраций механических конструкций, которые необходимо будет компенсировать соответствующими алгоритмами управления. Одним из примеров массового применения порталных кранов является технологический процесс производства железобетона, где необходимо осуществлять транспортировку полуфабриката между различными производственными комплексами. Конструкция порталного крана предполагает наличие специальной тележки с прямолинейным движением по направляющим рельсам и троса, с помощью которого полезный груз крепится к тележке. Портальный кран может передвигаться по рельсам, это позволяет осуществить транспортировку груза в любую точку трехмерного пространства в пределах рабочей зоны крана.

Мостовой кран является подвидом порталного крана с ограниченными по высоте боковыми несущими элементами. Он состоит только из одного моста, с обоих концов которого расположены поперечные балки, перемещающиеся по рельсовым путям в продольном направлении. Мостовой кран — основной тип кранов, применяемых на промышленных предприятиях. Рельсы, по которым перемещается кран, обычно размещают в крытых цехах. Устойчивость мостового крана существенно выше по сравнению с порталным краном. Это снижает требования к запасу по номинальным характеристикам электроприводов.

Портально-поворотные краны чаще всего применяются в портах для загрузки кораблей, а также в качестве погрузочных кранов на железных дорогах. Часть требуемого диапазона

перемещения в такой конструкции покрывается радиусом вращения и длиной консольной части. Преимущества портално-поворотного крана заключаются в относительно большой рабочей зоне при меньшей занимаемой площади. Такая конструкция также обеспечивает большую высоту подъема по сравнению с обычными порталными кранами, что позволяет преодолевать различные преграды и препятствия.

Экспериментальные исследования показывают, что даже прямолинейное движение тележки сопровождается вибрационными процессами, такими как качание полезного груза, циклическое изменение линейной скорости тележки, колебание механических элементов крана и т.д. Эти процессы вызваны взаимодействием механизмов крана и качающегося груза и влияют на нагрузки в элементах машины, точность позиционирования, длительность транспортировки и безопасность эксплуатации. Ошибки управления подъемным краном могут привести к непоправимым последствиям. Система управления порталным краном должна обеспечить не только быстрое перемещение тележки в заданное положение, но и подавить колебания груза в конечной точке. Рост требований к надежности и производительности с одной стороны и точности позиционирования с другой, предъявляют жесткие требования к системам управления [1–5]. Качество функционирования во многом зависит от применяемых математических моделей поведения грузов при их транспортировке и алгоритмов управления. При этом, как правило, чем точнее используемая модель, тем сложнее система управления.

Подъемный кран с двумя степенями свободы движения груза

Подвижная часть подъемного крана представляет собой двухмассовую систему маятникового типа, состоящую из тележки и гибкой подвески рабочего органа с грузом (рис. 1).

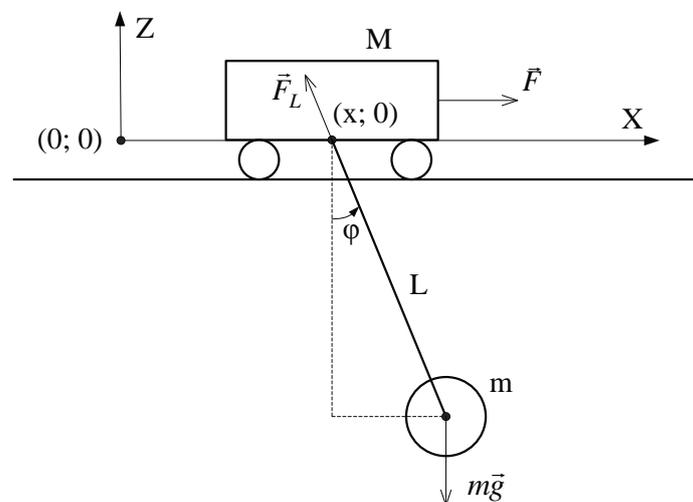


Рис. 1. Подъемно-транспортный механизм с двумя степенями свободы перемещаемого груза: L — длина троса; M — масса тележки; m — масса груза; φ — угол отклонения груза; x — расстояние от центра оси до точки подвеса груза; F — сила, действующая на тележку; F_L — сила, действующая на трос с грузом со стороны электропривода подъема

Для данного случая радиус-векторы тележки и груза

$$\vec{r}_M = \{x; 0\}, \quad (1)$$

$$\vec{r}_m = \{x + L \sin \varphi; -L \cos \varphi\}. \quad (2)$$

Вектор силы, действующей на тележку

$$\vec{F} = \{F_x; 0\},$$

где F_x — сила, действующая на тележку по оси X .

В общем случае

$$F_x = F_{\mathcal{E}} + (mg \cos \varphi - F_L) \sin \varphi,$$

где $F_{\mathcal{E}}$ — сила, с которой скоростной электропривод действует на тележку.

Если длина троса не изменяется, то $F_L = mg \cos \varphi$. Следует учитывать, что величины $F_{\mathcal{E}}$ и F_L имеют ограничения, обусловленные гибкой подвеской груза.

Полная кинетическая энергия T и полная потенциальная энергия V системы:

$$T = \frac{m}{2} \vec{r}_m \dot{\vec{r}}_m + \frac{M}{2} \vec{r}_M \dot{\vec{r}}_M, \quad (3)$$

$$V = (F_L \cos \varphi - mg)L \cos \varphi. \quad (4)$$

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Для получения математического описания объекта управления можно воспользоваться как механикой Ньютона, так и уравнениями Эйлера–Лагранжа. С практической точки зрения второй путь гораздо легче, потому что в этом случае соответствующие обобщенные координаты q_i могут быть выбраны с учетом симметрий рассматриваемой двухмассовой системы. Уравнения Лагранжа второго рода для координат q_1 и q_2 масс M и m имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где ℓ — функция Лагранжа (лагранжиан) для данной системы.

Подставляя выражения (1) и (2) в формулы (3) и (4), получим следующее выражение для функции Лагранжа данной системы:

$$\ell = T - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{L}^2 + L^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{L} \sin \varphi + 2\dot{x}L\dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{M}{2} \dot{x}^2 + mgL \cos \varphi - F_L L \cos^2 \varphi. \quad (6)$$

Выберем в качестве одной обобщенной координаты положение тележки, а в качестве второй — угол отклонения φ радиус-вектора \vec{r}_m , направленного к центру массы груза, от вектора силы тяжести $M\vec{g}$. Подставляя функцию Лагранжа (6) в уравнения (5), где $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$, а $F_1 = F_x$, $F_2 = 0$, и выполняя дифференцирование, получим систему двух нелинейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + mL(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + m\ddot{L} \sin \varphi + 2m\dot{L}\dot{\varphi} \cos \varphi = F_x; \\ 2\dot{L}\dot{\varphi} + L\ddot{\varphi} + g \sin \varphi + \ddot{x} \cos \varphi - 2\frac{F_L}{m} \cos \varphi \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Для составления математической модели портального крана на ЭВМ данную систему уравнений целесообразно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_x + m \sin \varphi (L\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi - \ddot{L}) - 2F_L \cos^2 \varphi \sin \varphi}{M + m \sin^2 \varphi} \\ \ddot{\varphi} = \frac{-1}{L} (\ddot{x} \cos \varphi + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g \sin \varphi - 2\frac{F_L}{m} \cos \varphi \sin \varphi) \end{cases} \quad (7)$$

Из первого уравнения системы уравнений (7), при условии управления ускорением тележки $F_x = M\ddot{x}$, можно получить выражение для \ddot{L} :

$$\ddot{L} = L\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi - 2\frac{F_L}{m} \cos^2 \varphi. \quad (8)$$

Данное выражение характеризует влияние двухмассовой системы на электропривод подъема груза и показывает, что для поддержания постоянного ускорения \ddot{L} или, в частном случае, постоянной скорости ($\ddot{L} = 0$) электропривод должен изменять силу подъема по нелинейному закону. Следует принять во внимание и то, что проекция на ось Z этой силы при $\varphi < 90^\circ$ не может иметь отрицательную величину. По этой причине увеличение длины троса должно осуществляться только под действием внешних сил, поскольку в противном случае при неблагоприятном состоянии системы тележка/груз может возникнуть падение (провал) груза по причине отсутствия натяжения троса из-за слишком быстрого разматывания последнего электроприводом. Выражение (8) накладывает ограничения на максимальную величину ускорения разматывания в конкретный момент времени. Однако в большинстве систем с высокой грузоподъемностью это обстоятельство не имеет особого значения, так как слагаемое $g \cos \varphi$ в уравнении (8) существенно превосходит все остальные слагаемые даже в самом неблагоприятном случае.

Если во время движения тележки длина подвеса остается постоянной, система уравнений (7) упрощается:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_x + m \sin \varphi (L \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)}{M + m \sin^2 \varphi}; \\ \ddot{\varphi} = \frac{-1}{L} (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi). \end{cases}$$

Поднимать груз во время его перемещения необходимо в основном только для того, чтобы избежать препятствий. Подъем обычно является медленным, а следовательно, изменения длины троса можно рассматривать как возмущения в системе. В этом случае полученной упрощенной системой уравнений можно пользоваться и при небольших скоростях изменения длины троса. Для малых углов колебаний при условии $\dot{L} \approx 0$ систему уравнений (7) вообще можно линеаризовать:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -L \ddot{\varphi} - g \varphi; \\ \ddot{\varphi} = \frac{-F_x - (M + m)g \varphi}{ML}. \end{cases}$$

Линеаризованная структурная схема системы тележка/груз представлена на рис. 2.

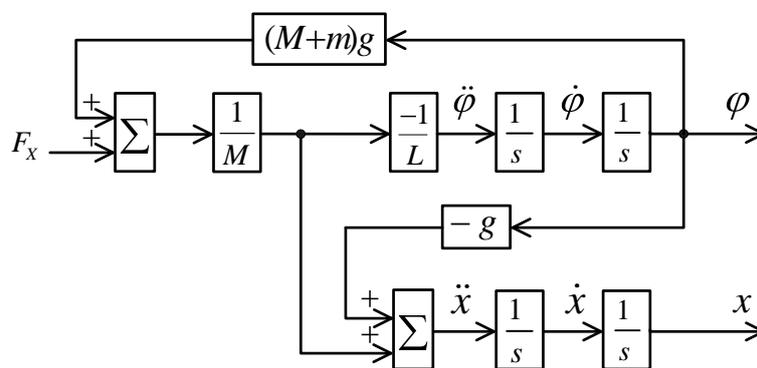


Рис. 2. Линеаризованная структурная схема портального крана с одной степенью свободы перемещаемого груза

Если в модели не используются сигналы производных x и φ , данную структурную схему можно упростить (рис. 3).

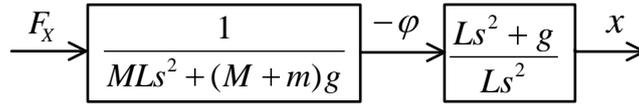


Рис. 3. Линеаризованная структурная схема портального крана

Подъемный кран с тремя степенями свободы движения груза

Большое количество промышленных мостовых и козловых кранов может перемещать груз с тремя степенями свободы, достигаемыми перемещением тележки в продольном направлении перемещением всего крана или его мостовой части в поперечном направлении и подъемом/опусканием груза. Этот случай представлен на рис. 4.

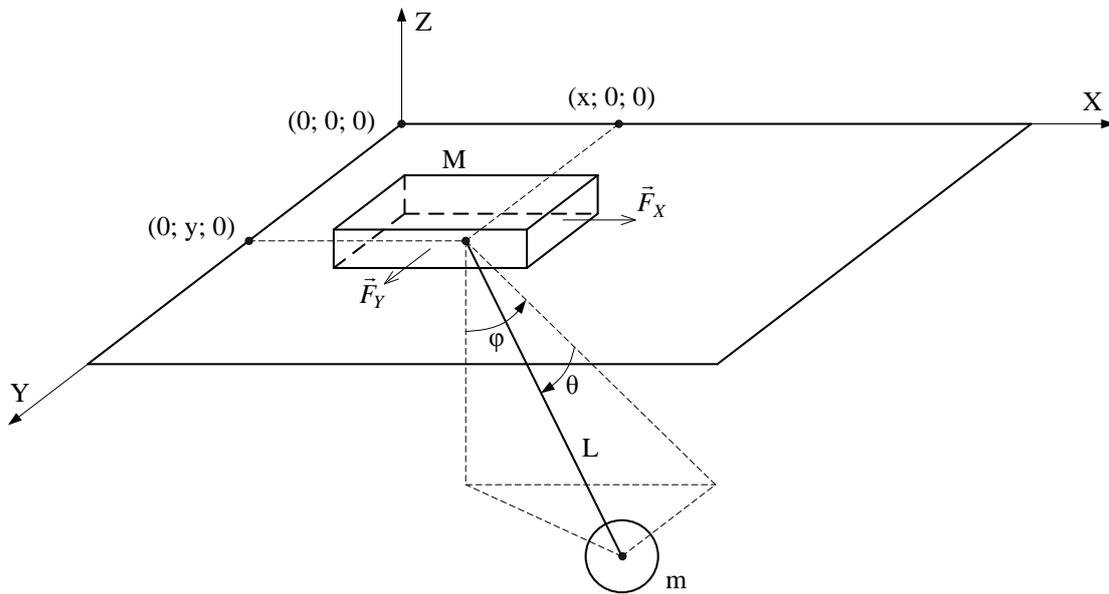


Рис. 4. Подъемно-транспортный механизм с тремя степенями свободы полезного груза: φ, θ — углы отклонения груза; x, y — координаты положения тележки; F_x, F_y — силы, действующие на тележку по соответствующим осям

В качестве углов отклонения груза выбраны два смежных угла, поскольку это значительно облегчает дальнейшие расчеты. Радиус-векторы тележки и груза в данном случае

$$\vec{r}_M = \{x; y; 0\}, \quad \vec{r}_m = \{x + L \sin \varphi \cos \theta; y + L \sin \varphi \sin \theta; -L \cos \varphi \cos \theta\}.$$

Вектор силы, действующей на тележку, $\vec{F} = \{F_x; F_y; 0\}$.

Полная кинетическая и полная потенциальная энергии системы без учета влияния привода подъема соответственно равны:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_m \cdot \dot{\vec{r}}_m + \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}_M \cdot \dot{\vec{r}}_M,$$

$$V = -mgL \cos \varphi \cos \theta.$$

Тогда Лагранжиан двухмассовой системы

$$\begin{aligned} \ell = & \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{L}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + m\dot{x}L \sin \varphi \cos \theta + m\dot{x}L \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \\ & - m\dot{x}L \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta + m\dot{y}L \sin \theta + m\dot{y}L \dot{\theta} \cos \theta + \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgL \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы получить математическое описание объекта управления, воспользуемся, как и в рассмотренном выше случае, уравнениями Лагранжа второго рода (5) только уже для четырех координат:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial q_i} = F_i. \quad (10)$$

Выберем в качестве первой пары обобщенных координат координаты положения тележки: $q_1=x$, $q_2=y$, а в качестве второй пары — соответствующие углы отклонения груза: $q_3=\varphi$, $q_4=\theta$. Подставляя функцию Лагранжа (9) в уравнение (10) при $i=1, 2, 3, 4$ и $F_1=F_x$, $F_2=F_y$, $F_3=F_4=0$, и выполняя дифференцирование, получим систему четырех нелинейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m(\ddot{L} - L\dot{\varphi}^2 - L\dot{\theta}^2) \sin \varphi \cos \theta + m(L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi}) \cos \varphi \cos \theta - \\ - m(L\ddot{\theta} + 2\dot{L}\dot{\theta}) \sin \varphi \sin \theta - 2mL\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta = F_x; \\ (m+M)\ddot{y} + mL(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + m\ddot{L} \sin \theta + 2m\dot{L}\dot{\theta} \cos \theta = F_y \\ (2\dot{L}\dot{\varphi} + L\ddot{\varphi}) \cos \theta - 2L\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0; \\ 2\dot{L}\dot{\theta} + L\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \varphi \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + L\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + g \cos \varphi \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из данной системы уравнений следует, что при одновременном управлении краном по двум осям движение в продольном направлении влияет на характер движения в поперечном и наоборот. Движение в двух направлениях одновременно вызывает как раскачивание груза, так и его вращательное движение относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса и положение равновесия груза. Это следует учитывать при разработке системы управления порталным краном. В случае постоянства длины троса система уравнений (11) немного упрощается:

$$\begin{cases} \frac{(M+m)}{m} \ddot{x} - (L\dot{\varphi}^2 + L\dot{\theta}^2) \sin \varphi \cos \theta + L\ddot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - L\ddot{\theta} \sin \varphi \sin \theta - \\ - 2L\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta = \frac{F_x}{m}; \\ (m+M)\ddot{y} + mL(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F_y; \\ L\ddot{\varphi} \cos \theta - 2L\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0; \\ L\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \varphi \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + L\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + g \cos \varphi \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Для малых углов колебаний при условии $L = \text{const}$ можно провести линеаризацию системы уравнений (11):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -L\ddot{\varphi} - g\varphi; \\ \ddot{\varphi} = \frac{-F_x - (M+m)g\varphi}{ML}; \\ \ddot{y} = -L\ddot{\theta} - g\theta; \\ \ddot{\theta} = \frac{-F_y - (M+m)g\theta}{ML}. \end{cases}$$

Из последней системы уравнений следует, что при линеаризации математическая модель порталного крана утрачивает перекрестные связи и теперь движение в двух направлениях может быть разделено на два независимых движения в одном направлении. В этом случае система полностью описывается передаточными функциями по углу

$$F_{\varphi F_x} = F_{\theta F_y} = \frac{-1}{MLs^2 + (M + m)g} \quad (12)$$

и положению

$$F_{x F_x} = F_{y F_y} = \frac{Ls^2 + g}{ML^2s^4 + (M + m)MLgs^2} \quad (13)$$

Особенности построения систем управления порталным краном

Системы управления подъемными кранами обычно являются многозадачными. Они должны быть быстродействующими, точными и робастными. Система управления должна переместить груз с максимально возможной скоростью, во время транспортировки минимизировать колебания груза и полностью подавить их в месте остановки. Также должны быть учтены возможные изменения параметров системы, такие как длина троса и вес груза. При разработке системы управления должны учитываться и вопросы практической реализации: мощность управляющего воздействия, максимальные ускорения и скорости и др. Чтобы исключить возможность столкновений с препятствиями, груз не должен выходить при транспортировке за пределы заданного коридора.

Система управления процессом перемещения груза может быть как разомкнутой [1, 2], так и замкнутой [3, 4]. Разомкнутое управление характеризуется большей чувствительностью к изменениям параметров и возмущениям. При создании замкнутой системы управления возникает необходимость в соответствующих датчиках. Информацию о положении и скорости тележки обычно получают из системы управления электроприводом тележки. Сложнее получить информацию об угле отклонения груза. Можно использовать датчик технического зрения, однако недостатками видеосистемы являются сложность обслуживания и высокая стоимость [5]. При известной длине троса оценить угол отклонения можно по электромагнитному вращающему моменту и угловой скорости двигателя тележки. Иными словами, в структуру системы управления необходимо включить наблюдатель динамической нагрузки.

Качество управления во многом определяется точностью используемых математических моделей. Особенно это актуально при проектировании разомкнутой системы управления. Полученные в данной работе модели можно использовать при синтезе структуры системы управления, а также при моделировании и проверке ее работоспособности с учетом неизбежных на практике вариаций параметров, например, изменение неизмеряемых длины подвеса и/или массы груза.

Заключение

Динамическое поведение порталного крана имеет нелинейные особенности. Подъемный кран в общем случае представляет собой нестационарный объект, особенно при изменении длины троса. Полученные математические модели порталных кранов могут быть использованы как для моделирования процесса раскачивания груза при его перемещении в двухмерном и трехмерном пространствах, так и для разработки системы управления, позволяющей компенсировать данные колебания. В случае, когда не допускается большая амплитуда колебаний, а скорость изменения длины подвеса небольшая, при проектировании системы управления можно воспользоваться передаточными функциями (12) и (13), учитывая изменение длины троса во время транспортировки.

MATHEMATICAL MODELS OF GANTRY CRANES

A.P. KUZNETSOV, A.V. MARKOV, A.S. SHMARLOUSKI

Abstract

Mathematical models of gantry cranes are gained to transfer the load both in two-dimensional and in three-dimensional space. The gained mathematical models also are linearized. Structure charts and transfer functions for cranes are constructed.

Литература

1. *Manson G.A.* // Optimal Control Applications & Methods. 1982. Vol. 3. No. 2. P. 115–120.
2. *Auernig J.W., Troger H.* // International Federation of the Automatic control. Automatica. 1987. Vol. 23. No. 4. P. 437–447.
3. *Ridout A.J.* // J. of Electrical and Electronics Engineering. 1989. Vol. 9. No. 1/2. P. 17–26.
4. *Omar H.M.* Control of gantry and tower cranes. PhD Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. 2003.
5. *Kim Y.S., Yoshihara H., Fujioka N., et al.* // Industry Applications Conference. 2003. Vol. 1. P. 262–269.