ИНФОРМАТИКА

УДК 517.977

К ПРОИЗВОДНЫМ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Л.И. МИНЧЕНКО, А.А. ВОЛОСЕВИЧ, С.И. СИРОТКО, А.Н. ТАРАКАНОВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 10 сентября 2009

Рассматривается подход, основанный на развитии метода аппроксимаций первого порядка В.Ф. Демьянова и А.М. Рубинова, и позволяющий исследовать производные функции оптимального значения в параметрических задачах оптимизации с неединственным решением.

Ключевые слова: оптимизация, многозначные отображения, псевдолипшицевость отображений.

Введение

Пусть $f(x,y)$, $h_i(x,y)$ $i=1,...,p$ — непрерывно дифференцируемые функции из $R^n \times R^m$ в R. Рассмотрим параметрическую задачу $P(x)$ минимизации функции $f(x,y)$ по переменной y на множестве $F(x)$, где $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0 \;\; i \in I,\; h_j(x,y) = 0 \;\; j \in I_0\}$, $x \in R^n$, $I = \{1,...,s\}$, $I_0 = \{s+1,...,p\}$ или $I_0 = \varnothing$.

Обозначим через $\varphi(x)$ функцию оптимального значения, т.е. $\varphi(x) = \inf\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$, и через $\omega(x)$ множество оптимальных решений задачи $P(x)$:

$$\omega(x) = \{y \in F(x) \mid f(x,y) = \varphi(x)\}.$$

В данной задаче F — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in R^n$ замкнутое множество $F(x) \subset R^m$. Будем везде в дальнейшем считать, что многозначное отображение F равномерно ограниченно в окрестности точки $x_0 \in domF$, т.е. существуют окрестность X_0 точки x_0 и компакт $Y_0 \subset R^m$ такие, что $F(X_0) \subset Y_0$.

Пусть $\bar{x} \in R^n$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n$, $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Для функции оптимального значения $\varphi(x)$, наряду с производной по направлению $\bar{x}$ в точке x_0: $\varphi'(x_0;\bar{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0))$, введем производную второго порядка в точке x_0 по направлениям $\bar{x}_1, \bar{x}_2$:

$$\varphi''(x_0;\bar{x}_1,\, \bar{x}_2) = \lim_{t \downarrow 0} 2t^{-2}(\varphi(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2\bar{x}_2) - \varphi(x_0) - t\varphi'(x_0;\bar{x}_1)).$$

Производные по направлениям функции оптимального значения используются в исследовании устойчивости и чувствительности экстремальных задач и их решении относительно возмущений параметров, построении алгоритмов решения минимаксных задач, в развитии квазидифференциального исчисления и в его приложениях. Вычислению производных по направлениям функции оптимального значения $\varphi(x)$ посвящены многочисленные работы [1–6].

Целью статьи является получение достаточных условий дифференцируемости функции оптимального значения по направлениям.

Введем понятия и обозначения, необходимые для вывода и формулировки результатов. Пусть $z=(x,y)$, $z_0=(x_0,y_0)$. Для задачи $P(x)$ введем функцию Лагранжа $L(z,\lambda)=f(z)+\langle\lambda,h(z)\rangle$, где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_p)$, $h=(h_1,...,h_p)$.

Обозначим через $\Lambda(z)=\{\lambda\in R^p \mid \nabla_x L(z,\lambda)=0,\ \lambda_i\geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z)=0,\ i\in I\}$ множество множителей Лагранжа и через $I(z)=\{i\in I \mid h_i(z)=0\}$ множество индексов активных ограничений в точке $z=(x,y)\in gr\,F$.

Пусть $\rho(x,C)=\inf\limits_{y\in C}\|x-y\|$, где $\|y\|$ — евклидова норма вектора y, B — открытый единичный шар с центром в нуле в соответствующем пространстве.

Определение ([7]). *Будем говорить, что многозначное отображение* F R*-регулярно в точке* $z_0=(x_0,y_0)$, *если найдутся числа* $\alpha>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ *такие, что* $\rho(y,F(x))\leq\alpha\max\{0,\ h_i(x,y)\ i\in I,\ |h_j(x,y)|\ j\in I_0\}$ *для всех* $x\in x_0+\delta_1 B$, $y\in y_0+\delta_2 B$.

Отметим, что достаточным условиям R-регулярности (во многих работах именуемой *error bound property*) посвящена обширная литература [8].

Определение. *Многозначное отображение* F *будем называть псевдолипшицевым сверху в точке* $z_0=(x_0,y_0)\in gr\,F$, *если существуют окрестности* $V(x_0)$ *и* $V(y_0)$ *точек* x_0 *и* y_0 *и постоянная* $l>0$ *такие, что* $F(x)\cap V(y_0)\subset F(x_0)+l|x-x_0|B$ *для всех* $x\in V(x_0)$.

Понятие псевдолипшицевости сверху играет важную роль в многозначном и негладком анализе. В ряде современных работ для псевдолипшицевости сверху употребляется термин *calmness* [9].

Производные первого и второго порядка

Пусть $z_0=(x_0,y_0)\in gr\,F$, $\bar z=(\bar x,\bar y)$. Рассмотрим множество $\Gamma(z_0;\bar x)=$
$=\{\bar y\in R^m \mid \langle\nabla h_i(z_0),\bar z\rangle\leq 0\ i\in I(z_0),\ \langle\nabla h_i(z_0),\bar z\rangle=0\ i\in I_0\}$.

Полагая $\bar z_1=(\bar x_1,\bar y_1)$, $\bar z_2=(\bar x_2,\bar y_2)$, $I^2(z_0,\bar z_1)=\{i\in I(z_0) \mid \langle\nabla h_i(z_0),\bar z_1\rangle=0\}$, где $\bar y_1\in\Gamma(z_0;\bar x_1)$, введем множество $\Gamma^2(z_0,\bar z_1;\bar x_2)=\{\bar y_2\in R^m \mid \langle\nabla h_i(z_0),\bar z_2\rangle+$

$$\langle\nabla h_i(z_0),\bar z_2\rangle+\frac{1}{2}\langle\bar z_1,\nabla^2 h_i(z_0)\bar z_1\rangle=0\ i\in I_0\}.\ \langle\nabla h_i(z_0),\bar z_2\rangle+\frac{1}{2}\langle\bar z_1,\nabla^2 h_i(z_0)\bar z_1\rangle=0\quad i\in I_0\}.$$

Пусть
$\Gamma^*(z_0;\bar x_1)=\{\bar y_1\in\Gamma(z_0;\bar x_1) \mid \langle\nabla f(z_0),(\bar x_1,\bar y_1)\rangle=\min\limits_{\bar y\in\Gamma(z_0;\bar x_1)}\langle\nabla f(z_0),(\bar x_1,\bar y)\rangle\}$, $\Phi(z_0,\bar z_1,\bar z_2)=$

$$=\langle\nabla f(z_0),\bar z_2\rangle+\frac{1}{2}\langle\bar z_1,\nabla^2 f(z_0)\bar z_1\rangle,\ \Lambda^2(z_0;\bar x)=\{\lambda\in\Lambda(z_0) \mid \langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\bar x\rangle=\max_{\lambda\in\Lambda(z_0)}\langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\bar x\rangle\}.$$

Лемма 1. *Пусть многозначное отображение* F R*-регулярно в точке* $z_0=(x_0,y_0)\in gr\,\omega$. *Тогда при* $\bar x\in R^n$ *для* $t_k\downarrow 0$ *и любых последовательностей* $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{y_{0k}\}$ *таких, что* $x_k=x_0+t_k\bar x+o(t_k)$, $y_k\in\omega(x_k)$, $y_{0k}\in\omega(x_0)$, $|y_{0k}-y_k|\leq M|x_0-x_k|$, $M=\text{const}>0$ *при всех* $k=1,2,...$ *и* $y_k\to y_0\in\omega(x_0)$ *справедливы, начиная с некоторого значения* $k=k_0$, *разложения* $y_k=y_{0k}+t_k\bar y_{1k}+o(t_k)$, $\varphi(x_k)-\varphi(x_0)=t_k\langle\nabla f(z_{0k}),\bar z_{1k}\rangle+o(t_k)$, *где* $z_{0k}=(x_0,y_{0k})$, $\bar z_{1k}=(\bar x,\bar y_{1k})$, $\{\bar y_{1k}\}$ *— ограниченная последовательность такая, что* $\bar y_{1k}\in\Gamma(z_{0k};\bar x)$.

Доказательство. *В силу условий леммы для последовательностей* $y_k\in\omega(x_k)$, $k=1,2,...$ *и* $y_{0k}\in\omega(x_0)$, $k=1,2,...$ *найдется ограниченная последовательность* $\{v_k\}$ *такая, что*

$y_k - y_{0k} = t_k v_k$, $k = 1,2,...$ *Полагая* $z_k = (x_k, y_k)$, $z_{0k} = (x_0, y_{0k})$, *имеем* $h_i(z_k) - h_i(z_{0k}) \le 0$ *для всех* $i \in I(z_{0k})$ *и* $h_i(z_k) - h_i(z_{0k}) = 0$ *для всех* $i \in I_0$. *Откуда нетрудно получить, что существует последовательность* $\mu(t_k) \to 0$ *такая, что* $\mu(t_k) > 0$ *и* $\langle \nabla_x h_i(z_{0k}), \bar{x} \rangle + \langle \nabla_y h_i(z_{0k}), v_k \rangle \le \mu(t_k)$ *при* $i \in I(z_{0k})$, $\left| \langle \nabla_x h_i(z_{0k}), \bar{x} \rangle + \langle \nabla_y h_i(z_{0k}), v_k \rangle \right| \le \mu(t_k)$ *при* $i \in I_0$.

Поскольку R-регулярность многозначного отображения F в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in gr\,\omega$ сохраняется и в окрестности этой точки, то $\Gamma(z_{0k}; \bar{x}) \ne \varnothing$ [5]. Тогда, применяя лемму 6.16 [5], получим $\rho(v_k, \Gamma(z_{0k}; \bar{x})) \le \alpha \max\{1, t_k M_1\} \alpha\mu(t_k)$, где α и M_1 — некоторые положительные постоянные.

Следовательно, существует бесконечно малая последовательность $\{q_k\}$ такая, что $\bar{y}_{1k} = v_k - q_k \in \Gamma(z_{0k}; \bar{x})$. Иными словами, $v_k = \bar{y}_{1k} + q_k$, где $\bar{y}_{1k} \in \Gamma(z_{0k}; \bar{x})$. Таким образом, получаем $y_k = y_{0k} + t_k \bar{y}_{1k} + o(t_k)$, где $\bar{y}_{1k} \in \Gamma(z_{0k}; \bar{x})$. Отсюда, обозначив $\bar{z}_{1k} = (\bar{x}, \bar{y}_{1k})$, получаем $\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = f(x_k, y_k) - f(x_0, y_{0k}) =$

$$= \langle \nabla f(z_{0k}), (x_k - x_0, y_k - y_{0k}) \rangle + o(t_k) = t_k \langle \nabla f(z_{0k}), \bar{z}_{1k} \rangle + o(t_k).$$

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение* F R*-регулярно во всех точках* $z_0 = (x_0, y_0)$ *таких, что* $y_0 \in \omega(x_0)$, *а экстремальное многозначное отображение* $\omega(x)$ *псевдолипшицево сверху во всех точках* $z_0 = (x_0, y_0) \in \{x_0\} \times \omega(x_0)$. *Тогда функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *по любому направлению* $\bar{x} \in R^n$, *причем*

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle = \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle. \tag{1}$$

Доказательство. *Доказательство теоремы 1 следует из леммы 1, леммы 6.28* [5], *теоремы двойственности в линейном программировании и оценок пределов* $\liminf_{t \downarrow 0} t^{-1}(\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0))$, $\limsup_{t \downarrow 0} t^{-1}(\varphi(x_0 + t\bar{x}) - \varphi(x_0))$.

Замечание. *Точную нижнюю грань в формуле* (1), *вообще говоря, нельзя заменить на минимум.*

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n$ и пусть $t_k \downarrow 0$. Положим $x_k = x_0 + t_k \bar{x}_1 + t_k^2 \bar{x}_2$ и рассмотрим последовательность $y_k \in \omega(x_k)$, $k = 1,2,...$ Не ограничивая общности, можно считать, что $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$, причем $y_0 \in \omega(x_0)$ в силу леммы 6.22 [5].

Лемма 2. *Пусть функции* h_i *и* f C^2*-дифференцируемы, многозначное отображение* F R*-регулярно в точке* $z_0 = (x_0, y_0)$, *где* $y_0 \in \omega(x_0)$. *Тогда при любых* $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n$, $t_k \downarrow 0$ *для любых последовательностей* $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{y_{0k}\}$ *таких, что* $x_k = x_0 + t_k \bar{x}_1 + t_k^2 \bar{x}_2 + o(t_k^2) \in domF$, $y_k \in \omega(x_k)$, $y_{0k} \in \omega(x_0)$, $|y_{0k} - y_k| \le M|x_0 - x_k|$, $M = const > 0$, *и* $y_k \to y_0 \in \omega(x_0)$ *при* $k \to \infty$, *справедливы, начиная с некоторого значения* $k = k_0$ *разложения* $y_k = y_{0k} + t_k \bar{y}_{1k} + t_k^2 \bar{y}_{2k} + o(t_k^2)$,

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = t_k \langle \nabla f(z_{0k}), \bar{z}_{1k} \rangle + t_k^2 \left[\langle \nabla f(z_{0k}), \bar{z}_{2k} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{z}_{1k}, \nabla^2 f(z_{0k}) \bar{z}_{1k} \rangle \right] + o(t_k^2),$$ *где* $z_{0k} = (x_0, y_{0k})$,

$\bar{z}_{1k} = (\bar{x}_1, \bar{y}_{1k})$, $\bar{z}_{2k} = (\bar{x}_2, \bar{y}_{2k})$, *а* $\{\bar{y}_{1k}\}$, $\{\bar{y}_{2k}\}$ — *ограниченные последовательности такие, что* $\bar{y}_{1k} \in \Gamma^*(z_{0k}; \bar{x}_1)$, $\bar{y}_{2k} \in \Gamma^2(z_{0k}, \bar{z}_{1k}; \bar{x}_2)$.

Доказательство. *Доказательство леммы 2 проводится по схеме, аналогичной использованной при доказательстве леммы 1.*

Обозначим $\omega(x_0, \bar{x}_1) = \{(y_0, \bar{y}_1) \mid y_0 \in \omega(x_0),\ \bar{y}_1 \in \Gamma((x_0, y_0); \bar{x}_1),\ \min\limits_{y \in \omega(x_0)} \max\limits_{\bar{y} \in \Gamma((x_0, y); \bar{x}_1)} \langle \nabla f(x_0, y), (\bar{x}_1, \bar{y}) \rangle =$ $= \langle \nabla f(x_0, y_0), (\bar{x}_1, \bar{y}_1) \rangle \}$.

Теорема 2. *Пусть множество* $\omega(x_0, \bar{x}_1)$ *не пусто, многозначное отображение* F R*-регулярно во всех точках* $z_0 = (x_0, y_0)$ *таких, что* $y_0 \in \omega(x_0)$, *а экстремальное многозначное* *отображение* $\omega(x)$ *псевдолипшицево сверху во всех точках* $z_0 = (x_0, y_0)$ *таких, что* $y_0 \in \omega(x_0)$. *Если функции* h_i *и* f C^2*-дифференцируемы, то существует вторая производная функции* $\varphi(x)$ *в точке* x_0 *по любым направлениям* $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R^n$*, причем*

$$\varphi''(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \inf_{(y_0,\bar{y}_1)\in\omega(x_0,\bar{x}_1)} \inf_{\bar{y}_2\in\Gamma^2(z_0,\bar{z}_1;\bar{x}_2)} 2\Phi(z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2) =$$

$$= \inf_{(y_0,\bar{y}_1)\in\omega(x_0,\bar{x}_1)} \sup_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\bar{x}_1)} 2\left\langle \nabla_x L(z_0,\lambda), \bar{x}_2 \right\rangle + \left\langle \bar{z}_1, \nabla^2 L(z_0,\lambda)\bar{z}_1 \right\rangle .$$

Доказательство. *Доказательство теоремы 2 проводится на основании леммы 2 и теоремы 1, с применением леммы 6.80* [5] *и теоремы двойственности.*

ON DERIVATIVES OF THE OPTIMAL VALUE FUNCTION

L.I. MINCHENKO, A.A. VOLOSEVICH, S.I. SIROTKO, A.N. TARAKANOV

Abstract

The sufficient conditions of the directional differentiability of the optimal value function are obtained. The approach is based on the works of V.F. Demianov and A.M. Rubinov. This approach allows to obtain sufficient conditions for the parametric nonlinear programming problem with non only solution.

Литература

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М., 1990.
2. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. New York, 2000.
3. *Auslender A., Cominetti R.* // Optimization. 1990. Vol. 21. P. 351–363.
4. *Shapiro A.* // SIAM J. Control and Optimization. 1988. Vol. 26. P. 628–645.
5. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publ., Dordrecht, 2002.
6. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization. 2005. Vol. 54. P. 433–442.
7. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
8. *Bosch P., Jourani A., Henrion R.* // Appl. Math. and Applications. 2004. Vol. 50. P. 161–181.
9. *Henrion R., Jourani A., Outrata J.* // SIAM J. Optimization. 2002. Vol. 13. P. 603–618.