Решение задачи сведением к случаю, рассмотренному ранее

Рассмотрим пример, когда в круге стоят 17 чисел (Рисунок – 5). Проследим цепочку вычеркивания чисел. После того, как мы вычеркнем первую пару чисел в круге, останется 15 чисел. Следующий шаг— вычеркиваем еще 2 числа. В круге остается 13 чисел, вычеркиваем следующую пару и т.д., пока в круге не останется $r * 3s$ чисел. В нашем случае, как только в круге осталось 9 чисел, начертим второй круг и пронумеруем числа снова от 1 до 9. А результат мы знаем заранее: он равен 1. Так как 1 стоит напротив числа 13, то оно и является решением. Такое решение основано на понятии о рекуррентном соотношении, когда последующий член выражается через предыдущий. В нашем случае решение более сложного выражается через решение более легкого. Это помогает быстро найти решение для любого количества чисел.

Итак, решением задачи является число 13. С одной стороны, $13 = J(2l + r * 3^s)$, где l(4) — количество пар чисел, которые были вычеркнуты до тех пор, пока в круге не осталось 9 чисел. С другой стороны, $13 = 3l + 1$.

Рисунок - 5. Пример сведения к случаю, рассмотренному ранее.

Запишем формулу в общем виде:

$$J(n) = J(2l + r * 3s) = 3l + 1$$

Заключение

Итак, мы получили формулу, по которой определяется место числа, вычёркиваемого последним в случае, когда вычеркивается каждое второе число - $J(2^m + l) = 2l + 1$, а также формулу для случая, когда подряд вычеркивается два числа - $J(n) = J(2l + r * 3^s) = 3l + 1$. Способ, который мы применили для решения данной задачи, позволяет вывести общую формулу для случая, когда подряд вычеркивается любое количество чисел - q:

$$Jq(n) = J((q-1)l \ + \ r * q^s) = ql + 1.$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Паньков В.А., Чадович В.А.

БорисенкоО.Ф. – к.ф.м.н., доцент

В 2000-м году Математический институт им. Клэя обозначил список из семи математических задач, решение которых не было найдено на протяжении многих лет. Единственной решенной из этого списка задачей остается гипотеза Пуанкаре, доказанная еще в 2003г. Мы бы хотели рассмотреть другую задачу - гипотезу Римана. Гипотеза была сформулирована в 1859 году немецким математиком Бернхардом Риманом и имеет богатую историю, однако так и не была доказана или опровергнута. Более того, до сих пор нет ни намёка на то, чтобы установить её истинность или ложность.

История этой гипотезы берёт свои корни из так называемой Базельской задачи, сформулированной задолго до Римана. Вопрос ставился следующим образом: «Выразить в замкнутом виде бесконечный ряд обратных квадратов». На тот момент уже было известно, что гармонический ряд расходится, а в случае ряда обратных квадратов каждый новый член ряда значительно меньше предыдущего, поэтому «базельский ряд» заинтересовал математиков. Задача была решена в 1735 году Леонардом Эйлером. Потрясающий ответ имел вид $\pi^2/6$. Эйлерово решение дало не только замкнутое выражение для ряда из обратных квадратов, но в качестве побочного продукта еще и замкнутые выражения для многих рядов с чётными степенями знаменателя. Однако для нечётных степеней результат до сих пор неизвестен. Таким образом, мы подобрались к ряду:

$$1+\frac{1}{2^N}+\frac{1}{3^N}+\frac{1}{4^N}+\frac{1}{5^N}+\ldots$$

До этого момента N рассматривали только в качестве натурального числа, однако Риман задался вопросом, что если N – комплексное число. Таким образом, Риман сформулировал свою дзета-функцию:

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Гипотеза Римана гласит: все нетривиальные нули дзета-функции имеют вещественную часть, равную одной второй.

Чтобы разобраться в формулировке, стоит уточнить, что тривиальные нули дзета-функции – это все отрицательные четные целые значения аргумента (т.е. -2, -4, -6 и т.д.). Изначально данная функция рассматривалась на промежутке, где реальная часть больше единицы, а ряд, представленный функцией, сходится. Однако функция допускает аналитическое продолжение на другую половину комплексной плоскости без единицы (т.к. когда реальная часть равна единиц, ряд - гармонический). Именно благодаря аналитическому продолжению функции возможно рассматривать её поведение при подаче отрицательных аргументов. Так были найдены тривиальные нули, а те нули, которые не удалось найти этим способом, стали называть нетривиальными.

Вопрос распределения нулей дзета-функции напрямую связан с темой распределения простых чисел. Еще в первой половине XVIII века Л. Эйлер установил связь между простыми числами и вышеупомянутым рядом, являющимся частным случаем дзета-функции реальной частью больше единицы и мнимой равной нулю.

$$\varsigma(s)=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$$

Это является одним из основных свойств дзета-функции, связывающей её с простыми числами. Стоит отметить, что Риман установил, что данное свойство работает для всех s, у которых Re(s)>1.

Есть множество оснований считать, что распределение нетривиальных нулей дзета-функции напрямую связано с распределением простых чисел на некотором отрезке числовой прямой. Ярким примером служит теорема о распределении простых чисел. Одна из ее наиболее важных формулировок имеет вид:

$$J(x)=Li(x)-\sum_{\rho}Li(x^{\rho})-\ln 2+\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$$

И она верна лишь в том случае, если верна гипотеза Римана.

Достоверно известно только одно: все нетривиальные нули расположены в полосе, где реальная часть принимает значения от нуля до единицы. Гипотеза Римана лишь уточняет это свойство. В свое время Риман активно искал нетривиальные нули на т.н. критической полосе, где реальная часть равно одной второй, и успешно нашел некоторые из них. До сих пор создаются алгоритмы, призванные просеивать миллионы возможных вариантов аргументов с этой полосы. Однако математического доказательства до сих пор нет.

Математическое сообщество разбилось на два лагеря: кто-то активно ищет доказательство достоверности Гипотезы, а кто-то – способ её опровергнуть. Несмотря на это множество работ и математических теорий основываются на том, что Гипотеза верна. Даже не зная, верна гипотеза или нет, математики все равно продолжают писать статьи, основывающиеся на её истинности. Вот почему гипотеза Римана является одной из самых важных проблем математики – проблемой тысячелетия.

Список использованных источников:

1. Джон Дербшир. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема математики, 2003.
2. Простое число. Математическая энциклопедия (в 5 томах). — М.: Советская Энциклопедия, 1977. — Т. 4.