

Исследование хаотических процессов на примере математической модели системы лоренца в пакете программ Matlab r2011b

Садов В.С.; Дрыбин Е.А.

Факультет радиофизики и компьютерных технологий
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
e-mail: sadov@bsu.by, gooddrjf@gmail.com

Аннотация—В работе приведены результаты математического моделирования и анализа нелинейной динамической системы с хаотическими режимами. На примере системы Лоренца исследована возможность воспроизведения хаотических процессов с заданным аттрактором при наличии малых флуктуаций начальных условий.

Ключевые слова: воспроизводимость, детерминированный хаос, система Лоренца.

На протяжении нескольких десятилетий человечество переживает информационный взрыв, который характеризуется быстрым увеличением объема обрабатываемой и хранящейся информации практически во всех сферах деятельности современного общества. Развитие информационного сектора экономики, формирование особого рынка информации повлияли на стремительное развитие сферы информационных технологий, относящейся к информационной безопасности.

В данной работе рассмотрено явления детерминированного хаоса и возможность его применения в информационных технологиях для конфиденциального обмена данными. Явление детерминированного хаоса – это возникновение неупорядоченных движений в совершенно детерминированных системах. Эффект непредсказуемости движений в нелинейных детерминированных системах появляется по двум основным причинам [1]:

- неустойчивость всех или почти всех движений нелинейной системы и задание начальных условий с конечной точностью;
- мультистабильность сильно нелинейной системы.

Важнейшими особенностями хаотических колебаний является их воспроизводимость при одних и тех же начальных условиях. Однако в подобных системах могут существовать колебания и другого характера, поэтому определение условий возникновения именно хаотических процессов является весьма актуальным. Большой интерес представляет собой также количественная оценка соответствия полученных колебаний хаотическим.

Цель данного исследования заключается в изучении явления детерминированного хаоса на примере системы Лоренца, исследовании влияния малых флуктуаций начальных условий на

возможность получения хаотических процессов с заданным аттрактором. Исходя из указанной цели, можно выделить следующие задачи, поставленные в работе:

- изучение явления детерминированного хаоса и причин его возникновения в нелинейных динамических системах;
- изучение методов анализа хаотических сигналов;
- моделирование динамической системы Лоренца в пакете программ Matlab R2011b [2];
- анализ воспроизводимости хаотических процессов в зависимости от малых флуктуаций начальных условий на примере модели Лоренца;

Исследуемая модельная система Лоренца описывается следующей системой:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = -XZ + \rho X - Y$$

$$\dot{Z} = XY - \beta Z$$

Для качественной оценки режима работы системы можно воспользоваться автокорреляционной функцией [3]: $C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \tilde{e}(t) \tilde{e}(t + \tau)$, быстрое убывание которой свидетельствует о наличии в системе хаотических колебаний.

При значениях $\rho > 24$ характер поведения системы Лоренца становится хаотическим, при очень больших значениях управляющего параметра система переходит в режим автоколебаний. В данном исследовании воспользуемся «классической» моделью Лоренца с параметрами $\rho = 28$ и $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$.

Исследуем воспроизводимость хаотического сигнала, полученного в системе Лоренца при минимально возможных в пакете программ Matlab R2011b флуктуациях начальных условий ($\approx 10^{-15}$). Для определения степени воспроизводимости хаотического сигнала воспользуемся корреляционной функцией:

$$R(n) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+n} - \bar{x})^2}}$$

Будем считать сигнал полностью воспроизводимым на протяжении n отсчетов для $R(n) > 0,99$, хорошо воспроизводимым для

$R(n) > 0.7$ и удовлетворительно воспроизводимым для $R(n) > 0.5$.

В результате математического моделирования системы Лоренца для различных начальных условий при их флуктуации не более $\delta = 10^{-15}$ от абсолютного значения после усреднения результатов установлено, что на длине выборки $n_1 = 2.6 \cdot 10^3$ коэффициент корреляции составляет $R(n) > 0.99$, на длине выборки $n_2 = 3.9 \cdot 10^3$ коэффициент корреляции $R(n) > 0.7$ и для $n_3 = 5.3 \cdot 10^3$ коэффициент корреляции $R(n) > 0.5$ соответственно.

Общая тенденция зависимости длины воспроизведения хаотического сигнала с заданным аттрактором от порядка величины флуктуации начальных условий может быть описана формулой: $l = -k(\alpha) \cdot \varepsilon$, где l – количество воспроизводимых отсчетов, k – коэффициент воспроизводимости зависящий от α – минимального удовлетворительного уровня корреляционной функции, ε – порядок флуктуации начальных условий. В модельной системе Лоренца для значений $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.5$ экспериментально установленные коэффициенты

воспроизводимости соответственно равны $k_1 = 1.9 \cdot 10^2$, $k_2 = 2.8 \cdot 10^2$, $k_3 = 3.8 \cdot 10^2$. Воспроизведение сигнала становится полностью невозможным при значениях флуктуации соизмеримых с самим значением начальных условий ($\varepsilon \approx -1$).

Таким образом, возможность повторного воспроизведения в известной системе хаотического процесса с заданным аттрактором позволяет синхронизировать эти процессы на приемной и передающей сторонах в сетях обмена информации и обеспечить конфиденциальность этого процесса. Подобные системы могут быть использованы для генерации криптографических ключей размером до нескольких килобит, что не может быть получено достаточно просто другими способами.

- [1] Заславский Г. М., Сагдаев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – С. 368.
- [2] Поршнев С. В. MATLAB 7. Основы работы и программирования. – М.: Бином-Пресс, 2006. – С. 320.
- [3] Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. – М.: Мир, 1988. – С. 240.

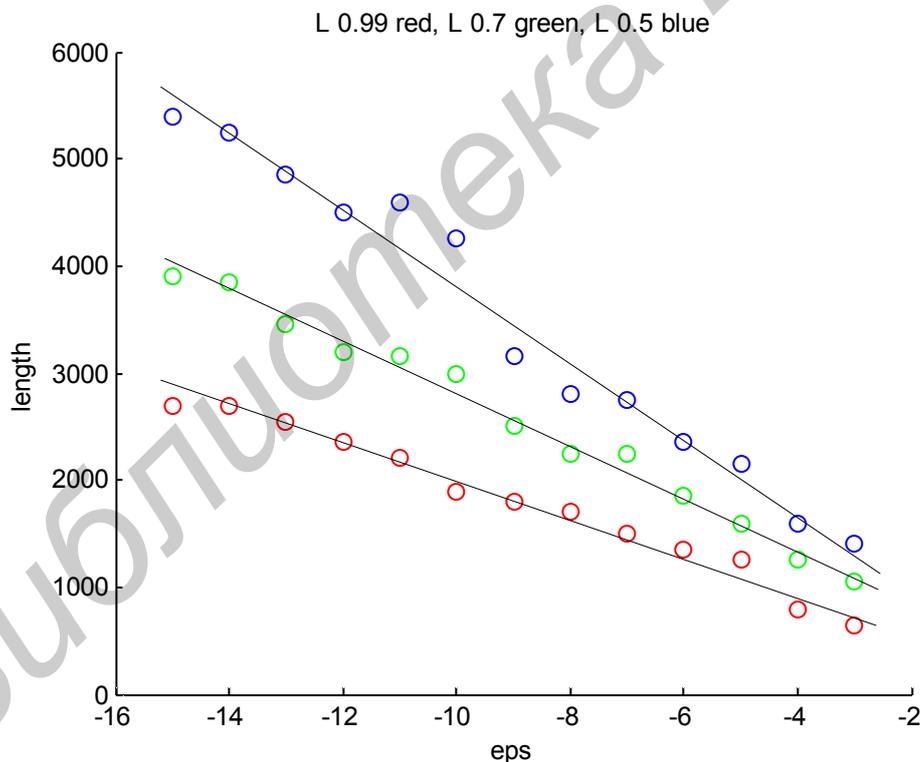


Рис.1. Зависимость длины воспроизводимого хаотического сигнала с заданным аттрактором от порядка флуктуации начальных условий для модели Лоренца.