Д. И. Синица

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ

Формулируется и доказывается Основная Теорема Алгебры.

Введение

Доказательство основной теоремы производится с помощью Леммы Даламбера.

I. Лемма Даламбера

Лемма. Если $P(z)$ – многочлен степени n с комплексными коэффициентами, α – любое комплексное число, $|P(\alpha)| \neq 0$, то найдётся такое комплексное число h, что $|P(\alpha+h)| < |P(\alpha)|$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P(\alpha+h) = a_n(\alpha+h)^n + a_{n-1}(\alpha+h)^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Раскрывая скобки, расположим его слагаемые по возрастающим степеням h, заметив, что $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = P(\alpha)$, $a_n \neq 0$. Получим

$$P(\alpha+h) = P(\alpha) + Ah^m + Bh^{m+1} + \ldots + a_n h^n,$$

$$P(\alpha+h) = P(\alpha) + Ah^m + Ah^m(\frac{B}{A}h + \ldots + \frac{a_n}{A}h^{n-m}),$$

где $A \neq 0$, а m – одно из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Интерпретируя комплексные числа, как векторы($z = x + iy = (x, y)$), выберем h так, что:

- вектор Ah^m короче вектора $P(\alpha)$;
- вектора Ah^m и $P(\alpha)$ противонаправлены;
- вектор $\Delta = Ah^m(\frac{B}{A}h + \ldots + \frac{a_n}{A}h^{n-m})$ короче вектора Ah^m.

При выбранном h, вектор $P(\alpha)$ длиннее чем $P(\alpha+h) = P(\alpha) + Ah^m + \Delta$, что равносильно $|P(\alpha+h)| < |P(\alpha)|$. Лемма доказана.

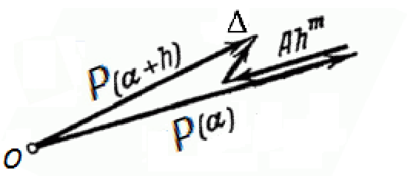

Рис. 1 – Взаимное расположение векторов

II. Основная Теорема Алгебры

Теорема. Каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел хотя бы один корень.

Доказательство. Рассмотрим уравнение:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0,$$

где a_i – комплексные числа, $a_n \neq 0$.

При $a_0 = 0$, теорема верна, т.к. 0 – корень.

Пусть $a_0 \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать $a_n = 1$:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + z^n.$$

Рассмотрим вещественную функцию $f(z) = |P(z)|$, $z = (x, y)$. Т.к. $P(z)$ непрерывен, то и $f(z)$ непрерывна. Выполним ряд преобразований:

$$f(z) = |z^n + \ldots + a_1 z + a_0|,$$

$$f(z) = |z^n||1 + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}|.$$

Отметим: 0 не корень, т.к. $P(0) = a_0 \neq 0$.

Если действительная и/или мнимая часть числа z стремится к $\pm\infty$, то:

$$|z^n| \to +\infty,$$

$$|1 + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}| \to 1,$$

$$f(z) = |z^n||1 + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}| \to +\infty.$$

Из этого следует, что непрерывная функция $f(z)$ достигает своего минимума в некоторой точке z_m. При $f(z_m) = 0$ теорема доказана. Пусть $f(z_m) > 0$. Тогда по Лемме Даламбера найдется h, что $f(z_m + h) < f(z_m)$, а это невозможно, т.к. $f(z)$ имеет минимум в точке z_m, т.е. $f(z_m) = 0$, а $z = z_m$ – искомый корень. Теорема доказана.

III. Заключение

Приведенное доказательство привлекает минимум вспомогательных утверждений, требующих дополнительных доказательств.

Список литературы

1. Математика, ее содержание, методы и значение / А. Д. Александров, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев // АН СССР – 1956. – С. 274–275.
2. Квант / В. М Тихомиров // Бюро Квантум – 2005. – № 4. – С. 6.

Синица Дмитрий Игоревич, студент 1 курса факультета информационных технологий и управления Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, dsinitsa11@gmail.com.

Научный руководитель: Каянович Сергей Сергеевич, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, кандидат физико-математических наук, kayanovichs@gmail.com.