МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО

МИНСК БГУИР 2018
Авторы:

В. В. Цегельник, Н. И. Кобринец, Е. А. Баркова,
В. М. Метельский, А. Н. Семеняко, Т. С. Степанова

Рецензенты:

кафедра высшей математики Белорусского государственного университета
(протокол №2 от 21.09.2017);

профессор кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
dоктор физико-математических наук, профессор Н. С. Коваленко

Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и
многих переменных. Дифференциальные уравнения: учеб.-метод.

Является продолжением серии практикумов по высшей математике для
студентов технических и экономических специальностей по разделам:
«Комплексные числа», «Дифференциальное исчисление функций многих
переменных», «Интегральное исчисление функций одной и многих переменных»,
«Дифференциальные уравнения», «Элементы теории поля». Приведены
дополнительные задания с ответами. Предложены задания для самостоятельного
решения и контрольные работы.

УДК 517.2/3(075.8)
ББК 22.161.1я73

университет информатики
и радиоэлектроники», 2018
Занятие 1

Комплексные числа

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 - 2i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

$\Delta \ z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 2i) = 3 + i$;
$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 2i) = 1 + 5i$;
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 - 4i + 3i + 6 = 8 - i$;
$z_1 = (2 + 3i)(1 + 2i) = 2 + 4i + 3i - 6 = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$. ▲

$z_2 = \frac{5 + i}{(1 + i)(2 - 3i)}$ в алгебраической форме.

$\Delta \ \frac{5 + i}{2 - 3i + 2i + 3} = \frac{5 + i}{5 - i} = \frac{(5 + i)^2}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{25 + 10i - 1}{26} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$. ▲

Пример 3. Найти действительные $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

$\Delta \ 6x + 3xi - 2i + 1 + x + 2ix - iy + 2y = 5 + 6i$,

$\begin{cases} 6x + 1 + x + 2y = 5, & 7x + 2y = 4, \\ 3x - 2 + 2x - y = 6, & 5x - y = 8 \end{cases}$,

$17x = 20$, $x = \frac{20}{17}$, $y = -\frac{36}{17}$. ▲

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - (2 + i)y = -7 - 5i, \\ ix - 5y = -7 + 15i \end{cases}$.

$\Delta \ \begin{vmatrix} 3x - (2 + i)y & -7 - 5i \\ ix - 5y & -7 + 15i \end{vmatrix}_{3i}$, $(-2 - 16i)y = -52 - 26i$,

$y = \frac{26(2 + i)}{2(1 + 8i)} = \frac{13(2 + i)(1 - 8i)}{65} = 2 - 3i$,

$ix = -7 + 15i + 10 - 15i$, $x = -3i$. ▲

Пример 5. Решить уравнение $z^2 + |z| = 0$.

$\Delta$ Пусть $z = x + iy$. Тогда $(x + iy)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, откуда

$(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) + 2xyi = 0$.

Следовательно,
\[
\begin{cases}
x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0, & \text{если } x = 0, \text{ то } y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1. \\
2xy = 0, & \text{если } y = 0, \text{ то } x = 0.
\end{cases}
\]

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа \( z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i \). ▲

**Пример 6.** Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

2, \(-3, -i, 1+i, \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\).

\[
\Delta 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0); \ -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi);
\]

\(-i = 1 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right); \ 1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);
\]

\[
\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} - i \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \left( -\frac{3\pi}{10} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{10} \right). \quad \Box
\]

**Пример 7.** Записать в тригонометрической форме комплексное число \( 2i \left( \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right) \).

\[
\Delta \text{Рассмотрим два комплексных числа } z_1 = 2i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ и }
\]

\[
z_2 = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = 1 \cdot \left( \cos \left( -\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{5} \right) \right).
\]

|z_1| = 2 и \( \arg z_1 = \frac{\pi}{2} \); |z_2| = 1 и \( \arg z_2 = -\frac{\pi}{5} \).

Так как \( z = z_1 \cdot z_2 \), то |z| = 2 \cdot 1 = 2 и \( \text{Arg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k = \frac{3\pi}{10} + 2\pi k \).

\[
z = 2 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{10} + 2\pi k \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{10} + 2\pi k \right) \right) = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} \right). \quad \Box
\]

**Пример 8.** Записать в показательной форме комплексное число

\[
z = \frac{(-\sqrt{3} + i) \left( \cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12} \right)}{-1 - i}.
\]

\[
\Delta \text{Каждое из трех чисел представим в показательной форме:}
\]

\[
z_1 = -\sqrt{3} + i = 2e^{i \frac{5\pi}{6}};
\]

\[
z_2 = \cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12} = \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) = le^{-i \frac{7\pi}{12}};
\]

\[
z_3 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-i \frac{3\pi}{4}}.
\]
Тогда $z = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot 1e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. ▲

Пример 9. Найти модуль и аргумент числа $(1+i)^5$.

Δ Пусть $z_1 = (1+i)$. Тогда $|z_1| = \sqrt{2}$ и $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$; $|z| = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ и $\arg z = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$. ▲

Пример 10. Вычислить $(\sqrt{3} + i)^{723} \cdot (i-1)^{358} : 2^{900}$.

Δ Запишем числа $\sqrt{3} + i$ и $i-1$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$
$$i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Теперь по формуле Муавра находим:

$$(\sqrt{3} + i)^{723} = 2^{723}\left(\cos\frac{723\pi}{6} + i\sin\frac{723\pi}{6}\right) = 2^{723}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{723}i;$$

$$(i-1)^{358} = 2^{173}\left(\cos\frac{1074\pi}{4} + i\sin\frac{1074\pi}{4}\right) = 2^{179}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{179}i.$$

Искомое произведение равно

$$2^{723}i \cdot 2^{179}i \cdot 2^{-900} = 4i^2 = -4.$$ ▲

Пример 11. Вычислить $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3} - 3i}\right)^{11}$.

Δ

$$\frac{1+i}{\sqrt{3} - 3i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3} - 3i}\right)^{11} \approx \frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{77\pi}{12} + i\sin\frac{77\pi}{12}\right) = \frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$ ▲

Пример 12. Исходя из определения, вычислить $\sqrt{3 - 4i}$.

Δ Пусть $\sqrt{3 - 4i} = x + iy$, тогда $(x + iy)^2 = 3 - 4i$ или

$$x^2 - y^2 + i2xy = 3 - 4i.$$ Получим систему

$$\begin{cases}
  x^2 - y^2 = 3, \\
  2xy = -4
\end{cases} \sim \begin{cases}
  x^2 - y^2 = 3, \\
  y = \frac{-2}{x}
\end{cases} \sim \begin{cases}
  x^2 - 4 = 3, \\
  y = \frac{-2}{x}
\end{cases} \sim \begin{cases}
  x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \\
  y = \frac{-2}{x}
\end{cases} \sim \begin{cases}
  x^2 = 4, \\
  y = \frac{-2}{x}
\end{cases} \sim \begin{cases}
  x_1 = 2, \\
  y_1 = -1
\end{cases} \text{ или } \begin{cases}
  x_2 = -2, \\
  y_2 = 1.
\end{cases}$$
В результате получаем два значения квадратного корня $\sqrt{3 - 4i} = 2 - i$ и $\sqrt{3 - 4i} = -2 + i$. ▲

Пример 13. Найти все значения корня $3\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}$.
Δ Записав комплексное число $-1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, находим

$3\sqrt{-1 - i\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-2\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi + 2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$.

Откуда

$u_0 = 3\sqrt{-1 - i\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right)$, $k = 0$.

$u_1 = 3\sqrt{-1 - i\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$, $k = 1$.

$u_2 = 3\sqrt{-1 - i\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right)$, $k = 2$. ▲

Пример 14. Найти все значения корня $\frac{4}{16i}$.
Δ Поскольку $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то

$\frac{4}{16i} = \frac{4}{16}\left(\cos\frac{\pi}{8} + 2k\pi + i\sin\frac{\pi}{8} + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Следовательно,

$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$;

$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$; $\omega_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$. ▲

Пример 15. Используя формулы Эйлера, доказать равенство $2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$.
Δ $2\sin \varphi \cos \varphi = 2\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\cdot \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{(e^{i\varphi})^2 - (e^{-i\varphi})^2}{2i} = e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi} = \sin 2\varphi$. ▲

Пример 16. Найти множество точек $z$ комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\text{Im}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}\right) \geq 1$.
Δ ОДЗ: $z \neq 0$, $\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}} = \frac{1}{x + iy} + \frac{2}{x - iy} = \frac{x - iy + 2x + 2iy}{x^2 + y^2} = \frac{3x + iy}{x^2 + y^2}$, $\frac{y}{x^2 + y^2} \geq 1$, $y \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - y \leq 0$, $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. ▲
Дополнительные задачи

1. Представить в алгебраической форме комплексные числа:
   a) \( z = (2 + i)^2 \);  б) \( z = \frac{13 + 12i}{6i - 8} + \frac{(1 + 2i)^2}{2 + i} \).

   Ответ: a) \( \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \);  б) \( -\frac{18}{25} + \frac{23}{50}i \).

2. Решить уравнение \( 2z = |z| + 2i \).

   Ответ: \( \frac{1}{\sqrt{3}} + i \).

3. Решить систему
   \[
   \begin{cases}
   z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\
   3z_1 - iz_2 = 2 - 3i.
   \end{cases}
   \]

   Ответ: \( z_1 = \frac{13 - 33i}{37}, \quad z_2 = \frac{12 + 35i}{37} \).

4. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:
   a) \( z = -3 + i \);  б) \( z = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \).

   Ответ: a) \( \sqrt{10} \left( \cos \left( \arccos \left( -\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right) + i \sin \left( \arccos \left( -\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right) \right) \);  б) \( 2 \cos \frac{\pi}{14} \left( \cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right) \).

5. Найти все натуральные значения \( n \), при которых справедливо равенство \( (1 + i)^n = (1 - i)^n \).

   Ответ: \( n = 4k, \quad k \in \mathbb{N} \).

6. Используя формулу Муавра, выразить \( \sin 3x \) и \( \cos 3x \) через \( \sin x \) и \( \cos x \).

   Ответ: \( \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \).

7. Найти все значения \( \sqrt[4]{-16} \).

   Ответ: \( w_0 = \sqrt{2} + i \sqrt{2}, \quad w_1 = -\sqrt{2} + i \sqrt{2}, \quad w_2 = -\sqrt{2} - i \sqrt{2}, \quad w_3 = \sqrt{2} - i \sqrt{2} \).

8. Используя формулы Эйлера, доказать равенство \( \cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \).
Занятия 2–3

Непосредственное интегрирование.
Метод подстановки, интегрирование по частям

Примеры
Найти следующие интегралы:

1. \[ \int \frac{2^3 x^2 - 3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + 5 \, dx; \]
2. \[ \int (\sqrt{x} + 2^3 x)^3 \, dx; \]
3. \[ \int 2^3 x e^{2x} \, dx; \]
4. \[ \int (\tan^2 x - 1) \, dx; \]
5. \[ \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \]
6. \[ \int \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 7}{x^2 - 4} \, dx; \]
7. \[ \int \frac{5x^2 + 2}{x^2(1 + 2x^2)} \, dx; \]
8. \[ \int \cos(2x - 3) \, dx; \]
9. \[ \int \sin^4 x \cos x \, dx; \]
10. \[ \int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}; \]
11. \[ \int x(2x + 3)^9 \, dx; \]
12. \[ \int \frac{\ln x \, dx}{x(1 - \ln^2 x)^2}; \]
13. \[ \int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx; \]
14. \[ \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}; \]
15. \[ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \]
16. \[ \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x + 1}}; \]
17. \[ \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + 3}; \]
18. \[ \int \frac{dx}{e^x + 1}; \]
19. \[ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x < -1; \]
20. \[ \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; \]
21. \[ \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 7}; \]
22. \[ \int \frac{dx}{\sqrt{15 + 4x - x^2}}; \]
23. \[ \int \frac{dx}{\sqrt{14 - 6x - 3x^2}}; \]
24. \[ \int \frac{5x - 2}{x^2 + 6x + 17} \, dx; \]
25. \[ \int \frac{3x - 7}{x^2 + 4x + 1} \, dx; \]
26. \[ \int \frac{x + 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 11}} \, dx; \]
27. \[ \int x \sin 2x \, dx; \]
28. \[ \int \arcsin x \, dx; \]
29. \[ \int x e^{-3x} \, dx; \]
30. \[ \int x \arctg x \, dx; \]
31. ∫ (x² + 3x + 5) \cos 2xdx;  
32. ∫ x³ \ln² xdx;  
33. ∫ \cos(\ln x)dx;  
34. ∫ eᵃx \cos bxdx;  
35. ∫ \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.

\[ \Delta \]
1. ∫ \frac{2³x² - 3\sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt{x}} dx = \int (2x⁶ - 3x^{-1/4} + 5x^{-3/2}) dx = 2 \cdot \frac{6}{7} x^6 - 3 \cdot \frac{4}{3} x^{3/2} + 
+ 5 \cdot 2x^{3/2} + C = \frac{12}{7} x^6 - 4x^{3/4} + 10x^{1/2} + C.

2. ∫ (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})³ dx = \int (x^{3/2} + 6x^{4/3} + 12x^{7/6} + 8x) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + 
+ \frac{18}{7} x^{7/3} + \frac{72}{13} x^{13/6} + 4x^2 + C.

3. ∫ 2³x \cdot e²x dx = \int (8e²)^x dx = \frac{(8e²)^x}{\ln 8e²} + C.

4. ∫ (\tg² x - 1) dx = \int \left( \frac{1}{\cos² x} - 2 \right) dx = \tg x - 2x + C.

5. ∫ \frac{dx}{\sin² x \cos² x} = ∫ \frac{\sin² x + \cos² x}{\sin² x \cos² x} dx = \int \frac{dx}{\cos² x} + \int \frac{dx}{\sin² x} = \tg x - \ctg x + C.

6. ∫ \frac{2x³ + 3x² - 8x - 7}{x² - 4} dx.

Разделим уголком числитель на знаменатель:

\[ \begin{array}{c|c}
-2x³ + 3x² - 8x - 7 & \frac{x² - 4}{2x + 3} \\
3x² - 8x & -7 \\
3x² - 12 & 5.
\end{array} \]

Следовательно,

\[ \int \frac{2x³ + 3x² - 8x - 7}{x² - 4} dx = \int \left( 2x³ + 3 + \frac{5}{x² - 4} \right) dx = x³ + 3x + \frac{5}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C. \]

7. ∫ \frac{5x² + 2}{x²(1 + 2x²)} dx = \int \frac{2(2x² + 1) + x²}{x²(2x² + 1)} dx = 2\int \frac{dx}{x²} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x² + \frac{1}{2}} = 
= -\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \sqrt{2} x + C.
8. $\int \cos (2x - 3) \, dx = \frac{1}{2} \int \cos (2x - 3) \, d(2x - 3) = \frac{1}{2} \sin (2x - 3) + C$.

9. $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \int \sin^4 x \, d\sin x = \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

10. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}} = 2 \int \frac{\sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} = 2 \arctg \sqrt{x} + C$.

11. $\int x(2x + 3)^9 \, dx = \frac{1}{2} \int ((2x + 3) - 3)(2x + 3)^9 \, dx = \frac{1}{2} \int (2x + 3)^{10} \, dx - \frac{3}{2} \int (2x + 3)^9 \, dx = \frac{1}{4} \int (2x + 3)^{10} \, d(2x + 3) - \frac{3}{4} \int (2x + 3)^9 \, d(2x + 3) = \frac{1}{44} (2x + 3)^{11} - \frac{3}{40} (2x + 3)^{10} + C$.
   Второе решение:
   $\int x(2x + 3)^9 \, dx = \left| \begin{array}{c} 2x + 3 = t \\ x = \frac{1}{2}(t - 3) \\ dx = \frac{1}{2} \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int (t - 3)^9 \, dt = \frac{1}{4} \int t^{11} - \frac{3}{4} t^{10} + C = \frac{1}{44} (2x + 3)^{11} - \frac{3}{40} (2x + 3)^{10} + C$.

12. $\int \frac{\ln x \, dx}{x(1 - \ln^2 x)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - \ln^2 x)}{(1 - \ln^2 x)^2} = \frac{1}{2(1 - \ln^2 x)} + C$.
   Второе решение:
   $\int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)^2} \, dx = \left| \begin{array}{c} 1 - \ln^2 x = t \\ 1 - \ln x = \frac{1}{\sqrt{t}} \\ dx = -\frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \\ \frac{\ln x}{x} \, dx = -\frac{1}{2} \, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2(1 - \ln^2 x)} + C$.

13. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = -\int \arccos x \, d\arccos x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(1 - x^2) = -\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1 - x^2} + C$.

14. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \, d(1 + \sqrt{x}) = \frac{4}{3} \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + C$. 

10
15. \[ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \left| \frac{\sqrt{e^x - 1}}{t} \right| = \frac{2dt}{t^2 + 1} = 2\arctg t + C = \]

= 2\arctg \sqrt{e^x - 1} + C.

16. \[ \int \frac{xdx}{\sqrt{x + 1}} = \left| \frac{x + 1}{2t} \right| = 2\int \frac{t^2 - 1}{t} dt = 2\left( \frac{t^3}{3} - t \right) + C = \]

= \frac{2}{3} (x + 1)^3 - 2x + 1 + C.

17. \[ \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 3}} = \left| \frac{x + 3}{2t} \right| = \frac{2t}{1 + t} dt = 2\int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \]

= 2t - 2 \ln |t + 1| + C = 2\sqrt{x + 3} - 2 \ln (1 + \sqrt{x + 3}) + C.

18. \[ \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \frac{e^x - 1}{t} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{d(t + 1)}{t + 1} = -\ln |t + 1| + C = \]

= -\ln (e^{-x} + 1) + C.

Второе решение:

\[ \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} (e^x + 1)} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = -\int \frac{d(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} = -\ln (e^{-x} + 1) + C. \]

19. \[ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \ x < -1. \]

Поскольку \[ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = - \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \left( \frac{1}{x} \right)^2}} = \frac{d\left( \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{x} \right)^2}}, \]

то \[ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{d\left( \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{x} \right)^2}} = \arcsin \frac{1}{x} + C. \]

Легко показать, что при \( x > 1 \) \[ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin \frac{1}{x} + C. \]

20. \[ \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x + 2}{\sqrt{5}} + C. \]
21. \[
\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{2(x-1)^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \arctg \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} (x-1) \right) + C.
\]

22. \[
\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 4x - x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{19 - (x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{19}} + C.
\]

23. \[
\int \frac{dx}{\sqrt{14 - 6x - 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{14 - 2x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{17 - (x+1)^2}} =
\]
\[
= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{17}} + C.
\]

24. \[
\int \frac{5x - 2}{x^2 + 6x + 17} \, dx = \int \frac{5}{2} \frac{(2x + 6) - 17}{x^2 + 6x + 17} \, dx = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 6x + 17)}{x^2 + 6x + 17} -
\]
\[
-17 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + 8} = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 6x + 17) - \frac{17}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.
\]

25. \[
\int \frac{3x - 7}{x^2 + 4x + 1} \, dx = \int \frac{3}{2} \frac{(2x + 4) - 6 - 7}{x^2 + 4x + 1} \, dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x + 1)}{x^2 + 4x + 1} -
\]
\[
-13 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 - 3} = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 1| - \frac{13}{2\sqrt{3}} \ln|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}| + C.
\]

26. \[
\int \frac{x + 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 11}} \, dx = \int \frac{1}{4} \frac{(4x + 8) - 2 + 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 11}} \, dx =
\]
\[
= \frac{1}{4} \int (2x^2 + 8x + 11)^{-\frac{1}{2}} d(2x^2 + 8x + 11) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 + \frac{3}{2}}} =
\]
\[
= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 11} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 + \frac{3}{2}}| + C.
\]

27. \[
\int x \sin 2x \, dx = \left. u = x, \quad du = dx \right|_{\sin 2x \, dx = dv, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x} = -\frac{1}{2} x \cos 2x +
\]
\[
+ \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.
\]

28. \[
\int \arcsin x \, dx = \left. u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right|_{dv = dx, \quad v = x} = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =
\]
\[
= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.
\]

29. \[\int x e^{-3x} dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ e^{-3x} dx = dv, & v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx =
\]

\[= -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C.
\]

30. \[\int x \arctg x dx = \begin{vmatrix} u = \arctg x, & du = \frac{dx}{1 + x^2} \\ dv = x dx, & v = \frac{1}{2} x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx =
\]

\[= \frac{1}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C.
\]

31. \[\int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 + 3x + 5, & du = (2x + 3) dx \\ \cos 2x dx = dv, & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{vmatrix} =
\]

\[= \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 5) \sin 2x - \frac{1}{2} \int (2x + 3) \sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = 2x + 3, & du = 2dx \\ \sin 2x dx = dv, & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{vmatrix} =
\]

\[= \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 5) \sin 2x - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} (2x + 3) \cos 2x + \int \cos 2x dx \right) =
\]

\[= \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \right) \sin 2x + \left( \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \cos 2x + C.
\]

32. \[\int x^3 \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, & du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x dx =
\]

\[= \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ x^3 dx = dv, & v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8} x^4 \ln x - \frac{1}{32} x^4 + C.
\]
33. \[ I = \int \cos(\ln x) \, dx = \begin{vmatrix} u = \cos(\ln x), & du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\cos(\ln x) + \] 
\[ + \int \sin(\ln x) \, dx = \begin{vmatrix} u = \sin(\ln x), & du = \cos(\ln x) \cdot \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \] 
\[ - \int \cos(\ln x) \, dx. \]
\[ I = \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C. \]

34. \[ I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \begin{vmatrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax} \cdot \frac{dx}{b} \\ dv = \cos bx \, dx, & v = \frac{1}{b} \sin bx \end{vmatrix} = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \] 
\[ - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \begin{vmatrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax} \cdot \frac{dx}{b} \\ dv = \sin bx \, dx, & v = \frac{1}{b} \cos bx \end{vmatrix} = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \] 
\[ - \frac{a}{b} \left( -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right). \]
\[ I \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx. \]
\[ I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \]

35. \[ \int \arctg \sqrt{x} \, dx = \begin{vmatrix} x = t^2, & \frac{dx}{dt} = 2t \end{vmatrix} = 2 \int \arctg t \, dt = \begin{vmatrix} u = \arctg t, & du = \frac{dt}{1 + t^2} \\ dv = dt, & v = t \end{vmatrix} = \] 
\[ = 2 \left( t \arctg t - \int \frac{t \, dt}{1 + t^2} \right) = 2t \arctg t - \ln (1 + t^2) + C = \] 
\[ = 2\sqrt{x} \arctg \sqrt{x} - \ln (1 + x) + C. \]

Дополнительные задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. \[ \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt{x}} \, dx. \] Ответ: \[ \frac{4}{5} x^{4/3} - \frac{24}{17} x^{12/5} + \frac{4}{3} x^{3/2} + C. \]
2. \( \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \).  
Ответ: \( x - \arctg x + C \).

3. \( \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} \).  
Ответ: \( -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C \).

4. \( \int \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2} \).  
Ответ: \( -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \).

5. \( \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \).  
Ответ: \( \arctge^x + C \).

6. \( \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx \).  
Ответ: \( \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C \).

7. \( \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} \).  
Ответ: \( \ln |\ln(\ln x)| + C \).

8. \( \int \frac{3x + 5}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \).  
Ответ: \( 3\sqrt{1-x^2} + 5\arcsin x + C \).

9. \( \int x\sqrt{x-5} \, dx \).  
Ответ: \( 2(x-5)^{\frac{5}{2}} + 10(x-5)^{\frac{3}{2}} + C \).

10. \( \int \frac{dx}{2 + \sqrt{1+x}} \).  
Ответ: \( 2\sqrt{1+x} - 4\ln(\sqrt{1+x} + 2) + C \).

11. \( \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2} \).  
Ответ: \( \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{4x-3}{\sqrt{7}} + C \).

12. \( \int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2} \).  
Ответ: \( -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+3} \right| + C \).

13. \( \int \frac{dx}{\sqrt{3x+2} - 2x^2} \).  
Ответ: \( \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C \).

14. \( \int \frac{(x+1) \, dx}{x^2 + x + 1} \).  
Ответ: \( \frac{1}{2} \ln (x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \).

15. \( \int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}} \).  
Ответ: \( -\sqrt{5} + x - x^2 + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C \).

16. \( \int (x^2 - 2x + 3) \ln x \, dx \).  
Ответ: \( x\ln x - \ln \cos x | + C \).

17. \( \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} \).  
Ответ: \( 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + C \).

18. \( \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \).  
Ответ: \( 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} + C \).

19. \( \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx \).  
Ответ: \( -\frac{1}{2}\left( \frac{x}{\sin^2 x} + \cotg x \right) + C \).
20. \[ \int (x^2 + 2x - 1) \sin 3xdx. \] Ответ: \[ \frac{9x^2 + 18x - 11}{27} \cos 3x + \frac{2x + 2}{9} \sin 3x + C. \]

21. \[ \int \arcsin^2 xdx. \] Ответ: \[ x \arcsin^2 x + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + C. \]

Занятие 4

Интегрирование рациональных функций

Пример 1. Представить неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

1) \[ f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}; \]
2) \[ f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7}. \]

\[ \Delta \]
1) Разделим уголком числитель на знаменатель:
\[ \begin{align*}
\frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} &= x - 1 + \frac{2}{x^2 + x + 1}. \\
\frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} &= -x^2 - x + 1 \\
&= -x^2 - x - 1 \\
&= 2.
\end{align*} \]

Следовательно, \[ \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x^2 + x + 1}. \]

2) Числитель неправильной рациональной дроби преобразуем так, чтобы в нем выделить слагаемое, кратное знаменателю и включающее старшую степень многочлена \( x \):

\[ f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7} = \frac{2x(x^2 + 3x + 7 - 3x - 7) + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7} = \]
\[ = 2x + \frac{-3x^2 - 19x + 8}{x^2 + 3x + 7} = 2x + \frac{-3(x^2 + 3x + 7 - 3x - 7) - 19x + 8}{x^2 + 3x + 7} = \]
\[ = 2x - 3 + \frac{-10x + 29}{x^2 + 3x + 7}. \]

Пример 2. С помощью элементарных преобразований разложить рациональную дробь \[ \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} \] на простейшие.

\[ \Delta \]
\[ \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \]
Пример 3. Найти \( \int \frac{dx}{x^3 + 1} \).

Поскольку \( x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) \), то

\[
\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.
\]

Для нахождения значений \( A, B \) и \( C \) используем метод неопределенных коэффициентов:

\[
A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = 1, \quad (A + B)x^2 + (B + C - A)x + A + C = 1.
\]

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получаем систему уравнений

\[
\begin{align*}
x^2 &: A + B = 0, \\
x^1 &: - A + B + C = 0, \\
x^0 &: A + C = 1.
\end{align*}
\]

Отсюда \( A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3} \). Таким образом, при \( x \neq -1 \)

\[
\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} \, dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx +
\]

\[
+ \frac{1}{2} \int \left( \frac{x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{3}{4} \, dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\]

Пример 4. Найти \( \int \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2 + 3)(x^2 - x + 1)} \, dx \).

Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

\[
\frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2 + 3)(x^2 - x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1}.
\]

Значения \( A, B, M \) и \( N \) найдем методом неопределенных коэффициентов

\[
2x^3 + x^2 + 5x + 1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x^2 + 3).
\]

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим систему

\[
\begin{align*}
x^3 &: A + M = 2, \\
x^2 &: - A + B + N = 1, \\
x^1 &: A - B + 3M = 5, \\
x^0 &: B + 3N = 1.
\end{align*}
\]
Решением этой системы являются числа $A = 0$, $B = 1$, $M = 2$, $N = 0$.

Таким образом,

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2 + 3)(x^2 - x + 1)} \, dx = \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \int \frac{2x \, dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx +$$

$$+ \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x - \frac{1}{2})^2 + 3/4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln (x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangle$$

**Пример 5.** Найти $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx$.

Δ Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x + 1} - \frac{x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

Следовательно, $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx = \int (x + 1) \, dx - \int \frac{(x + 2)}{x(x - 2)(x + 1)} \, dx$.

Разлагаем оставшуюся правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x + 2}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{D}{x + 1}.$$ 

Значения $A$, $B$ и $D$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Но так как все корни знаменателя вещественные и простые, более удобным является метод частных значений: $A(x - 2)(x + 1) + B(x + 1) + Dx(x - 2) = x + 2$.

Подставляя поочередно в правую и левую часть значения $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, (корни знаменателя), получим $A = -1$, $B = \frac{2}{3}$, $D = \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx = \int (x + 1) \, dx + \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x - 2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x - 2| - \frac{1}{3} \ln|x + 1| + C. \quad \blacktriangle$$

**Пример 6.** Найти $\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} \, dx$.

Δ Полагая $x^4 = t$, находим
\[
\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} \, dx = \int \frac{x^3(x^4 - 3)}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{(t - 3) \, dt}{t(t + 1)(t + 2)}.
\]
Разложение функции на простые дроби имеет вид
\[
\frac{t - 3}{t(t + 1)(t + 2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} + \frac{D}{t + 2},
\]
откуда \( t - 3 = A(t + 1)(t + 2) + B(t + 2) + D(t + 1) \). Полагая последовательно \( t = 0, -1, -2 \), находим \( A = -\frac{3}{2}, B = 4, C = -\frac{5}{2} \).

Таким образом,
\[
\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} \, dx = -\frac{3}{8} \ln |t| + \ln |t + 1| - \frac{5}{8} \ln |t + 2| + C = -\frac{3}{8} \ln x^4 + \\
+ \ln (x^4 + 1) - \frac{5}{8} \ln (x^4 + 2) + C. \]

Пример 7. Найти \( \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + x + 1)} \).

\( \Delta \) Имеем
\[
\frac{1}{x(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1},
\]
\( A(x+1)(x^2 + x + 1) + Bx(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x) = 1. \)

Здесь удобно первые два коэффициента \( A \) и \( B \) получить методом частных значений, а \( C \) и \( D \) – методом неопределенных коэффициентов. Подставив поочередно \( x = 0 \) и \( x = -1 \), получим \( A = 1, B = -1 \). Приравняв коэффициенты при \( x^3 \) и \( x^2 \), получим систему
\[
\begin{align*}
A + B + C &= 0, \\
2A + B + D &= 0,
\end{align*}
\]
из которой находим \( C = 0, D = -1 \).

Таким образом,
\[
\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + x + 1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \ln|x| - \ln|x + 1| - \\
- \int \frac{d \left( \frac{x+1}{2} \right)}{\left( \frac{x+1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x| - \ln|x + 1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \]

Пример 8. Найти \( \int \frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} \, dx \).

\( \Delta \) Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид
\[
\frac{7x^2 + 18x - 14}{(x+6)(2x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Mx + N}{2x^2 + 2x + 5},
\]
откуда \(7x^2+18x-14 = A(2x^2 + 2x + 5) + (Mx + N)(x + 6)\).

Положив \(x = -6\), получаем \(A = 2\).

Приравнивая коэффициенты при \(x^2\) и \(x^0\), имеем
\[
\begin{align*}
x^2 \bigg| \begin{align*}
7 &= 4 + M, \\
M &= 3,
\end{align*} \\
nx^0 \bigg| \begin{align*}
-14 &= 10 + 6N, \\
N &= -4.
\end{align*}
\]

Таким образом,
\[
\int -\frac{7x^2+18x-14}{(x+6)(2x^2+2x+5)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x+6} + \frac{3x-4}{2x^2+2x+5}\,dx =
\]
\[
= 2\ln|x+6| + \frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2+2x+5)}{2x^2+2x+5} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} =
\]
\[
= 2\ln|x+6| + \frac{3}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{11}{6}\arctg\frac{2x+1}{3} + C. \quad \Delta
\]

Пример 9. Найти \(\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2}\).

Имеем
\[
\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2} = |x+1 = t| = \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^2} = I_2.
\]

Для вычисления \(I_2\) вспользуем рекуррентным соотношением
\[
I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}} I_{k-1}.
\]

Так как \(I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctg\frac{t}{a} + C\), то \(I_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t^2 + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 2} =
\]
\[
= \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t^2 + 2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \quad \Delta
\]

Замечание. \(\int \frac{dt}{(t^2 + 2)^2}\) можно вычислить с помощью подстановки \(t = \sqrt{2}\tan\theta\).

Пример 10. Найти \(\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{100}}\).

Имеем
\[
\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{100}} = \left|\frac{x-1 = t}{\frac{d(x}{dx} = dt}\right| = \int \frac{(t+1)^2}{t^{100}}\,dt = \int \frac{t^2 + 2t + 1}{t^{100}}\,dt =
\]
\[
= \int t^{-98}\,dt + 2\int t^{-99}\,dt + \int t^{-100}\,dt = -\frac{1}{97t^{97}} - \frac{2}{98t^{98}} - \frac{1}{99t^{99}} + C =
\]
\[
= -\frac{1}{97(x-1)^{97}} - \frac{2}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C. \quad \Delta
\]
Найти неопределенные интегралы:

1. \( \int \frac{x}{x^3 - 1} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \]

2. \( \int \frac{x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{3}{2} \ln |x - 2| + \frac{4}{3} \ln |x - 3| + C. \]

3. \( \int \frac{2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } \frac{1}{3(x - 2)} + \frac{7}{9} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C. \]

4. \( \int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } 5x + \ln \left| x^2 (x + 2)^4 (x - 2)^3 \right| + C. \]

5. \( \int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C. \]

6. \( \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} \, dx \)
   \[ \text{Ответ: } \ln \left( (x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right) - \arctg (x + 1) + C. \]

7. Используя рекуррентное соотношение, найти \( \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^3} \).
   \[ \text{Ответ: } \frac{x}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C. \]

Занятие 5

Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений

Пример 1. Найти \( \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \).
Применим универсальную подстановку $\tan \frac{x}{2} = t$:

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} = \left| \begin{array}{l}
x = 2 \arctg t, \\
dx = \frac{2dt}{1 + t^2}
\end{array} \right| =$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{\left(2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 5\right)(1 + t^2)} = 2 \int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \arctg \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \ ▲$$

**Пример 2.** Найти $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$.

$$\Delta \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = \left| \begin{array}{l}
\tan \frac{x}{2} = t
\end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{\left(\frac{4 \cdot 2t}{1 + t^2} + 3 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 5\right)(1 + t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \left(t + 2\right)^2 - d(t + 2) = - \frac{1}{t + 2} + C = - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 2} + C. \ ▲$$

**Пример 3.** Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot 3\sqrt{\cos x}} dx$.

$\Delta$ При вычислении интегралов $\int \sin^m x \cos^n x dx$, если $m$ — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$, если же $n$ — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\sin x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot 3\sqrt{\cos x}} dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-\frac{4}{3}} x \sin x dx = |\cos x = t| =$$

$$= - \int (1 - t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = - \int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^\frac{2}{3} dt = 3 t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^\frac{5}{3} + C = \frac{3}{\sqrt{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos \frac{3}{\sqrt{\cos x}} \cos^2 x + C. \ ▲$$

**Пример 4.** Найти $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

$\Delta \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (\sin^4 x - 2 \sin^6 x + \sin^8 x) d \sin x =$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \ ▲$$
Пример 5. Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

Δ Применив формулы понижения степени, получим

$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \, dx =$

$= \frac{1}{8} (1 - \cos 2x) \cdot \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{8} \left( \int \sin^2 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx \right) =$

$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \quad \triangle$

Пример 6. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

Δ Функция $R(x) = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$ является четной по совокупности аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для ее интегрирования целесообразно применить подстановку $t = \tan x$.

$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} = \int \frac{\tan x \, dx}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} t = \tan x, \quad x = \arctg t \\ dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} \end{array} \right| =$

$= \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^2(1 + t^2)} \, dt = \int \frac{1 + t^2}{t^3} \, dt = \int \frac{dt}{t} + \int t^{-3} \, dt = \ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C. \quad \triangle$

Пример 7. Найти $\int \tan^7 x \, dx$.

Δ $\int \tan^7 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \tan x = t, \quad x = \arctg t \\ dx = \frac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^7 \, dt}{1 + t^2} =$

$= \int \frac{t^7 + t^5 - t^5 - t^3 + t^3 + t - t}{1 + t^2} \, dt = \int \left( t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1 + t^2} \right) \, dt =$

$= \frac{1}{6} t^6 - \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \ln|1 + t^2| + C = \frac{1}{6} \tan^6 x - \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C. \quad \triangle$

Пример 8. Найти $\int \cot^6 x \, dx$.

Δ $\int \cot^6 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cot x = t, \quad x = \arccot t \\ dx = -\frac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{t^6 \, dt}{t^2 + 1} =$

$= -\int \frac{t^6 + t^4 - t^4 - t^2 + t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} \, dt = \int \left( -t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) \, dt =$

$= -\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 - t - \arccot t + C = -\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x + C. \quad \triangle$
Пример 9. Найти \( \int \cos 2x \cos 6x \, dx \).

\[ \int \cos 2x \cos 6x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 8x) \, dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 8x + C. \]

Пример 10. Найти \( \int \frac{dx}{1 + \sin x} \).

\( \Delta \) Этот интеграл можно вычислить с помощью универсальной подстановки \( \tan \frac{x}{2} = t \), но проще произвести следующие преобразования:

\[ \int \frac{dx}{1 + \sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C. \]

Пример 11. Найти \( \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} \, dx \).

\( \Delta \) \[ \int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx + 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \tan^2 x \, dx + 2 \tan x - \sec x + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + 2 \tan x - \sec x + C. \]

Пример 12. Найти \( \int \frac{dx}{\sqrt{x + \frac{3}{\sqrt{x}}} \, dx} \).

\( \Delta \) Наименьшее общее кратное чисел (2, 3) равно 6, поэтому делаем подстановку \( x = t^6 \), \( dx = 6t^5 \, dt \).

\[ \int \frac{dx}{\sqrt{x + \frac{3}{\sqrt{x}}} \, dx} = 6 \int \frac{t^5 \, dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 \, dt}{t + 1} = 6 \left[ \frac{(t^3 + 1)}{t + 1} \right] \, dt = 6 \left[ t^3 \right. - t + 1 \left. - \frac{1}{t + 1} \right] \, dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t + 1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[5]{x} - 6 \ln \sqrt[6]{x + 1} + C. \]

Пример 13. Найти \( \int \frac{\sqrt{x + \frac{3}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} \, dx \).

\( \Delta \) Наименьшее общее кратное чисел (2, 3, 4, 6) равно 12, поэтому делаем подстановку \( x = t^{12} \).

\[ \int \frac{\sqrt{x + \frac{3}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} \, dx = \left| \begin{array}{c} x = t^{12} \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ = 12 \int \frac{t^{11}(t^6 + t^4)}{t^{15} - t^{14}} \, dt = 12 \int \frac{t^{11}}{t^1} \, dt = 12 \frac{t^{12}}{t^1 - 1} \right| \]
= 12 \int \frac{(t^3 - 1) + (t - 1) + 2}{t - 1} dt = 12 \int \frac{t^2 + 2 + \frac{2}{t - 1}}{t - 1} dt =

= 4t^3 + 6t^2 + 24t + 24 \ln|t - 1| + C = 4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 24\sqrt[12]{x} + 24 \ln\sqrt[12]{x} - 1| + C. ▲

Пример 14. Найти \( \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{dx}{1 - x} \).

\[ \Delta \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{dx}{1 - x} = \left| t = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}, \ x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right| = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} =

= 2\int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2t - 2\arctgt + C = 2\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - 2\arctg\left(\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\right) + C. ▲

Пример 15. Найти \( \int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx \).

\[ \Delta \text{Интеграл} \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \text{ можно найти по формуле}

\[ \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.

\int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}.

Для определения постоянных \( A, B \) и \( \lambda \) дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на \( \sqrt{x^2 - 2x} \):

\[ \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} = A\sqrt{x^2 - 2x} + (Ax + B)\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \lambda\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}};

\[ 2x^2 - x - 5 = A(x^2 - 2x) + (Ax + B)(x - 1) + \lambda = 2Ax^2 + (B - 3A)x + (\lambda - B).

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим \( A = 1, B = 2, \lambda = -3 \).

\[ \int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x} - 3\ln|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}| + C. ▲

\]
Пример 16. Найти \[ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}. \]

\[ \Delta \text{ Интегралы вида } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ можно найти подстановкой } x - \alpha = \frac{1}{t}, \]

\[ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x - 1 = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t^2} \left| \frac{1}{t\sqrt{1+2t}} \right| = -\int \frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}, \]

tак как \[ t = \frac{1}{x-1} < 0. \]

\[ \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = -\frac{1}{2} \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}} d(-1-2t) = -(1-2t)^\frac{1}{2} + C = \]

\[ = -\sqrt{1-\frac{2}{x-1}} + C = -\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} + C. \]

Пример 17. Найти \[ \int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}} dx. \]

\[ \Delta \text{ Интегралы вида } \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \text{ можно находить с помощью тригонометрических подстановок:} \]

\[ \int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{8-2(x+1)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \]

\[ = \left| \begin{array}{c} x + 1 = 2\cos \varphi, \ dx = -2\sin \varphi \ d\varphi, \ (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \sin \varphi = \sqrt{1-\cos^2 \varphi} = \sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} \end{array} \right| = \]

\[ = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2\cos \varphi - 1)^2 (-2\sin \varphi)}{2\sin \varphi} d\varphi = -2\sqrt{2} \int \cos^2 \varphi d\varphi + 2\sqrt{2} \int \cos \varphi d\varphi - \frac{\varphi}{\sqrt{2}} = \]

\[ = -2\sqrt{2} \int (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} (3\varphi + \sin 2\varphi - 4\sin \varphi) + C = \]

\[ = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \arccos \frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} (3-x)\sqrt{3-2x-x^2} + C. \]

Для данной подынтегральной функции применима также замена \[ x + 1 = 2\sin \varphi. \]

Пример 18. Найти \[ \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}, \ x > 0. \]
Пример 19. Интеграл \( \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx \) можно свести к интегралу от рациональной функции при помощи одной из подстановок Эйлера:

1) \( \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x \sqrt{a} + t \), если \( a > 0 \);

2) \( \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \), если \( c > 0 \);

3) \( \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) \cdot t \), если \( ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \).

Найти \( \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} \, dx \).

\( \Delta \) Так как \( a > 0 \) (\( a = 1 \)), то можно использовать первую подстановку Эйлера, причем более целесообразно в данном случае принять \( \sqrt{x^2 + A} = -x + t \).

Тогда \( x = \frac{t^2 - A}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} \, dt, \quad \sqrt{x^2 + A} = \frac{t^2 + A}{2t}, \quad t = x + \sqrt{x^2 + A} \).

Подставляя эти соотношения в подынтегральное выражение получим

\[
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \int \frac{2t (t^2 + A)}{(t^2 + A) 2t^2} \, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C.
\]

Мы получили табличный интеграл \( \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \).

Отметим, что нахождение интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким вычислениям.

Пример 20. Найти \( \int \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x^2} \, dx \).

\( \Delta \) \( \int \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{x^2} \, dx = \int x^{-\frac{2}{3}} \left( 1 + x^\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \, dx \). Это интеграл от дифференциального бинома. Здесь \( m = -\frac{2}{3}, \quad n = \frac{1}{3}, \quad P = \frac{1}{2}, \quad \frac{m + 1}{n} = 1 \) – целое число.
Имеем случай 2. Применим подстановку $1 + x^3 = t^2$, тогда

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = 2tdt.$$

Следовательно,

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1 + x^3\right)^{\frac{1}{2}}dx = 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = 2\left(1 + x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C. \ ▲$$

Пример 21. Найти $\int x^{-2} (1 + x^3)^{-\frac{5}{3}}dx$.

$\Delta$ Здесь $m = -2, n = 3, p = -\frac{5}{3}, \frac{m+1}{n} + p = -2$ – целое число.

Имеем случай 3. Применим подстановку $1 + x^3 = x^3 t^3$. Тогда $x^3 = \frac{1}{t^3 - 1}$,

$$1 + x^3 = \frac{t^3}{t^3 - 1}, x = (t^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}, dx = -t^2(t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}}dt.$$ 

$$\int x^{-2} (1 + x^3)^{-\frac{5}{3}}dx = -\int (t^3 - 1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{t^3}{t^3 - 1}\right)^{\frac{5}{3}}t^2(t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}}dt =$$

$$= \int t^\frac{-3}{2}dt = t^\frac{-2}{2} - t + C = \frac{-1 + 2t^3}{2t^2} + C = \frac{2 + 3x^3}{2x^3(1 + x^3)^2} + C. \ ▲$$

Дополнительные задачи

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\ln |\tan \frac{x}{2}| + \frac{5}{3}\ln |\tan \frac{x}{2} - 3| - \ln |\tan \frac{x}{2} - 1| + C.$

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + \frac{4}{3}\sqrt{\cos^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} + C.$

3. $\int \sin^4 3x dx$.

Ответ: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C.$
4. \[ \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} . \]
Ответ: \[ \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\tan x - 2}{\tan x + 8} \right| + C. \]
5. \[ \int \cos 2x \sin 12x \, dx. \]
Ответ: \[-\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{28} \cos 14x + C. \]
6. \[ \int \frac{dx}{\cos^6 x} . \]
Ответ: \[ \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C. \]
7. \[ \int \frac{3 \sqrt{x} \, dx}{x (\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})} . \]
Ответ: \[ 6 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \right| + C. \]
8. \[ \int \frac{dx}{\sqrt{x (4/\sqrt{x} + 1)^3}} . \]
Ответ: \[ -\frac{1}{2 (4/\sqrt{x} + 1)^8} + \frac{4}{9 (4/\sqrt{x} + 1)^9} + C. \]
9. \[ \int \frac{2 - x}{2 + x} \cdot \frac{dx}{(2 - x)^2} . \]
Ответ: \[ \frac{3}{8} \sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}} + C. \]
10. \[ \int \frac{dx}{(x - 1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}}, \quad x > 3. \]
Ответ: \[ \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{4(x - 1)^2} + \frac{1}{4 \sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{\sqrt{2}} + C. \]
11. \[ \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}} . \]
Ответ: \[ \frac{x - 1}{4 \sqrt{x^2 - 2x + 5}} + C. \]
12. \[ \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} \, dx. \]

Ответ: \( \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C. \)

13. \[ \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}. \]

Ответ: \( \frac{2x+3}{4} \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8} \ln \left| 2x-1+2\sqrt{x^2-x+1} \right| + C. \)

14. \(8 \cdot \int x^3 (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx. \)

Ответ: \( \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + C. \)

### Занятие 6

**Контрольная работа. Неопределенный интеграл**

**Вариант 1**

Найти интегралы:

1. \( \int x^3 (1-2x^4)^4 \, dx. \)  
Ответ: \( -\frac{1}{40} (1-2x^4)^5 + C. \)

2. \( \int x^2 (2x+5)^{10} \, dx. \)  
Ответ: \( \frac{1}{104} (2x+5)^{13} - \frac{5}{48} (2x+5)^{12} + \frac{25}{88} (2x+5)^{11}. \)

3. \( \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx. \)  
Ответ: \( 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C. \)

4. \( \int x^2 e^{-2x} \, dx. \)  
Ответ: \( -\frac{e^{-2x}}{2} \left( x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C. \)

5. \( \int \frac{2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}} \, dx. \)  
Ответ: \( -2\sqrt{1-x-x^2} + 7 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C. \)

6. \( \int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} \, dx. \)  
Ответ: \( \frac{3}{2} \ln |x+1| - 2 \ln |x+2| + \frac{1}{2} \ln |x+3| + C. \)

7. \( \int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} \, dx. \)
Ответ: $-\frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + 3\ln|x + 2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

8. $\int \sin^5 x \sqrt{\cos x} dx.$

Ответ: $-\frac{3}{80}\cos^3 x (20 - 16\cos^2 x + 5\cos^4 x) + C.$

9. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}.$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2 - \sqrt{5} + \tan\frac{x}{2}}{2 + \sqrt{5} + \tan\frac{x}{2}}\right| + C.$

10. $\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx.$

Ответ: $2\left(\frac{1}{3}x^\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x + 2x^\frac{1}{2}\right) - 4\ln|x + 1| + C.$

11. $\int x^3(1 + 2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$

Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + 2x^2}} + C.$

Вариант 2

Найти интегралы:

1. $\int x^4(1 - 3x^5)^4 dx.$

Ответ: $-\frac{1}{75}(1 - 3x^5)^5 + C.$

2. $\int x^2(2x - 3)^9 dx.$

Ответ: $\frac{1}{96}(2x - 3)^{12} + \frac{3}{44}(2x - 3)^{11} + \frac{9}{80}(2x - 3)^{10} + C.$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

Ответ: $\frac{3^3\sqrt{x^2}}{2}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt{x^2} + C.$

4. $\int x^2\sin 2x dx.$

Ответ: $-\frac{2x^2 - 1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.$

5. $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} dx.$

Ответ: $-3\sqrt{-x^2 + 6x - 8} + 13\arcsin(x - 3) + C.$

6. $\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} dx.$

Ответ: $3\ln|x - 1| - 7\ln|x - 2| + 5\ln|x - 4| + C.$
Занятие 7
Определенный интеграл

Пример 1. Показать, что функция Дирихле \( f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q \end{cases} \) не интегрируема на отрезке \([0;1]\).

Для любого разбиения отрезка \([0; 1]\) на частичных отрезках можно выбрать только рациональные значения \(\xi_i\). Тогда любая из интегральных сумм примет вид \(S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1\).

В случае же выбора на частичных отрезках только иррациональных значений \(\xi_i\) получим \(S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0\).

Поэтому не существует предела интегральных сумм, а это значит, что функция Дирихле не интегрируема на отрезке \([0;1]\). ▲

Пример 2. Вычислить, исходя из определения, интеграл \(\int_{0}^{1} xdx\).

По определению \(\int_{0}^{1} xdx = \lim_{\lambda \to 0, \xi = 1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i\).

Разобьем отрезок \([0;1]\) на \(n\) равных частей точками \(x_i = \frac{i}{n}\) \((i = 1,\ldots,n)\).
Длина каждого частичного отрезка равна \( \Delta x_i = \frac{1}{n} \). В нашем случае \( \lambda = \frac{1}{n} \), причем \( \lambda \to 0 \), при \( n \to \infty \).

В качестве точек \( \xi_i \) возьмем правые концы частичных отрезков:

\[ \xi_i = x_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \]

Составим интегральную сумму:

\[ S_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}. \]

\[ \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \]

Следовательно, \( \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}. \)

Легко показать, что и при другом выборе точек \( \xi_i \), например если в качестве \( \xi_i \) взять левые концы частичных отрезков, то предел интегральной суммы будет тот же.

\[ \lim_{n \to \infty} \lim_{\lambda \to 0} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \ldots + n - 1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \]

**Пример 3.** Используя геометрический смысл интеграла, вычислить \( I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \,dx. \)

\( \Delta \) Линия \( y = \sqrt{16 - x^2} \) есть верхняя половина окружности \( x^2 + y^2 = 16 \). Та часть линии, которая получается при изменении \( x \) от 0 до 4, лежит в первой координатной четверти. Таким образом, мы имеем криволинейную трапецию, которая является четвертью круга. Поэтому \( I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 16 = 4 \pi. \)

**Пример 4.** Установить, какой из двух интегралов \( \int_0^1 \sqrt{x} \,dx, \int_0^1 x^2 \,dx \) больше?

\( \Delta \) Так как \( \sqrt{x} > x^2 \) при \( 0 < x < 1 \), следовательно, \( \int_0^1 \sqrt{x} \,dx > \int_0^1 x^2 \,dx. \)

**Пример 5.** Оценить интеграл \( I = \int_0^3 (x^2 - 2x + 5) \,dx. \)

\( \Delta \) Функция \( y = x^2 - 2x + 5 \) на отрезке \([0;3]\) принимает наименьшее значение при \( x = 1 \), равное 4, и наибольшее значение при \( x = 3 \), равное 8.
Поэтому $4(3-0) \leq I \leq 8(3-0), \quad 12 \leq I \leq 24$. ▲

**Пример 6.** Оценить абсолютную величину интеграла $\int_{10}^{20} \frac{\cos x}{1 + x^6} \, dx$.

\[\Delta \quad \text{Tак как при } x \geq 10 \quad \left| \frac{\cos x}{1 + x^6} \right| \leq 10^{-6}, \quad \text{то} \quad \left| \int_{10}^{20} \frac{\cos x}{1 + x^6} \, dx \right| \leq 10^{-6} (20 - 10) = 10^{-5}. \quad \Delta\]

**Пример 7.** Найти среднее значение функции $y = |x| - 1$ на отрезке $[-1; 2]$ и все точки, в которых эта функция достигает своего среднего значения. Дать геометрическую интерпретацию.

\[\Delta \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} |x| - 1 \, dx = S_{ABCDK} = \frac{3}{2} \text{ (рис. 1).} \]

\[\begin{align*}
\text{Так как } f(\xi) &= \frac{1}{2 + 1} \int_{-1}^{2} f(x) \, dx = \frac{3}{2}, \quad \text{следовательно,} \\
|x| - 1 &= \frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2}.
\end{align*}\]

Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника $AHNK$. ▲

**Пример 8.** Найти производную от функции $\int_{0}^{\arctg t} t \, dt$.

\[\Delta \quad \text{Представим заданную функцию в виде сложной функции аргумента } x:\]

\[u(t) = x^3, \quad F(u) = \int_{0}^{\arctg t} t \, dt.\]

Сложная функция $F(u(t))$ является дифференцируемой, причем

\[\frac{d}{dx} F(u(t)) = \frac{d}{du} F(u) \bigg|_{u = x^3} \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} x^3.\]
Здесь
\[ \frac{d}{du} \int_0^u \arctg t \, dt = \frac{d}{du} \arctg u \mid_{u = x^3} = \arctg x^3, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2. \]

Таким образом, \( \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \arctg t \, dt = 3x^2 \cdot \arctg x^3 \). ▲

Пример 9. Найти предел \( \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx}{x^3}. \)

Очевидно, все условия, обеспечивающие законность применения правила Лопиталя выполняются. Поэтому
\[ \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left( \int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} \, dx \right)'}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. \] ▲

Пример 10. Вычислить \( \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}. \)

Так как на рассматриваемом промежутке одной из первообразных для функции \( y = \frac{1}{\cos^2 x} \) является функция \( y = \tan x \), то
\[ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \bigg|_0^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1. \] ▲

Пример 11. Вычислить \( \int_0^2 |1 - 5x| \, dx. \)

Так как \( |1 - 5x| = \begin{cases} 1 - 5x, & x \leq \frac{1}{5}, \\ 5x - 1, & x \geq \frac{1}{5}, \end{cases} \) то по свойству аддитивности интеграла
\[ \int_0^2 |1 - 5x| \, dx = \int_0^{1/5} (1 - 5x) \, dx + \int_{1/5}^{2} (5x - 1) \, dx = \frac{1}{5} x^2 \bigg|_0^{1/5} + 5 \int_{1/5}^{2} x \, dx = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} \right)^2 + 5 \left( \frac{1}{5} \right) x \bigg|_{1/5}^{2} = \frac{41}{5}. \] ▲
Пример 12. Вычислить \( \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx \).

\[
\Delta \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 x\right) \cos x \, dx = -\cos x\left|_0^{\pi/2}\right. - \frac{1}{3} \cos^3 x\left|_0^{\pi/2}\right. = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \square
\]

Пример 13. Вычислить \( \int_0^1 xe^{-x} \, dx \).

\[
\Delta \text{ Положим, } u = x, \ dv = e^{-x} \, dx. \text{ Тогда } du = dx \text{ и } v = -e^{-x}. \text{ Функции } u = x, \ v = -e^{-x} \text{ и их производные являются непрерывными на отрезке } [0;1]. \text{ Можно применить формулу интегрирования определенного интеграла по частям:}
\]

\[
\int_0^1 xe^{-x} \, dx = -xe^{-x}\left|_0^1\right. + \int_0^1 e^{-x} \, dx = -e^{-1} - e^{-x}\left|_0^1\right. = \frac{e-2}{e}. \quad \square
\]

Пример 14. Вычислить \( \int_1^e (1 + \ln x)^2 \, dx \).

\[
\Delta \text{ Применим дважды формулу интегрирования по частям:}
\]

\[
\int_1^e (1 + \ln x)^2 \, dx = \left. u = (1 + \ln x)^2, \ du = \frac{2(1 + \ln x)}{x} \, dx \right|_1^e \cdot x(1 + \ln x)^2\left|_1^e\right. -
\]

\[
-2\int_1^e (1 + \ln x) \, dx = \left. u = 1 + \ln x, \ du = \frac{dx}{x} \right|_1^e \cdot e(1 + \ln e)^2 - (1 + \ln 1)^2 -
\]

\[
-2x(1 + \ln x)\left|_1^e\right. + 2\int_1^e dx = 2e - 1. \quad \square
\]

Пример 15. Вычислить \( \int_0^9 \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} \).

\[
\Delta \text{ Сделаем замену } x = t^2. \text{ При } x = 0, \ t = 0, \ \text{а при } x = 9, \ t = 3. \text{ Функция } x = t^2 \text{ непрерывна вместе со своей производной на отрезке } [0;3], \text{ изменение переменной } t, \text{ причем значения } x = t^2 \text{ при изменении } t \text{ от 0 до 3 не выходят за пределы отрезка } [0;3] \text{ изменения переменной } x. \text{ Поэтому}
\]

\[
\int_0^9 \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2t \, dt}{t^2 + 2} = \int_0^3 \frac{2t + 4 - 4}{t^2 + 2} \, dt = \int_0^3 \frac{2t}{t^2 + 2} \, dt - \int_0^3 \frac{4}{t^2 + 2} \, dt =
\]

\[
= 2t\left. \left|_0^3 - 4 \ln (t + 2) \right|_0^3 = 6 - 4 \ln \frac{5}{2}. \quad \square
\]
Пример 16. Вычислить $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Положим $x = \sin t$. Функция $\sin t$ и ее производная $\cos t$ являются непрерывными функциями. Новые пределы интегрирования $\alpha$ и $\beta$ определяем из системы

\[
\begin{cases}
\sin \alpha = \frac{1}{2}, \\
\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{cases}
\]

Множеством всех ее решений является множество пар $(\alpha;\beta)$, где $\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ и $\beta = (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Возьмем из них, например, пару $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$. На отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ функция $x = \sin t$ является монотонной. Следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\beta = \frac{\pi}{3}$ можно взять за новые пределы интегрирования. На отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$.

Следовательно, имеем

\[I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t \, dt}{\sin t \cdot \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = \ln \left(\tan \frac{t}{2}\right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.\]

Можно взять некоторую другую пару, например $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right)$. На этом отрезке функция $x = \sin t$ является возрастающей, а $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = -\cos t$.

Следовательно,

\[I = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} = -\ln \left(\tan \frac{t}{2}\right) \bigg|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.\]

В то же время на отрезке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right)$ функция $x = \sin t$ не является монотонной. Поэтому $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\beta = \frac{2\pi}{3}$ не могут быть новыми пределами интегрирования. ▲

Пример 17. Функция $f(x) = 1 + 2x$ задана на отрезке $[0;1]$ и является четной. Вычислить $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$.

Для вычисления $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$ нет необходимости находить аналитическое...
выражение функции на отрезке \([-1;0]\). Ввиду четности функции

\[
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} (1 + 2x)\,dx = 2(x + x^2)\bigg|_{0}^{1} = 4. \quad \blacktriangle
\]

**Пример 18.** Вычислить \(\int_{-2}^{2} \cos x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx\).

\(\blacktriangle\) Подынтегральная функция является непрерывной на отрезке \([-2;2]\). Поэтому она является интегрируемой. Найдем \(f(-x)\):

\[
f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \cos x \cdot \ln\frac{(x + \sqrt{1 + x^2})(\sqrt{1 + x^2} - x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} =
\]

\[
= \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})^{-1} = -\cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x).
\]

Подынтегральная функция является нечетной, поэтому

\[
\int_{-2}^{2} \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx = 0. \quad \blacktriangle
\]

**Пример 19.** Вычислить \(\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx\).

\(\blacktriangle\) Поскольку \(\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2 \sin^2 x} = \sqrt{2} |\sin x|\) и функция \(f(x) = |\sin x|\) имеет период \(T = \pi\), то

\[
\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx = 200 \cdot \sqrt{2} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = -200 \sqrt{2} \cos x\bigg|_{0}^{\pi} = 400 \sqrt{2}. \quad \blacktriangle
\]

**Дополнительные задачи**

1. Применяя формулу \(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}\), вычислить по определению \(\int_{0}^{1} x^2\,dx\). Ответ: \(\frac{1}{3}\).

2. Не вычисляя интегралов, выяснить какой из них больше:

a) \(I_1 = \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}\) или \(I_2 = \int_{1}^{2} \frac{dx}{x}\);

б) \(I_1 = \int_{0}^{1} e^{-x} \cos^2 x\,dx\) или \(I_2 = \int_{0}^{1} e^{-x} \cos^2 x\,dx\).

Ответ: a) \(I_1 < I_2\); б) \(I_1 < I_2\).
3. Оценить интеграл \( I = \frac{2\pi}{\sqrt{6+4\sin x-3\cos x}} \).

Ответ: \( \frac{2\pi}{\sqrt{11}} < I < 2\pi \).

4. Найти производные следующих функций:
   a) \( \Phi(x) = \int_{1/x}^{x} \sin(t^2) dt \); б) \( \Phi(x) = \int_{x^2}^{\ln t} dt \) (\( x > 0 \)).

Ответ: а) \( \Phi'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x^2} \); б) \( \Phi'(x) = \frac{x^2-x}{\ln x} \).

5. Найти среднее значение функции \( f(x) = \cos x \) на отрезке \([0; \frac{\pi}{2}]\).

Ответ: \( \frac{2}{\pi} \).

6. Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интегралы:
   a) \( \int_{1}^{2} e^{x^2} \frac{1}{x^3} dx \); б) \( \int_{-1}^{-2} \frac{x+1}{x^3-x^2} dx \); в) \( \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos \phi} d\phi \).

Ответ: а) \( \frac{1}{2} (e - 4\sqrt{e}) \); б) \( 2\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \); в) \( 4\sqrt{2} \).

7. Вычислить интегралы с помощью замены переменной:
   a) \( \int_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}} \); б) \( \int_{-1}^{-2} \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx \); в) \( \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2} \); г) \( \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1-x^2}{x^2} dx \).

Ответ: а) \( \frac{2}{3} \left( 3 + \ln \frac{2}{5} \right) \); б) \( \frac{1}{6} \); в) \( \frac{1}{32} (\pi + 2) \); г) \( 1 - \frac{\pi}{4} \).

8. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:
   a) \( \int_{1}^{e} x^2 \ln x dx \); б) \( \int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \).

Ответ: а) \( \frac{2e^3}{9} + 1 \); б) \( \pi \sqrt{2} - 4 \).

Занятие 8

Геометрические и физические приложения определенных интегралов

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми \( y = x^2 - 2x + 2 \) и \( y = 2 + 4x - x^2 \).
Δ Начертим графики функций и найдем абсциссы их точек пересечения: \( x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2 \). Решая это уравнение, получим \( x_1 = 0 \) и \( x_2 = 3 \) (рис. 2).

![Рис. 2](image)

Искомая площадь равна
\[
S = \int_{0}^{3} \left( (2 + 4x - x^2) - (x^2 - 2x + 2) \right) dx = \int_{0}^{3} (6x - 2x^2) dx = \\
= \left[ 3x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^3 = 9. \ 
\]

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями \( y^2 = x + 1 \) и \( x - y = 1 \).

Δ Решая систему уравнений \[
\begin{cases} 
  y^2 = x + 1, \\
  x - y = 1,
\end{cases}
\]
находим \( M_1(0; -1) \) и \( M_2(3; 2) \).

Нижняя граница фигуры на разных частях отрезка \([-1; 3]\) задана различными функциями (рис. 3). Поэтому
\[
S = \int_{-1}^{0} \sqrt{1+x} - (-\sqrt{x+1}) \ dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - (x-1)) \ dx = \\
= 2 \int_{-1}^{0} (x+1)^{\frac{1}{2}} \ dx + \int_{0}^{3} (x+1)^{\frac{1}{2}} \ dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{2} d(x+1) - \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^3 = \\
= \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{0} + \left( \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.
\]
Площадь этой фигуры можно найти проще, если принять $y$ за независимую переменную, а $x$ за функцию. Тогда

$$S = \int_{-1}^{2} ((y + 1) - (y^2 - 1))dy = \left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$ ▲

Пример 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$ (рис. 4).

![Рис. 4](image)

$$\Delta \ S = \int_{0}^{2\pi} |\sin x - \cos x| \,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \,dx +$$

$$+ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \,dx = (\sin x + \cos x) \left|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right. +$$

$$+ (\sin x + \cos x) \left|_{0}^{\frac{2\pi}{4}} \right. = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}. \ ▲$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5).

$$\Delta \text{ Запишем параметрическое уравнение эллипса:}$$

$$x = a \cos t, \ y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Верхняя половина фигуры является криволинейной трапецией. При возрастании $x$ от $-a$ до $a$ параметр $t$ убывает от $\pi$ до 0. Поэтому
\[
S = 2 \int_{-a}^{a} y \, dx = \left[ x = a \cos t \right]_{y = b \sin t} = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) \, dt = -ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \, dt = \\
= -ab \left( t - \sin 2t \right) \bigg|_{0}^{\pi} = \pi ab. 
\]

Пример 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды \( x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \) (0 ≤ \( t ≤ 2\pi \)) и осью \( Ox \) (рис. 6).

\[ 
\begin{align*}
\Delta \text{ Фигура является криволинейной трапецией. При возрастании } x \text{ от 0 до } 2\pi a \text{ параметр } t \text{ возрастает от 0 до } 2\pi. \text{ Поэтому} \\
S &= \int_{0}^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) \, dt = \int_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) \, dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} \left( 1 - 2 \cos t + \cos^2 t \right) \, dt = \\
&= a^2 \left[ 1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right]_{0}^{2\pi} = a^2 \left[ \left( \frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos 2t}{2} \right) \right]_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2. 
\end{align*}
\]

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой \( r = 2a (1 + \cos \phi) \) (рис. 7).

\[ 
\Delta \text{ Фигура является криволинейным сектором, следовательно,} \\
S &= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} r^2 \, d\phi = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} 4a^2 \left( 1 + \cos \phi \right)^2 \, d\phi = \\
&= 2a^2 \int_{0}^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \phi + \cos^2 \phi \right) \, d\phi = \\
&= 2a^2 \int_{0}^{2\pi} \left( 1 + 2 \cos \phi + \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) \, d\phi = \\
&= 2a^2 \int_{0}^{2\pi} \frac{3}{2} \, d\phi = 6\pi a^2. 
\]
Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
\[ x^2 - 6x + y^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x. \]

Линия \( x^2 - 6x + y^2 = 0 \sim (x - 3)^2 + y^2 = 3^2 \) является окружностью (рис. 8).

![Рис. 8](image)

Площадь этой фигуры удобно вычислять, используя полярные координаты. В полярной системе координат \( x^2 - 6x + y^2 = 0 \).

\[
\begin{align*}
  x &= r \cos \varphi, \\
  y &= r \sin \varphi,
\end{align*}
\]

таким образом,

\[ S = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} 36 \cos^2 \varphi \, d\varphi = 9 \int (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = 9 \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3}{2} \pi. \]

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями \( x^2 + y^2 = a^2, \quad z = \sqrt{3}y, \quad z = 0 \) (y ≥ 0) (рис. 9).

1-й способ. Рассмотрим сечение этого тела плоскостями \( x = \text{const} \). В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

\[
S(x) = \frac{1}{2} y(x) \cdot z(x) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - x^2). \]

\[ V = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3. \]

2-й способ. Рассекая это же тело плоскостями...
\( y = \text{const} \), в сечениях получим прямоугольники с площадями:

\[
S(y) = 2x(y) \cdot z(y) = 2\sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{3}y.
\]

\[
V = 2\sqrt{3} \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3. \quad \uparrow
\]

**Пример 9.** Найти объем тела, полученного вращением области, заключенной между линиями \( y = x^2 \) и \( y = x \) вокруг оси абсцисс (рис. 10).

\[ \Delta \text{ Линии } y = x^2 \text{ и } y = x \text{ пересекаются в точках с абсциссами 0 и 1. Объем данного тела вращения равен разности объемов двух тел, полученных вращением вокруг оси } Ox \text{ двух криволинейных трапеций, соответствующих функциям } y = x \text{ и } y = x^2. \]

Следовательно,

\[
V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15} \pi. \quad \uparrow
\]

**Пример 10.** Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси \( Ox \) фигуры, образованной линиями \( y = \sqrt{x} \) и \( y = x \) (рис. 11).

\[ \Delta \text{ Площадь }
\]

\[
S_1 = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + ((\sqrt{x})')^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x} dx = \frac{1}{6} \pi (1 + 4x)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1).
\]

Площадь \( S_2 \) поверхности, образованной вращением отрезка прямой \( y = x \), равна

\[
S_2 = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (x')^2} dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 x dx = \sqrt{2}\pi.
\]

Таким образом,

\[
S = S_1 + S_2 = \left( \frac{5\sqrt{5}}{6} + \sqrt{2} - \frac{1}{6} \right) \pi. \quad \uparrow
\]

**Пример 11.** Кривая линия задана уравнением \( y = \ln \sin x \). Найти длину дуги \( AB \) этой кривой от \( x = \frac{\pi}{3} \) до \( x = \frac{\pi}{2} \).
\[ \Delta L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\ln x)^2} \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \ln t \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ln 3. \]

Пример 12. Вычислить длину астроиды \[ x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0) \] (рис. 12).

\[ \Delta \text{ Очевидно, что функции} \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ задают астроиду параметрически. Ввиду симметрии,} \]

\[ L = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \, dt = \]

\[ = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} \, dt = \]

\[ = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = \]

\[ = 6a \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = -3a \cos 2t \bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \]

Пример 13. Найти длину кардиоиды \[ r = a(1 + \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \] (рис. 13).
Ввиду симметрии,

\[ L = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2} d\phi = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + 2\cos \phi + \cos^2 \phi) + a^2 \sin^2 \phi} d\phi = \]

\[ = 2\int_0^\pi 2a^2(1 + \cos \phi) d\phi = 2\int_0^\pi 4a^2 \cos^2 \phi/2 d\phi = 4a\int_0^\pi \cos \phi/2 d\phi = 8a \sin \phi/2 \bigg|_0^\pi = 8a. \]

**Пример 14.** Тело движется прямолинейно со скоростью \( v = 12t - t^2 \) (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

\[ \Delta \text{ Найдем промежуток времени движения тела: } 12t - t^2 = 0, t \in [0;12]. \]

\[ S(t) = \int_0^{12} (12t - t^2) dt = \left( 6t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \bigg|_0^{12} = 144(6 - 4) = 288 \text{ м.} \]

**Пример 15.** Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга диаметром \( 2R \), который находится на поверхности воды (рис. 14).

\[ \Delta \text{ Согласно закону Паскаля, давление } \Delta P \text{ жидкости на площадку } \Delta S, \text{ погруженную на глубину } h \text{ равно } \Delta P = \rho gh\Delta S. \]

Дифференциал давления на выделенную элементарную площадку выражается так: \( dP = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx \). Отсюда

\[ P = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R (R^2 - x^2)^{3/2} d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3} \rho g (R^2 - x^2)^{3/2} \bigg|_0^R = \frac{2}{3} \rho g R^3. \]

**Пример 16.** Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если для удлинения ее на 1 см, необходимо приложить силу 100 Н.

\[ \Delta \text{ Согласно закону Гука, сила } F, \text{ растягивающая пружину, равна } F = kx. \]

Так как \( 100 = k \cdot 0.01 \), получаем \( k = 10^4 \). Следовательно, искомая работа равна

\[ A = \int_a^b F(x) dx = 10^4 \cdot \int_0^{0.1} x dx = 10^4 \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{0.1} = 50 \text{ Дж.} \]

**Пример 17.** Определить массу шара радиусом \( R \), если плотность в каждой точке его пропорциональна расстоянию точки от центра шара.

\[ \Delta \text{ При увеличении радиуса шара } x \text{ на величину } dx, \text{ объем } \Delta v \text{ этого шара увеличивается на величину } \Delta v, \text{ равную разности объемов шаров радиусами } x \text{ и } x + dx: \]

\[ \Delta v = \frac{4}{3} \pi ((x + dx)^3 - x^3) = \frac{4}{3} \pi (3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3). \]

Тогда дифференциал объема шара равен \( dv = 4x^2 \pi dx \), а дифференциал массы \( dM = kx \cdot dv = 4k \pi x^3 dx \).
Искомую массу $M$ шара радиусом $R$ получим, интегрируя $dM$ в пределах от $x = 0$ до $x = R$: \[ M = 4\pi k \int_0^R x^3 dx = k\pi x^4 \bigg|_0^R = k\pi R^4. \]

Пример 18. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из конического сосуда, обращенного вершиной вниз и имеющего радиус основания $R$ и высоту $H$.

Найдем объем элементарного слоя жидкости, находящегося на глубине $x$ (рис. 15):
\[ \frac{R}{H} = \frac{BC}{H - x}; \quad BC = \frac{R(H - x)}{H}; \quad dV = \frac{\pi R^2}{H^2} (H - x)^2 dx. \]

Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя на высоту $x$, равна \[ dA = \frac{\rho g \pi R^2}{H^2} (H - x)^2 x dx. \]

Следовательно,
\[ A = \int_0^H \left( \frac{\pi \rho g R^2}{H^2} (H - x)^2 x \right) dx = \frac{\rho \pi g R^2}{H^2} \left( \frac{1}{2} H^2 x^2 - \frac{2}{3} Hx^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \bigg|_0^H = \frac{\rho \pi g R^2 H^2}{12}. \]

Пример 19. Определить работу $A$, необходимую для запуска тела массой $m$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту $h$.

Обозначим через $F$ силу притяжения тела Землей. Согласно закону Ньютона \[ F = G \frac{m \cdot m_s}{x^2}, \] где $x$ – расстояние от центра Земли. Полагая $Gm \cdot m_s = k$, получаем \[ F(x) = \frac{k}{x^2}, \quad R \leq x \leq h + R, \] где $R$ – радиус Земли.

При $x = R$ \[ F(x) = mg = P, \] т. е. \[ \frac{k}{R^2} = P, \] откуда \[ k = PR^2 \] и \[ F(x) = \frac{PR^2}{x^2}. \]

Таким образом, \[ A = \int_R^{R+h} F(x) dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \cdot \frac{1}{x} \bigg|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}. \]

Дополнительные задачи

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

Ответ: $\frac{4}{3}$. 

47
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли
\[ r^2 = a^2 \cos 2\phi. \]
Ответ: \[ a^2. \]
3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной враxением вокруг оси абсцисс дугой кривой линии
\[ y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x + 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \]
Ответ: \[ \frac{8\pi}{15}. \]
4. Найти объем тела, ограниченного параболоидом \[ z = 2x^2 + 9y^2 \] и плоскостью \[ z = 2. \]
Ответ: \[ \frac{\pi \sqrt{2}}{3}. \]
5. Вычислить длину полукубической параболы \[ y^2 = x^3, \] заключенной между точками \((0; 0)\) и \((4; 8)\).
Ответ: \[ \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1). \]
6. Вычислить длину первого витка винтовой линии \[ x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \]
Ответ: \[ 2\pi \sqrt{a^2 + h^2}. \]
7. Скорость прямолинейного движения материальной точки \[ v = te^{-0.01t} \text{ м/с.} \]
Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.
Ответ: \[ 10^4 \text{ м.} \]
8. Найти силу давления жидкости, заполняющей круговой цилиндр, на боковые стенки цилиндра, если радиус основания \( R \), высота \( H \).
Ответ: \[ \rho g \pi R H^2. \]
9. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание жидкости из котла, имеющего форму полушара радиусом \( R \).
Ответ: \[ \frac{\pi \rho g R}{4}. \]

Занятия 9–10

Несобственные интегралы. Самостоятельная работа

Пример 1. Вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) \[ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \]
б) \[ \int_0^{+\infty} \frac{2xdx}{1 + x^2}, \]
в) \[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx; \]
г) \[ \int_0^{+\infty} x \sin x dx. \]
\[ \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} x^{-3} \, dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \]


\[ \int_{0}^{+\infty} \frac{2 \, dx}{1 + x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} \frac{2 \, dx}{1 + x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} d(1 + x^2) = \lim_{A \to +\infty} \ln(1 + x^2) \bigg|_{0}^{A} = \ln(1 + A^2) - 0 = +\infty. \]

Интеграл расходится.

в) \[ \int e^{x} \, dx = \int e^{x} \, dx + \int e^{x} \, dx. \]

Для того чтобы \( \int e^{x} \, dx \) сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственных интеграла \( \int_{0}^{+\infty} e^{x} \, dx \) и \( \int_{-\infty}^{0} e^{x} \, dx \).

Для этого влагаем

\[ \int_{0}^{+\infty} e^{x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} e^{x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} e^{x} \bigg|_{0}^{A} = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{A}) = 1. \]

\[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} e^{x} \bigg|_{0}^{A} = \lim_{A \to +\infty} (e^{A} - 1) = +\infty. \]

Интеграл расходится.

г) \[ \int x \sin x \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int x \sin x \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int x d(-\cos x) = \lim_{A \to +\infty} \left( -x \cos x \right) \bigg|_{0}^{A} + \cos x \bigg|_{0}^{A} = \lim_{A \to +\infty} (\cos x - A \cos A + \sin A). \]

Поскольку предел полученного выражения при \( A \to +\infty \) не существует, то рассматриваемый несобственный интеграл расходится. ▲

Пример 2. Вычислить следующие несобственные интегралы с помощью обобщенных формул Ньютона – Лейбница:

а) \[ \int_{2}^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}; \]

б) \[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \]

в) \[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1 + x)}. \]

Да) Функция \( f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}} \) имеется первообразную на \([2; +\infty]\) и интегрируема на любом конечном отрезке \([2; b]\). Тогда

\[ \int_{2}^{+\infty} f(x) \, dx = F(+\infty) - F(2) = F(x) \bigg|_{2}^{+\infty}, \]

где \( F(x) \) – любая первообразная.
\begin{align*}
\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}} &= \frac{1}{2} \int (x^2 - 3)^{3/2} d(x^2 - 3) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}; \\
- \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} \bigg|_{-\infty}^{\infty} &= -(0 - 1) = 1. \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x + 1}{2} \bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \\
\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2 (1 + x)}.
\end{align*}

Разложим дробь $\frac{1}{x^2 (1 + x)}$ на простейшие дроби:

\[
\frac{1}{x^2 (1 + x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{1 + x}. \quad Ax(1 + x) + B(1 + x) + Dx^2 = 1.
\]

Отсюда находим $A = -1, B = 1, D = 1$.

Таким образом,

\[
\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2 (1 + x)} = \int_{-\infty}^{-2} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x} \right) dx = \left[ -\ln |x| - \frac{1}{x} + \ln |1 + x| \right]_{-\infty}^{-2} = \left( \ln \left| \frac{1 + x}{x} \right| - \frac{1}{x} \right)_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2} - \ln 2. \quad \Delta
\]

Пример 3. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) \[ \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3} dx; \]

б) \[ \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \cos^2 x}}.\]

\[ \Delta \]

а) Функция $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3}$ интегрируема на любом конечном промежутке $[1; b] \subset [1; +\infty]$. Так как $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ ($S = 2$), то $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3} dx$ является сходящимся.

б) $f(x)$ непрерывна и $\frac{1}{\sqrt{x + \cos^2 x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($S = \frac{1}{2}$) $\forall x \in [1; +\infty]$, то $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \cos^2 x}}$ является расходящимся. \[ \Delta \]

Пример 4. Исследовать на сходимость интегралы:
а) \[
\int_{1}^{\infty} \frac{2x + 3\sqrt[4]{x^4} + 1}{x^2 + 3\sqrt[5]{x^5} + 2} \, dx;
\]
б) \[
\int_{2}^{\infty} \frac{(2x^4 - 7)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[9]{x^9} + 3x - 2} \, dx;
\]
в) \[
\int_{1}^{\infty} \frac{4\sqrt{x} + 1\arctg x}{\sqrt[4]{x^4} + 2} \, dx.
\]

\[
\Delta \quad a) \quad \frac{2x + 3\sqrt[4]{x^4} + 1}{x^2 + 3\sqrt[5]{x^5} + 2} = \frac{2x + 3\sqrt[4]{x^4} + 1}{x^2 + 3\sqrt[5]{x^5} + 2} \sim \frac{1}{3x^6}, \quad x \to +\infty.
\]

\[
\int_{1}^{\infty} \frac{2x + 3\sqrt[4]{x^4} + 1}{x^2 + 3\sqrt[5]{x^5} + 2} \, dx - \text{сходится}.
\]

\[
\int_{2}^{\infty} \frac{(2x^4 - 7)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[9]{x^9} + 3x - 2} \, dx - \text{расходится}.
\]

\[
\int_{1}^{\infty} \frac{4\sqrt{x} + 1\arctg x}{\sqrt[4]{x^4} + 2} \, dx - \text{сходится}.
\]

Пример 5. Исследовать сходимость интеграла \[
\int_{1}^{\infty} \frac{5\sin 3x - 1}{x^2 + \sqrt{x}} \, dx.
\]

\[
\Delta \quad \frac{|5\sin 3x - 1|}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{6}{x^2 + \sqrt{x}} \sim \frac{6}{x^2}, \quad x \to +\infty.
\]

\[
\int_{1}^{\infty} \frac{5\sin 3x - 1}{x^2 + \sqrt{x}} \, dx - \text{сходится абсолютно}.
\]

Пример 6. Доказать, что \[
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx \text{ сходится условно}.
\]

\[
\Delta \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} d\sin x = \frac{1}{x} \sin x \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx = -\frac{2}{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx.
\]
Так как \( \left| \sin \frac{x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x} \), то \( \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx \) сходится абсолютно, а значит, \( \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx \) является сходящимся.

Рассмотрим \( \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx \). \( \left| \cos \frac{x}{x} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1 + \cos 2x}{2x} \).

\[
\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1 + \cos 2x}{2x} \, dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{2x} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \, dx = \frac{\ln x}{2} \bigg|_{\pi/2}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \cos t \, dt.
\]

Так как \( \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt \) сходится, а \( \ln (+\infty) = +\infty \), то \( \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx \) является расходящимся. Таким образом, \( \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx \) сходится условно. ▲

Пример 7. Найти V.P. \( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \).

А ранее было установлено, что \( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2} \). Следовательно, V.P. \( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2} \). ▲

Пример 8. Найти V.P. \( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + 5 \, \text{sh} \, x} \, dx \).

А функция \( f(x) = \sqrt{x^2 + 5 \, \text{sh} \, x} \) является нечетной и интегрируема на любом конечном отрезке. Поэтому V.P. \( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2 + 5 \, \text{sh} \, x} \, dx = 0 \). ▲

Пример 9. Исходя из определения, вычислить несобственные интегралы второго рода или доказать их расходимость:
\[ a) \int_{1}^{e} \frac{dx}{x^{3/\ln x}}; \quad b) \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}. \]

\[ \Delta \] а) Подынтегральная функция \( f(x) = \frac{1}{x^{3/\ln x}} \) неограничена в окрестности точки \( x = 1 \). На любом отрезке \([1 + \varepsilon; e]\) она интегрируема. Поэтому

\[ \int_{1}^{e} \frac{dx}{x^{3/\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x^{3/\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \frac{3}{2} \ln^{2} x \right)^{\pi/2}_{1+\varepsilon} = 3/2. \]

б) \( \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln\tan \left( \frac{x + \pi}{4} \right)^{\pi/2}_{0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left( \frac{\pi/2 - \varepsilon}{\pi/2} \right) = +\infty. \]

Следовательно, данный интеграл расходится. \( \Delta \)

Пример 10. Вычислить несобственный интеграл \( \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \) с помощью обобщенной формулы Ньютона – Лейбница.

\( \Delta \) Функция \( F(x) = \arcsin \frac{x}{2} \) является обобщенной первообразной для \( f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \) на \([0; 2]\). Поэтому \( \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2}\bigg|_{0}^{2} = \frac{\pi}{2}. \)

\[ \Delta \]

Пример 11. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) \( \int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}; \quad b) \int_{1}^{3} \frac{dx}{(5 - x)(x - 2)^{5}}; \quad \text{в) } \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{16 - x^4}}; \]

г) \( \int_{0}^{\arcsin \sqrt[3]{x}} \frac{dx}{\ln (1 + \sqrt[3]{x})}. \)

\[ \Delta \] а) Функция \( \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} \) интегрируема на любом отрезке \([\varepsilon; 2] \subset (1; 2]\).

При всех \( x \in (1; 2] \) \( 0 < \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = \frac{1}{\sqrt{5 - x}(x - 1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(x - 1)^{1/2}}. \)

\( \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{16 - x^4}} \) сходится, так как \( S = \frac{1}{2} < 1 \). Тогда в силу теоремы сравнения рассматриваемый несобственный интеграл тоже сходится.

б) Особая точка \( x = 2 \).
\[
\int \frac{3}{(5-x)(x-2)^5} \, dx = \int \frac{2}{(3-x)(x-2)^5} \, dx + \int \frac{3}{2(3-x)(x-2)^5} \, dx.
\]

Для сходимости \( \int \frac{3}{(5-x)(x-2)^5} \, dx \) необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственные интеграла
\[
\int \frac{2}{(3-x)(x-2)^5} \, dx \quad \text{и} \quad \int \frac{3}{2(3-x)(x-2)^5} \, dx.
\]

Рассмотрим \( \int \frac{2}{(3-x)(x-2)^5} \, dx \).

Функция \( f(x) = \frac{1}{(3-x)(x-2)^5} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^5} \) для \( x \in (1; 2) \). Так как \( \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^5} \, dx \) расходится \( (S = \frac{5}{3} > 1) \), то и \( \int \frac{3}{2(3-x)(x-2)^5} \, dx \) тоже расходится.

в) \( \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\frac{x^2+1}{\frac{3}{4}+x^2} \cdot \frac{3}{2}+x} \cdot \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} \), \( x \to 2 \).

На основании предельного признака сходимости \( \int \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \) сходится.

g) \( \frac{x}{x^3} = 1 \), \( x \to +0 \).

На основании предельного признака сходимости \( \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\ln (1+\sqrt{x^3})} \, dx \) расходится.

Пример 12. Найти \( V.P. \int_{-2}^{4} \frac{dx}{x} \).

А) Особая точка \( x = 0 \).

\[
V.P. \int_{-2}^{4} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left( \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{4} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left( \ln |x|_{-\varepsilon}^{-2} + \ln |x|_{\varepsilon}^{4} \right) = \\
= \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln \varepsilon - \ln 2 + \ln 4 - \ln \varepsilon) = \ln 2.
\]

Пример 13. Исследовать на сходимость \( \int_{1}^{\infty} \frac{\arctg x}{x^n+1} \, dx \), \( n > 0 \).
Функция \( f(x) = \frac{x^n \arctg x}{x^n + 1} \) интегрируема на любом отрезке \([1;b]\).

При \( x \to +\infty \) \( f(x) = \frac{x^n \arctg x}{x^n + 1} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \).

\[ \int \frac{x^n \arctg x}{x^n + 1} \, dx \] является сходящимся при \( n - m > 1 \). ▲

Пример 14. Исследовать на сходимость \( I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} \).

Этот интеграл может быть несобственным интегралом смешанного типа (от неограниченной функции и по бесконечному промежутку). Представим исследуемый интеграл \( I \) в виде

\[ I = \frac{\int_0^a}{dx} + \frac{\int_a^{\infty}}{dx} = I_1 + I_2. \]

Если \( p = q = S \), то \( I_1 \) является сходящимся при \( S < 1 \), а \( I_2 \) является сходящимся при \( S > 1 \), т. е. \( I \) расходится.

Пусть \( p \neq q \) (для определенности \( p < q \)).

Тогда \( f(x) = \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^p} \), \( x \to 0 \); \( f(x) = \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^q} \), \( q \to \infty \).

\( I_1 \) является сходящимся при \( p < 1 \), \( I_2 \) является сходящимся при \( q > 1 \). В итоге получаем, что интеграл \( I \) является сходящимся, если одновременно \( \min \{p, q\} < 1 \) и \( \max \{p, q\} > 1 \), и расходится в остальных случаях. ▲

Пример 15. Доказать, что интегралы Френеля \( \int_0^{\infty} \sin (x^2) \, dx \) и \( \int_0^{\infty} \cos (x^2) \, dx \) являются сходящимися.

\[ I = \int_0^{\infty} \sin (x^2) \, dx = \left. \frac{x = \sqrt{t}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt. \]

\[ \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = I_1 + I_2. \]

Интеграл \( I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt \) является сходящимся, так как \( \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0 \).
\[
I_2 = \int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \left| \frac{1}{\sqrt{t}} = u, \, du = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \, dt \right| = -\cos t \left| \int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt - \frac{1}{2} \int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \cos t \, t^{\frac{1}{2}} \, dt \right|
\]

\[
= -\frac{1}{2} \int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt.
\]

\[
\int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} \, dt \text{ сходится абсолютно, так как } \left| \cos t \right| \leq 1, \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}, \text{ и } \int_\frac{\pi}{2}^{+\infty} \cos t \, t^{\frac{1}{2}} \, dt \text{ сходится.}
\]

Аналогично доказывается сходимость \[
\int_0^{+\infty} \cos (x^2) \, dx.
\]

Интегралы Френеля показывают, что несобственный интеграл первого рода может сходиться и в том случае, когда подынтегральная функция не стремится к нулю при \( x \to \infty. \)

Дополнительные задачи

1. Вычислить следующие несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

   a) \[
   \int_2^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}};
   \]
   b) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^2 \ln x}};
   \]
   c) \[
   \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx;
   \]
   d) \[
   \int_0^{+\infty} x \cos x \, dx.
   \]

   Ответ: a) \( \frac{1}{3} \); b) расходится; c) \( \frac{1}{2} \); d) расходится.

2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

   a) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}};
   \]
   b) \[
   \int_1^{+\infty} \frac{7/2 + 3x^2}{\sqrt{x^2 + 3x}} \, dx;
   \]
   c) \[
   \int_0^{+\infty} \cos (x^2) \, dx.
   \]

   Ответ: a) сходится; b) расходится; c) сходится.

3. Вычислить следующие несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

   a) \[
   \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}};
   \]
   b) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3};
   \]
   c) \[
   \int_1^{+\infty} \frac{e^x \, dx}{x \sqrt{\ln x}};
   \]
   d) \[
   \int_0^{+\infty} \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}.
   \]

   Ответ: a) \( \frac{\pi}{2} \); b) расходится; c) \( 2\sqrt{2} \); d) расходится.

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

   a) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 - x^3}};
   \]
   b) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sin x};
   \]
   c) \[
   \int_0^{+\infty} \frac{\ln (1 + \sqrt{x})}{e^{\sqrt{x}} - 1} \, dx.
   \]

56
Ответ: а) сходится; б) расходится; в) сходится.
5. Найти главные значения несобственных интегралов:
   а) \( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x}{1 + x^2} \, dx \); б) \( \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \).
Ответ: а) \( \pi \); б) 0.
6. Найти при каких значениях \( p \) интеграл
   \( \int_{0}^{\infty} \frac{\arctg x}{x^p} \, dx \) является сходящимся.
Ответ: \( 1 < p < 2 \).

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вычислить \( \int_{0}^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}} \).
Ответ: \( 2 - \ln 2 \).
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями \( xy = 6 \) и \( x + y - 7 = 0 \).
Ответ: \( \frac{35}{2} - 6 \ln 6 \).

Найти объем тела, ограниченного поверхностями \( x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \), \( z = 0 \), \( z = 2 \).
Ответ: \( \frac{28}{3} \pi \).
4. Пластина, имеющая форму равнобедренного треугольника с основанием \( a \) и высотой \( b \), вертикально погружена в жидкость плотностью \( \rho \). Вершина треугольника находится на поверхности жидкости, основание — параллельно этой поверхности. Найти силу давления жидкости на пластину.
Ответ: \( \frac{1}{3} \rho gab^2 \).
5. Найти работу, затрачиваемую на выкачивание жидкости из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого \( a \), радиус \( r \). Плотность жидкости равна \( \rho \).
Ответ: \( \rho gar^2 \).
6. Исследуйте сходимость интеграла
   \( \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x^3}}{\sqrt[3]{3 + 4x^3}} \, dx \).
Ответ: расходится.

7. Исследовать сходимость интеграла \( \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x + 2x^2}} \, dx \).

Ответ: сходится.

Вариант 2

1. Вычислить \( \int_{1}^{9} x^{3/2} - x \, dx \).

Ответ: \(-\frac{468}{7}\).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями \( xy = 1 \) и \( 3x + 4y = 7 \).

Ответ: \( \frac{7}{24} - \ln \frac{4}{3} \).

3. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара \( x^2 + y^2 + z^2 = 16 \) плоскостями \( x = 2 \) и \( x = 3 \).

Ответ: \( \frac{29}{3} \pi \).

4. Пластина в форме прямоугольника с катетами \( a \) и \( b \) опущена вертикально в жидкость плотностью \( \rho \) так, что катет \( a \) находится на поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластину.

Ответ: \( \frac{\rho gab^2}{6} \).

5. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды \( H \), сторона основания \( a \), плотность материала \( \rho \).

Ответ: \( \frac{1}{12} \rho ga^2 H \).

6. Исследовать сходимость интеграла \( \int_{0}^{\infty} \frac{3\sqrt{1 + 5x^2}}{5\sqrt[9]{3x^4} + 4} \, dx \).

Ответ: сходится.

7. Исследовать сходимость интеграла \( \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[5]{x^5} + x^7} \, dx \).

Ответ: расходится.
Занятие 11

Основные понятия функции нескольких переменных.
Частные производные, дифференциал

Пример 1. Найти и изобразить область определения функции:

а) \( z = \ln (2x - y) \);

б) \( z = y\sqrt{\sin x} \);

c) \( z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1} \);

d) \( z = \arccos\frac{1}{x+y} \);

e) \( z = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arccos(1-y) \).

\[ \Delta \]

а) Область определения функции описывается неравенством \( y < 2x \) (рис. 16).

б) Областью определения функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству \( \sin x \geq 0 \). Это неравенство эквивалентно совокупности неравенств \( 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \) (рис. 17).
в) \[ |y| \leq 1, \quad |y| \geq 1 \] (рис. 18).

г) \[ \begin{cases} y + x \geq 1, \\ y + x \leq -1 \end{cases} \sim \begin{cases} y \geq 1 - x, \\ y \leq -1 - x \end{cases} \] (рис. 19).
Пример 2. Найти линии уровня функции:

а) \( z = x^2 + y^2; \)  
б) \( z = x^2 - y^2; \)  
в) \( z = \ln (x^2 + y); \)  
г) \( z = \sqrt{xy}; \)  
д) \( z = (x + y)^2. \)

Ответ: а) концентрические окружности \( x^2 + y^2 = c, \ c \geq 0; \)  
б) семейство равносторонних гипербол \( x^2 - y^2 = c, \ c \neq 0; \) при \( c = 0 \) – пара прямых \( y = \pm x; \)  
в) параболы \( y = c - x^2, \ c > 0; \)  
г) семейство равносторонних гипербол \( xy = c, \ c > 0; \) при \( c = 0 \) – ось координат;  
д) параллельные прямые \( y = c - x, \ c \geq 0. \)

Пример 3. Найти поверхности уровня следующих функций:

а) \( u = x + y + z; \)  
б) \( u = x^2 + y^2 - z^2. \)

Ответ: а) плоскости \( x + y + z = c, \)  
б) однополостные гиперболоиды \( x^2 + y^2 - z^2 = c, \ c > 0; \)  
двуполостные гиперболоиды при \( c < 0, \) конус при \( c = 0. \)

Пример 4. Показать, что следующие пределы

а) \( \lim_{x \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \)

б) \( \lim_{x \to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \)

не существуют.

\( \Delta \) а) Исследуем предел этой функции по различным направлениям в точке \( (0; 0): \)
\[
\lim_{x \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.
\]

Полученное значение зависит от \(k\). Следовательно, указанный предел не существует.

б) Поступим аналогичным способом:

\[
\lim_{x \to 0} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = 0.
\]

В то же время \[
\lim_{x \to 0} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} = \frac{1}{2}.
\]

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе хотя и существует, но отличен от общего значения пределов по направлениям. Тем самым мы показали, что предел в точке \((0; 0)\) не существует. ▲

Пример 5. Вычислить следующие пределы:

а) \[
\lim_{x \to \pi, y \to \pi} \frac{\sin x - \sin y}{x - y};
\]

б) \[
\lim_{x \to \infty, y \to \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4};
\]

в) \[
\lim_{x \to \infty, y \to a} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + y}.
\]

\[\Delta \quad \text{а)} \quad \lim_{x \to \pi, y \to \pi} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \lim_{x \to \pi, y \to \pi} \frac{2\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2} = \lim_{x \to \pi, y \to \pi} \cos \frac{x+y}{2} = -1.
\]

б) Пусть \(x \neq 0, y \neq 0\), тогда

\[
0 < \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2}{x^4 + y^4} < \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.
\]

Поскольку \[
\lim_{x \to \infty, y \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0,
\]
то и \[
\lim_{x \to \infty, y \to \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0.
\]

в) Имеем \[
\lim_{x \to \infty, y \to a} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + y} = \lim_{x \to \infty, y \to a} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \lim_{x \to \infty, y \to a} \frac{x}{x + y} = e. ▲
\]

Пример 6. Исследовать функцию \(z = \frac{\ln (xy + y^2)}{\sqrt{x}}\) на непрерывность.

\[\Delta \quad \text{Область определения частного двух функций есть пересечение областей определения делимого и делителя, из которого удалены точки, в которых делитель обращается в нуль. В данном случае область определения описывается системой неравенств:}
\]

\[
\begin{cases}
xy + y > 0, \\
x > 0
\end{cases}
\quad \begin{cases}
x > 0, \\
y > 0.
\end{cases}
\quad ▲
\]
Пример 7. Исследовать функцию \( z = \frac{x + y}{x^3 + y^3} \) на непрерывность. Найти предел функции в точках разрыва.

Поскольку числитель и знаменатель – непрерывные функции, то функция имеет разрыв лишь в точках, где знаменатель \( x^3 + y^3 \) обращается в нуль, т. е. на прямой \( y = -x \).

Пусть \( x_0 \neq 0, \ y_0 \neq 0, \ x_0 + y_0 = 0, \) тогда

\[
\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{x + y}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} = \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2}.
\]

Значит, точки прямой \( y = -x, \ (x \neq 0) \) – точки устранимого разрыва функции \( z \). Из соотношения \( \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2} = +\infty \) следует, что точка \( O (0; 0) \) – точка бесконечного разрыва. ▲

Пример 8. Пользуясь определением частных производных, найти \( \frac{\partial z}{\partial x} \) и \( \frac{\partial z}{\partial y} \), если \( z = xy^2 \).

\[
\Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x; y) - z(x; y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y^2 - xy^2}{\Delta x} = y^2.
\]

\[
\Delta \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x; y + \Delta y) - z(x; y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y + \Delta y^2) - xy^2}{\Delta y} = 2xy.
\]

Пример 9. Найти частные производные следующих функций:

а) \( z = x^2 + y^3 + 3x^2y^3; \) \hspace{0.5cm} б) \( z = \arctg \frac{y}{1 + x^2}; \) \hspace{0.5cm} в) \( u = e^x + e^{-\frac{y}{z}}; \)

g) \( z = \tan (x + 2y) \cdot e^y; \) \hspace{0.5cm} д) \( u = \left( \frac{y}{x} \right)^z. \)

\[
\Delta \text{а)} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x^2y^2; \]

\[
\text{б)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1 + x^2)^2}} \cdot y(-1)(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2xy}{x^4 + 2x^2 + 1 + y^2},
\]
\[
\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2} \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right) = \frac{x^2 + 1}{1 + x^2};
\]

в) \( \frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cdot \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^y \cdot \frac{x}{y^2} + e^y \left( -\frac{1}{z} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^y \cdot \frac{y}{z}; \)

g) \( \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x + 2y)} \cdot e^y + \tan(x + 2y) \cdot e^y \cdot \frac{1}{y}; \)

д) \( \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \left( \frac{y}{x} \right)^{z-1} \cdot \left( -\frac{y}{x^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot \left( \frac{y}{x} \right)^{z-1} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{y}{x} \right)^z \cdot \ln \left( \frac{y}{x} \right). \)

Пример 10. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) \( z = \ln \frac{y}{x}; \) б) \( z = e^x (\cos y + x \sin y). \)

Да) Найдем частные производные:

а) \( \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{y}{x}} \cdot \frac{2y}{x^2 \sin^2 \frac{y}{x}} = \frac{2y}{x^2 \sin^2 \frac{y}{x}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}}. \)

Следовательно, \( dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}} \left( dy - \frac{y}{x} dx \right). \)

б) \( \frac{\partial z}{\partial x} = e^x (\cos y + x \sin y) + e^x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x (\cos y + x \sin y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^x (-\sin y + x \cos y), \quad dz = e^x (x \cos y - \sin y) dy + (\sin y + \cos y + x \sin y) dx. \)

Дополнительные задачи

1. Определить область определения функций:

а) \( z = \sqrt{x + y + \sqrt{x - y}}; \) б) \( z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}. \)

Ответ: а) замкнутый угол, ограниченный лучами \( y = x, \ x \geq 0 \) и \( y = -x, \ x \geq 0; \) б) семейство концентрических колец \( 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k + 1) \) \( (k = 0, 1, 2, \ldots). \)

2. Найти множество значений функции \( z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3. \)

Ответ: \([-4; +\infty)]. \)

3. Вычислить пределы:
a) \(\lim_\sub{x\to0\atop y\to a} \frac{\sin xy}{y}\);   б) \(\lim_\sub{x\to\infty\atop y\to\infty} (x + y)e^{-(x^2+y^2)}\); в) \(\lim_\sub{x\to0\atop y\to0} \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} \right) - \frac{1}{x^2+y^2}\).

Ответ: а) \(a\); б) 0; в) \(\sqrt{e}\).

4. Доказать, что \(\lim_\sub{x\to0\atop y\to0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}\) не существует.

5. Доказать, что функция
\[
\begin{cases}
\cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2xy \\
1, \ xy = 0
\end{cases}, \ \text{ху} \neq 0,
\]
является непрерывной в точке \(O(0; 0)\).

6. Найти точки разрыва функции \(z = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}\).

Ответ: \(x = k\pi, \ y = m\pi, \ k, m \in \mathbb{Z}\).

7. Найти частные производные следующих функций:

а) \(z = xy + \frac{x}{y}\);   б) \(z = x\sin (x + y)\);   в) \(u = x^2\);   г) \(u = \arctg \frac{y}{x}\).

Ответ: а) \(\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}\); б) \(\frac{\partial z}{\partial x} = \sin (x + y) + x\cos (x + y), \ \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos (x + y)\);

в) \(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2}\ln z\); г) \(\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}\).

8. Найти дифференциалы функций:

а) \(z = \ln \tg \frac{y}{x}\);   б) \(z = \arctg \frac{xy}{z^2}\) в точке \(M (3; 2; 1)\).

Ответ: а) \(\frac{2}{x \sin 2y} \left( dy - \frac{y}{x} \, dx \right)\); б) \(\frac{2\, dx + 3\, dy - 12\, dz}{37}\).

Занятие 12

Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению

Пример 1. Предполагая, что \(x\) и \(y\) малы по абсолютной величине, вывести
формулу \((1 + x)^m \cdot (1 + y)^n \approx 1 + mx + ny\).

Рассмотрим функцию \(z = (1 + x)^m \cdot (1 + y)^n\). При \(x_0 = y_0 = 0\) имеем \(z_0 = 1\). Находим полный дифференциал функции \(z = (1 + x)^m \cdot (1 + y)^n\) в любой точке:

\[
dz = m(1 + x)^{m-1} \cdot (1 + y)^n \Delta x + n(1 + y)^{n-1} (1 + x)^m \Delta y.
\]

Так как \(z_0 = 1\), \(\Delta x = x - x_0 = x\), \(\Delta y = y - y_0 = y\), окончательно получаем

\[
(1 + x)^m \cdot (1 + y)^n \approx z_0 + dz \bigg|_{y = 0} \approx 1 + mx + ny. \quad \star
\]

**Пример 2.** Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить \(\sqrt{1,02^3 + 1,97^5}\).

При \(x_0 = 0\), \(y_0 = 0\) имеем \(z_0 = 3\). Находим полный дифференциал функции:

\[
dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{2} ((1 + x)^3 + (2 + y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(1 + x)^2 dx +
\]

\[
+ \frac{1}{2} ((1 + x)^3 + (2 + y)^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3(2 + y)^2 dy.
\]

В нашем случае \(x_0 = 0\), \(y_0 = 0\), \(z_0 = 3\), \(\Delta x = dx = 0,02\), \(\Delta y = dy = -0,03\).

Таким образом, \(\sqrt{1,02^3 + 1,97^5} \approx z_0 + \frac{\Delta x}{2} - 2\Delta y = 3 + 0,01 - 0,06 = 2,95. \quad \star\)

**Пример 3.** Закрытый ящик, имеющий наружные размеры \(x = 10\) см, \(y = 8\) см, \(z = 6\) см, сделан из фанеры толщиной 0,2 см. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

Найдем объем ящика \(V = xyz\). Объем, затраченного на ящик материал, приближенно равен \(|dV|\).

\[
dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yzdx + xzdy + yxdz.
\]

Так как \(dx = dy = dz = -0,4\), окончательно получим

\[
dV = -8 \cdot 6 \cdot 0,4 - 10 \cdot 6 \cdot 0,4 - 10 \cdot 8 \cdot 0,4 \approx -75.
\]

Таким образом, внутренний объем ящика меньше внешнего объема на 75 см³, т. е. объем затраченного на ящик материала приближенно равен 75 см³. \quad \star

**Пример 4.** Найти \(\frac{dz}{dt}\), если \(z = \frac{x}{y}\), где \(x = e^t\), \(y = \ln t\).

\[
\Delta \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} e^t - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t} e^t - \frac{e^t}{\ln^2 t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}. \quad \star
\]

**Пример 5.** Найти \(\frac{du}{dt}\), если \(u = xyz\), где \(x = t^2 + 1\), \(y = \ln t\), \(z = \tan t\).
\[ \Delta \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = 2t \ln t \cdot \tan t + \frac{(t^2 + 1) \tan t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}. \]

Пример 6. Найти \( \frac{\partial z}{\partial x} \) и \( \frac{\partial z}{\partial y} \), если \( z = \arctg \frac{y}{x}, \quad y = x^2 \).

\[ \Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + y^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x(1 + \frac{y^2}{x^2})} \cdot 2x = -\frac{x^2}{x^2 + x^4} + \frac{2x^2}{x^2 + x^4} = \frac{1}{1 + x^2}. \]

Пример 7. Найти \( \frac{\partial z}{\partial x} \) и \( \frac{\partial z}{\partial y} \), если \( z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = 3x - 2y \).

\[ \Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2u \cdot \ln v \cdot \frac{1}{y} + u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot 3 = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \ln (3x - 2y) \cdot \frac{1}{y} + \frac{x^2 \cdot 3}{y^2 (3x - 2y)} = \frac{2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \ln (3x - 2y) \left( -\frac{x}{y^2} \right) + \frac{x^2}{y^2 (3x - 2y)} \cdot (-2) = -2 \frac{x^2}{y^3 (3x - 2y)} - \frac{2x^2}{y^2 (3x - 2y)}. \]

Пример 8. Найти \( \frac{\partial u}{\partial \xi} \) и \( \frac{\partial u}{\partial \eta} \), если \( u = \ln (x^2 + y^2), \quad x = \xi \eta, \quad y = \xi \eta \).

\[ \Delta \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \eta + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{2 \xi \eta^2}{\xi^2 \eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} + \frac{2 \xi \eta^4 + 2 \xi}{\xi^2 \eta^4 + \xi^2} = \frac{2 \xi}{\eta} \cdot \frac{1}{\xi^2 \eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} \cdot \frac{2 \xi \eta^4 + 2 \xi}{\xi^2 \eta^4 + \xi^2} \cdot \left( -\frac{\xi}{\eta^2} \right) = \frac{2 \xi^2 \eta}{\xi^2 \eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}} - \frac{2 \xi \eta}{\xi^2 \eta^2 + \frac{\xi^2}{\eta^2}}. \]
Пример 9. Показать, что функция \( z = y\varphi(x^2 - y^2) \) удовлетворяет уравнению 
\[
\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.
\]
\[\nabla\]

Пусть \( x^2 - y^2 = t \) является промежуточным аргументом. Тогда
\[
\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(t) \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(t) + y \cdot \varphi'(t)(-2y).
\]

Подставляя частные производные в левую часть уравнения будем иметь
\[
\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot y\varphi'(t) \cdot 2x + \frac{1}{y} (\varphi(t) - 2y^2 \varphi'(t)) = 2y\varphi'(t) + \frac{1}{y} \varphi(t) - 2y\varphi'(t) = z \cdot \frac{1}{y^2}.
\]

Пример 10. Найти производную функции \( u = x^2yz \) в точке \( M_0(2; -3; 1) \) по направлению \( \vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k} \).

\[\nabla\]

Находим частные производные функции \( u \) в точке \( M_0 \):
\[
\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2xyz = -12; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = x^2z = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = x^2y = -12.
\]

Определим направляющие косинусы вектора \( \vec{e} \):
\[
\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{4}{13}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{13}; \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}.
\]

\[\nabla\]

Точке \( M_0(2; -3; 1) \) соответствует значение параметра \( t = \frac{\pi}{2} \). Тогда
Отсюда следует, что направляющие косинусы касательной к окружности в точке $M_0$ равны $\cos \alpha = -1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$.

Найдем значения частных производных в точке $M_0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{y + z}{xy + yz + xz} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{x + z}{xy + yz + xz} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = \frac{y + x}{xy + yz + xz} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial e} \right|_{M_0} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2. \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A(a; 0; 0)$ и $B(0; b; 0)$, ($ab \neq 0$).

$\Delta$ Имеем:

$$\text{grad } u(A) = \left( \frac{\partial u(A)}{\partial x}; \frac{\partial u(A)}{\partial y}; \frac{\partial u(A)}{\partial z} \right) = (2a; 0; 0);$$

$$\text{grad } u(B) = \left( \frac{\partial u(B)}{\partial x}; \frac{\partial u(B)}{\partial y}; \frac{\partial u(B)}{\partial z} \right) = (0; 2b; 0).$$

Так как скалярное произведение этих ненулевых векторов равно нулю, получаем, что $\cos \varphi = 0$ т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $\blacktriangle$

Пример 13. Найти в точке $M_0(2; 1)$ наибольшую скорость роста функции $z = x^2 y - 2y^3$.

$\Delta$ Поскольку функция дифференцируема в точке $M_0$, то наибольшая скорость ее роста в этой точке равна модулю ее градиента в этой точке. Находим градиент данной функции в произвольной точке: $\text{grad } z = (2xy; x^2 - 6y^2)$.

Выпишем значение градиента в заданной точке $M_0(2; 1)$:

$$\text{grad } z(2; 1) = (4; -2).$$

Находим искомую скорость: $|\text{grad } z(2; 1)| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $(1,02)^3 \cdot (0,97)^3$.

Ответ: $0,97$.

2. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить, на сколько изменится диагональ прямоугольника со сторонами 6 м и 8 м, если его первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм.
Ответ: уменьшится на 3мм.

3. Найти \( \frac{dz}{dt} \), если \( z = \frac{x}{y} \), где \( x = e^t \), \( y = \ln t \).

Ответ: \( \frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t} \).

4. Найти \( \frac{dz}{dt} \), если \( z = x^2 - y^2 \), где \( x = \sin t \), \( y = \cos t \).

Ответ: \( \frac{dz}{dt} = 2\cos 2t \).

5. Найти \( \frac{dz}{dx} \) и \( \frac{dz}{dy} \), если \( z = u^2v - uv^2 \), где \( u = x + 2y \), \( v = x - 2y \).

Ответ: \( \frac{dz}{dx} = 8xy \), \( \frac{dz}{dy} = 4(x^2 - 12y^2) \).

6. Найти полный дифференциал функции \( z = x^2 - y^2 \), где \( x = u \cos v \), \( y = u \sin v \).

Ответ: \( dz = 2u(\cos 2vdu - u \sin 2v dv) \).

7. Показать, что функция \( z = \varphi(x^2 + y^2) \) удовлетворяет уравнению

\[ y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0. \]

8. Найти производную функции \( u = xy + yz + zx \) в точке \( M(2; 1; 3) \) в направлении к точке \( N(5; 5; 15) \).

Ответ: \( 68 \frac{13}{13} \).

9. Найти производную от функции \( z = 2x^2 - 3y^2 \) в точке \( P(1; 1) \) в направлении градиента.

Ответ: \( 2\sqrt{13} \).

Занятие 13

Касательная плоскость и нормаль.
Производные и дифференциалы высших порядков

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности \( z = \frac{x^2 - y^2}{2} \) в точке \( M_0(3; 1; 4) \).

Поверхность \( S \) запишем в виде \( F(x; y; z) = \frac{x^2 - y^2}{2} - z = 0 \). Построим
плоскость, проходящую через точку $M_0(3; 1; 4)$ и имеющую нормальный вектор $\nabla F(3; 1; 4)$:

$$\nabla F(3; 1; 4) = \frac{\partial F}{\partial x} \bigg|_{M_0} \begin{pmatrix} i \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial y} \bigg|_{M_0} \begin{pmatrix} j \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial z} \bigg|_{M_0} \begin{pmatrix} k \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} i \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} i \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} k \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3i - j - k.
$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$3(x - 3) - (y - 1) - (z - 4) = 0, \quad 3x - y - z - 4 = 0.
$$

Запишем уравнение нормали: $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 4}{-1}$. ▲

Пример 2. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln(e^{xy} + z) = 0$ в точке $M_0(0; 4; 0)$.

Δ Найдем нормальный вектор плоскости в точке $M_0(0; 4; 0)$:

$$\nabla F(0; 4; 0) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} \begin{pmatrix} i \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} \begin{pmatrix} j \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \begin{pmatrix} k \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{xy} + z \\ m_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{xy} + z \\ m_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{xy} + z \\ m_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ m_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4i + 0j + k.
$$

Уравнение касательной плоскости: $4(x - 0) + 0(y - 4) + 1(z - 0) = 0, \; 4x + z = 0$.

Уравнение нормали:

$$\frac{x}{4} = \frac{y - 4}{0} = \frac{z}{1}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти точку на поверхности $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, нормаль к которой параллельна прямой $\frac{x - 2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{1}$, и записать уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Δ Направляющий вектор нормали к поверхности в произвольной точке $(x; y; z)$ имеет вид $\left< \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}; -1 \right>$.

Po условию нормаль в искомой точке параллельна заданной прямой. Записывая критерий коллинеарности двух векторов, получаем соотношения:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{1}. \quad \text{Из этих соотношений находим координаты точки } M_0, \text{ в которой нормаль параллельна заданной прямой: } x = -1, \; y = 2, \; z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = \frac{3}{2}.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$(x + 1) - (y - 2) + \left( z - \frac{3}{2} \right) = 0, \quad \text{или } 2x - 2y + 2z + 3 = 0. \quad \blacktriangleleft$$
Пример 4. Найти частные производные второго порядка функции \( z = x^{y^2} \).

\( \Delta \) Сначала находим частные производные первого порядка:
\[
\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot x^{y^2-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \ln x \cdot 2y.
\]

Вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем частные производные второго порядка данной функции:
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot (y^2 - 1)x^{y^2-2};
\]
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + y^2x^{y^2-1} \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);
\]
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y^{y^2} \cdot x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2} \cdot \frac{1}{x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);
\]
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{y^2} \ln x \cdot 2y \cdot \ln x \cdot 2y + 2x^{y^2} \ln x = 2x^{y^2} \ln x(1 + 2y^2 \ln x). \quad \Delta
\]

Замечание. Так как \( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \) и \( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \) являются непрерывными функциями, то они равны.

Пример 5. Показать, что функция \( z = \arctg \frac{y}{x} \) удовлетворяет уравнению Лапласа.

Лапласа \( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \)

\[
\Delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(- \frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2};
\]
\[
\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad \Delta
\]

Пример 6. Показать, что функция \( u = \varphi(x - \alpha t) + \psi(x + \alpha t) \) удовлетворяет уравнению \( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \)

\( \Delta \) Введем обозначения: \( x - \alpha t = \xi, \quad x + \alpha t = \eta. \)

Тогда \( \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}; \)
\[
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} (-\alpha) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \alpha; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \cdot \alpha^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \cdot \alpha^2.
\]
Следовательно, \( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \). ▲

Пример 7. Найти \( \frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} \), если \( u = e^{xy} \).

\( \Delta \) Указанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования. Очевидно, \( \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy} \). Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по \( x \) от \( \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \), получаем

\[
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} \right) = \frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} = (x^8)'' e^{xy} + 2(x^8)'(e^{xy})' + x^8(e^{xy})'' = \\
= 56x^6e^{xy} + 16x^7ye^{xy} + x^8y^2e^{xy}. ▲
\]

Пример 8. Найти дифференциал второго порядка функции \( z = e^{x-y^2} + \cos x \).

\( \Delta \) Воспользуемся формулой \( d^2z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dxdy + z_{yy} dy^2 \).

Находим частные производные:

\[
\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} - \sin x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-y^2} - \cos x;
\]

\[
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2ye^{x-y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{x-y^2}(1 - 2y^2).
\]

В результате получаем

\[
d^2z = (e^{x-y^2} - \cos x)dx^2 - 4ye^{x-y^2}dxdy + 2e^{x-y^2}(2y^2 - 1)dy^2. ▲
\]

Пример 9. Найти \( d^3z \) функции \( z = x^3y \) в точке \( M_0(1; 1) \).

\( \Delta \) Найдем \( d^3z \) с помощью оператора:

\[
d^3z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.
\]

Найдем частные производные третьего порядка в точке \( M_0 \):

\[
\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y;
\]

\[
\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \bigg|_{M_0} = 6; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \bigg|_{M_0} = 6.
\]

В результате получаем \( d^3z \bigg|_{M_0} = 6dx^3 + 18dx^2 dy. ▲ \)
Пример 10. Найти второй дифференциал сложной функции \( z = e^u + u \), \( u = x^2 + y^2 \) в точке \( M_0(0; 0) \).

Пусть первый дифференциал этой функции можно найти используя инвариантность формы записи дифференциала. Имеем \( dz = d(e^u + u) = (e^u + 1) \, du \), где \( du = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy \).

Дальнейшее дифференцирование даёт
\[
\begin{align*}
\frac{d^2 z}{dM_0^2} &= 4dx^2 + 4dy^2. \\
\end{align*}
\]

Дополнительные задачи

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:
   а) \( z = (x - y)^2 - x + 2y, \quad M_0(1; 1; 1); \) б) \( xy^2 + z^3 = 12, \quad M_0(1; 2; 2). \)

Ответ: а) \( x - 2y + z = 0, \quad x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z - 1; \) б) \( x + y + 3z = 9, \quad x - 1 = y - 2 = z - \frac{2}{3}. \)

2. Показать, что эллипсоид \( 4x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5 \) и гиперболоид \( x^2 - y^2 + z^2 = 3 \) в точке \( M_0(0; 1; 2) \) касаются друг друга, т.е. обе поверхности проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную плоскость.

3. Для указанных функций найти частные производные второго порядка:
   а) \( z = \frac{x^2 + y^2}{xy}; \) б) \( z = \sin^2(ax + by). \)

Ответ: а) \( z_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad z_{xy} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}, \quad z_{yy} = \frac{2x}{y^3}; \)
   б) \( z_{xx} = 2a^2 \cos 2(ax + by), \quad z_{xy} = 2b^2 \cos 2(ax + by). \)

4. Вычислить частные производные второго порядка функции \( z = f(x; y) \), в указанных точках:
   а) \( z = \frac{x}{x + y}, \quad M_0(1; 0); \) б) \( z = \ln(x^2 + y), \quad M_0(0; 1). \)

Ответ: а) \( z_{xx}(M_0) = 0, \quad z_{xy}(M_0) = 1, \quad z_{yy}(M_0) = 2; \)
6) \( z''_{xx}(M_0) = 2, \quad z''_{xy}(M_0) = 0, \quad z''_{yy}(M_0) = -1. \)

5. Найти \( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \) для сложной функции \( u = f(x^2 + y^2 + z^2). \)

Ответ: \( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2). \)

6. Найти \( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \), если \( z = f(u; v), \) где \( u = x^2 + y^2, \ v = xy. \)

Ответ: \( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(u; v) + 4xy f''_{uu}(u; v) + 2(x^2 + y^2) f''_{uv}(u; v) + xy f''_{vv}(u; v). \)

7. Найти \( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \) для функции \( u = e^{xyz}. \)

Ответ: \( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2). \)

8. Найти \( \partial^3 z \) в точке \( M_0(0; 1) \) для функции \( z = e^{x^2 y}. \)

Ответ: \( \partial^3 z (M_0) = 6dx^2 \cdot dy. \)

9. Докажите, что функция \( u = x \varphi(x + y) + y \cdot \psi(x + y) \) удовлетворяет уравнению \( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \)

Занятие 14

Дифференцирование неявных функций. Формула Тейлора

Пример 1. Найти производные \( f'(x) \) и \( f''(x) \) неявной функции \( y = f(x), \) заданной уравнением \( x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \) и удовлетворяющей условию \( f(1) = 1. \)

Функция \( F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 \) дифференцируема в любой окрестности точки \( (1; 1). \) Производная \( F'_y = x + 2y \) непрерывна в точке \( (1; 1). \) Наконец, \( F(1; 1) = 0, \ F'_y(l; 1) = 3 \neq 0, \) т. е. выполнены все условия существования неявной функции в некоторой окрестности точки \( (1; 1). \) Уравнение \( x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию \( y = f(x), \) причем \( f(1) = 1. \) Так как \( F(x; y) \) дважды дифференцируема, то и \( y = f(x) \) также дважды дифференцируема.

Пользуясь формулой \( \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_y}{F'_x}, \) получаем \( \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \) \( (x \neq -2y), \)
\[ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(2+y') - 2(x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} = -\frac{18}{(x+2y)^2}, \quad (x \neq -2y). \]

Подставляя в эти равенства \( x = 0, \ y = 1 \), получаем \( y'(1) = -1, \ y''(1) = -2. \] ▲

**Пример 2.** Найти \( y', y'', y''' \) при \( x = 0, \ y = 1 \), если \( x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0 \).

\[ 2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0, \ 2 - 2y - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0, \]
\[ -3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0 \]
и подставляя в результаты значения \( x = 0, \ y = 1 \), получаем систему уравнений:
\[ 3y' = 0, \]
\[ 2 + 3y'' = 0, \]
\[ 2 + 3y''' = 0, \]
из которой находим \( y' = 0, \ y'' = \frac{2}{3}, \ y''' = -\frac{2}{3}. \)] ▲

**Пример 3.** Доказать, что уравнение \( z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0 \) определяет в некоторой окрестности точки \((1; 4; 2)\) единственную неявную функцию вида \( z = f(x; y) \). Найти ее частные производные \( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (1; 4), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (1; 4) \).

Функция \( F(x; y; z) = z^3 - xyz + y^2 - 16 \) дифференцируема в любой окрестности точки \( M_0(1; 4; 2) \). Производная \( F'_z = 3z^2 - xy \) непрерывна в точке \( M_0 \). Наконец, \( F(1; 4; 2) = 0, \ F'(1; 4; 2) = 8 \neq 0 \). Поэтому в некоторой окрестности точки \( M_0 \) уравнение \( z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0 \) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию \( z = f(x; y) \), причем \( f(1; 4) = 2 \).

Для нахождения \( \frac{\partial z}{\partial x} \) воспользуемся формулой \( \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yz}{3z^2 - xy} \).

Дифференцируя это равенство по \( x \), получим
\[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \]
\[ = \frac{yz(3z^2 - xy) - yz(6zz' - y)}{(3z^2 - xy)^2} \]
\[ = \frac{y \frac{y^2}{3z^2 - xy}(3z^2 - xy) - yz \left( 6z - \frac{yz}{3z^2 - xy} - y \right)}{(3z^2 - xy)^2} \]
\[ = -\frac{2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3} \].

Если в полученных равенствах положить \( x = 1, y = 4, z = 2 \), то получим \( z'_x (1; 4) = 1, \ z''_x (1; 4) = 0.5 \).

Рассмотрим другой способ решения задачи. Предполагая, что функция
\[ z = f(x; y) \] подставлена в уравнение \( z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0 \), продифференцируем дважды полученное тождество по \( x \):
\[
3z^2 z'_x - yz - xyz'_x = 0,
\]
\[
6z^2 z'_x + 3z^2 z''_x - 2yz - xyz''_x = 0.
\]
Решая эту систему, находим:
\[
z'_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}; \quad z''_x = -\frac{2xyz}{(3z^2 - xy)^3}.
\]

**Пример 4.** Найти \( dz \), если \[
\frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} - 1 = 0.
\]

\[ dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \]

Найдем частные производные неявно заданной функции:
\[
\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F_z} = -\frac{1}{z} \left( -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \right) = \frac{z}{x+z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F_z} = -\frac{1}{y} \left( -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \right) = \frac{z^2}{y(x+z)}.
\]
Отсюда \[ dz = \frac{z}{x+z} dx + \frac{z^2}{y(x+z)} dy. \]

Рассмотрим другой способ решения задачи. Считая, что \( z = z(x, y) \), в результате дифференцирования получаем
\[
\frac{zdx - xdz}{z^2} - \frac{y}{z}, \frac{ydz - zdy}{y^2} = 0, \quad yzdx -xydz - yzdz + z^2 dy = 0.
\]
Отсюда \[ dz = \frac{z}{x+z} dx + \frac{z^2}{y(x+z)} dy. \]

**Пример 5.** Функцию \[ f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4 \] разложить по формуле Тейлора в окрестности точки \((-2; 1)\).

\[ \Delta \] Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поскольку все частные производные порядка выше второго равны нулю, то остаточный член \( R_n \) при \( n \geq 2 \) обращается в нуль и формула Тейлора принимает следующий вид:
\[
f(x; y) = f(-2; 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2; 1)(x + 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2; 1)(y - 1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2; 1)(x + 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2; 1)(x + 2)(y - 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2; 1)(y - 1)^2 \right).
\]

Находим значение функции и ее частные производные в точке \( M_0(-2; 1) \):
\[ f(-2; 1) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{M_0} = -2x + 2y - 6 \bigg|_{M_0} = 0; \]
\[ \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{M_0} = 2x + 6y - 2 \bigg|_{M_0} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{M_0} = -2; \]
\[ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \bigg|_{M_0} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \bigg|_{M_0} = 6; \]

Получаем \[ f(x; y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2. \]

Пример 6. Разложить функцию \( f(x; y) = e^{\frac{x}{y}} \) по формуле Тейлора в окрестности точки \( M_0(0; 1) \) до членов второго порядка включительно. Записать остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Д Найдем значение функции и ее частные производные до второго порядка включительно в точке \( M_0(0; 1) \):

\[ f(M_0) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{M_0} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \bigg|_{M_0} = 1; \]
\[ \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{M_0} = e^{\frac{x}{y}} \left( -\frac{x}{y^2} \right) \bigg|_{M_0} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{M_0} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2} \bigg|_{M_0} = 1; \]
\[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \bigg|_{M_0} = \left( e^{\frac{x}{y}} \cdot \left( -\frac{x}{y^3} \right) + e^{\frac{x}{y}} \left( -\frac{1}{y^2} \right) \right) \bigg|_{M_0} = -1; \]
\[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \bigg|_{M_0} = \left( e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3} \right) \bigg|_{M_0} = 0. \]

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

\[ e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - x(y - 1) + R_2. \]

В форме Пеано: \( R_2 = o(x^2 + (y - 1)^2) \).

Пример 7. Пусть \( z \) - та неявная функция от \( x \) и \( y \), определяемая уравнением \( z^3 - 2xz + y = 0 \), которая при \( x = 1 \) и \( y = 1 \) принимает значение \( z = 1 \). Разложить эту функцию в окрестности точки \( M_0(1; 1) \) по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

Д Находим частные производные функции в точке \( M_0(1; 1) \):

\[ \frac{\partial F}{\partial x} = -2z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{M_0} = \frac{2z}{3z^2 - 2x} \bigg|_{M_0} = 2; \]
\[
\frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{M_0} = -\frac{1}{3z^2 - 2x} |_{M_0} = -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \bigg|_{M_0} = \frac{2z_x'(3z^2 - 2x) - 2z(6z \cdot z'_x - 2)}{(3z^2 - 2x)^2} |_{M_0} = -16;
\]
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \bigg|_{M_0} = (3z^2 - 2x)^{-2} \cdot 6z \cdot z'_y \bigg|_{M_0} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \bigg|_{M_0} = (3z^2 - 2x)^{-2} (6z \cdot z'_x - 2) \bigg|_{M_0} = 10;
\]

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем
\[
f(x; y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2 + \ldots. \ ▲
\]

Дополнительные задачи

1. Найти производные \( f'(0) \) и \( f''(0) \) неявной функции \( y = f(x) \), заданной уравнением \( x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0 \) и удовлетворяющей условию \( f(0) = 1. \)

Ответ: \( f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{2}{3}. \)

2. Найти первую и вторую производные неявной функции вида \( y = f(x) \), заданной уравнением \( \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}. \)

Ответ: \( y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \)

3. Найти частные производные первого и второго порядков неявной функции вида \( z = f(x; y) \) заданной уравнением \( x + y + z = e^z. \)

Ответ: \( z'_x = z'_y = \frac{1}{e^z - 1}, \quad z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3}. \)

4. Для функции \( z = z(x; y) \) найти частные производные первого и второго порядков, если \( z^4 - 3xyz = a^3. \)

Ответ: \( \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x^3 z}{(z^2 - xy)^3}; \)
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2z^2 x y - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y^3 z}{(z^2 - xy)^3}.
\]

5. Функцию \( f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \) разложить по формуле Тейлора в окрестности точки \( A(1; -2). \)

Ответ: \( f(x; y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2. \)

6. Разложить функцию \( z = \ln (1 + x + y) \) с центром разложения в точке \( M_0(0; 0) \) до членов третьего порядка.

79
Ответ: \( \ln (1 + x + y) = x + y - \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{3}(x + y)^3 + 0((x^2 + y^2)^3). \)

7. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки \((1; 1)\) до членов второго порядка включительно неявную функцию \(z(x, y)\), определяемую уравнением \(z^3 + 3yz - 4x = 0\), если \(z(1; 1) = 1\).

Ответ: 
\[ z = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(y-1)^2 + \ldots. \]

### Занятия 15–16

**Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум**

#### Пример 1. Исследовать по определению на экстремум функции:

а) \(z = (x + 4)^6 - (y - 2)^8, \ M_0(-4; 2);\)

б) \(z = (x - 3)^4 + (y + 5)^6, \ M_0(3; -5).\)

\(\Delta\)

а) Пусть \(x + 4 = X, \ y - 2 = Y, \ z = Z\). Имеем \(z = X^6 - Y^8, \ M_0(0; 0),\)

Находим \(\Delta Z = Z(X; Y) - Z(0; 0) = X^6 - Y^8.\) Далее при \(X \neq 0 \ Y = 0, \Delta Z > 0,\) а при \(X = 0 \ Y \neq 0, \Delta Z < 0.\) Следовательно, функция \(z = (x + 4)^6 - (y - 2)^8\) в точке \(M_0(-4; 2)\) не имеет экстремума.

б) Пусть \(x - 3 = X, \ y + 5 = Y, \ z = Z.\) Имеем \(z = X^4 + Y^6, \ M_0(0; 0).\)

Находим \(\Delta Z = Z(X; Y) - Z(0; 0) = X^4 + Y^6.\) Так как \(\Delta Z > 0,\) то точка \(M_0(3; -5)\) является точкой локального минимума. ▲

#### Пример 2. Найти точки локального экстремума функции

\(z = x^2 - 2xy + 4y^3.\)

\(\Delta\)

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

\[
\begin{align*}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - 2y = 0, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -2x + 12y^2 = 0.
\end{align*}
\]

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума \(M_1(0; 0)\) и \(M_2\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right).\)

Далее находим производные второго порядка:
\[
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y.
\]

В точке \( M_1 \) \( a_{11} = 2, \ a_{12} = -2, \ a_{22} = 0, \ D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0 \) и экстремум нет.

В точке \( M_2 \) \( a_{11} = 2a_{12} = -2, \ a_{22} = 4, \ D = 24 - (2)^2 = 4 > 0 \) и так как \( a_{11} = 2 > 0 \), то в точке \( M_2 \) функция имеет локальный минимум. ▲

Пример 3. Найти точки локального экстремума функции
\[
z = 3x^2y - x^3 - y^4.
\]
Δ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:
\[
\begin{align*}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -3x^2 + 6xy = 0, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^2 - 4y^3 = 0.
\end{align*}
\]

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума \( M_1(0; 0) \) и \( M_2(6; 3) \). Вычисляем частные производные второго порядка данной функции:
\[
\begin{align*}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -6x + 6y, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 6x, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -12y^2.
\end{align*}
\]

В точке \( M_1 \) \( a_{11} = 0a_{12} = 0, a_{22} = 0 \). Точка \( M_1(0; 0) \) требует дополнительного исследования. Находим \( z(0; 0) = 0 \).

Далее при \( x < 0, y = 0 \) имеем \( z(x; y) > 0 \), а при \( x = 0, y \neq 0 \) \( z(x; y) = -y^4 < 0 \). Следовательно, в любой окрестности точки \( M_1(0; 0) \) функция \( z(x; y) \) принимает значения как больше \( z(0; 0) \), так и меньше \( z(0; 0) \). Следовательно, в точке \( M_1(0; 0) \) функция \( z(x, y) \) не имеет локального экстремума.

В точке \( M_2 \) \( a_{11} = -18, \ a_{12} = 36, \ a_{22} = -108 \) и, значит, \( D = 648 > 0 \). Так как \( a_{11} < 0 \), то в точке \( M_2 \) функция имеет локальный максимум. ▲

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию
\[
z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.
\]
Δ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:
\[
\begin{align*}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.
\end{align*}
\]

На всей плоскости, за исключением точки \( O(0; 0) \), частные производные непрерывны и отличны от нуля.

81
\[ \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x; 0) - z(0; 0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \]

Этот предел не существует. Аналогично не существует \( \frac{\partial z}{\partial y} \).

Точка \( O(0; 0) \) является критической, а значит, подозрительной на экстремум. Значение \( z(0; 0) = 1; \ z(x; y) - z(0; 0) = -\sqrt{x^2 + y^2} < 0 \). Точка \( O(0; 0) \) является точкой максимума \( z_{\text{max}} = 1 \). ▲

**Пример 5.** Исследовать на локальный экстремум функцию \( u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \).

\[
\begin{align*}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 2 = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y + 4 = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 6 = 0
\end{align*}
\]

Из системы \( \begin{cases} 
\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4 = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 6 = 0
\end{cases} \)

определен стационарную точку \( M(-1; -2; 3) \). Находим вторые частные производные:

\[
\begin{align*}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 2, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.
\end{align*}
\]

Таким образом, \( \Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0. \)

Второй дифференциал \( d^2 u \), согласно критерию Сильвестра, представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, в точке \( (-1; -2; 3) \) функция имеет минимум \( u_{\text{min}} = -14 \).

Эту задачу можно решить методом выделения полных квадратов:

\[
u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 14.
\]

Точка \( M(-1; -2; 3) \) является точкой минимума \( u_{\text{min}} = -14 \). ▲

**Пример 6.** Исследовать на экстремум функцию \( u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz \).

\[
\begin{align*}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x - y - z = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - x = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 2 - x = 0.
\end{align*}
\]
Решив эту систему, находим единственную стационарную точку $M_0(2;1;7)$. Эта точка является точкой возможного экстремума. Проверим выполнение достаточных условий экстремума. Находим частные производные второго порядка в точке $M_0(2;1;7)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_{M_0} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \bigg|_{M_0} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \bigg|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \bigg|_{M_0} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \bigg|_{M_0} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \bigg|_{M_0} = 0.$$

Второй дифференциал функции $d^2 u \bigg|_{M_0} = 4dx^2 + 2dy^2 - 2dx dy - 2dx dz$.

Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма — знакопеременная.

Действительно, если положить $dy = dz = 0, dx \neq 0$, то получим $d^2 u \bigg|_{M_0} = 4dx^2 > 0$, а если положить $dy = 0, dx \neq 0$ и $dz = 3dx$, то получим $d^2 z \bigg|_{M_0} = -2dx^2 < 0$.

Следовательно, в точке $M_0$ функция $u(x;y;z)$ не имеет локального экстремума. ▲

Пример 7. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$ 

$\Delta$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x - y + 2z = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2.$$ 

Матрица квадратичной формы $d^2 u \bigg|_{M_1}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Выделяя главные миноры матрицы $A$, получаем:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$  

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u \bigg|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx, dy, dz$. Следовательно, в точке $M_1$ функция имеет локальный минимум.

Исследуем точку $M_2$. Матрица квадратичной формы $d^2u \bigg|_{M_2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$  

Отсюда получаем: $\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = -13 < 0, \quad \Delta_3 = -14 < 0$.

Следовательно, $d^2u \bigg|_{M_2}$ не является знакопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz$. Покажем, что эта квадратичная форма знакопеременная:

$$d^2u \bigg|_{M_2} = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz - 3dy^2 + 2dz^2.$$  

Если положить $dx \neq 0, dy = dz = 0$, то получим $d^2u \bigg|_{M_2} = 4dx^2 > 0$, а если положить $dx = dz = 0, dy \neq 0$, то получим $d^2u \bigg|_{M_2} = -3dy^2 < 0$.

Следовательно, в точке $M_2$ функция не имеет локального экстремума.

Пример 8. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2$ при условии $x + 2y = 1$.

Из уравнения связи $x + 2y = 1$ выразим $x$ через $y$ и подставим в выражение для данной функции:

$$x = 1 - 2y, \quad z = (1 - 2y)^2 + (1 - 2y)y + y^2 = 1 - 4y + 4y^2 + y - 2y^2 + y^2 = 3y^2 - 3y + 1.$$  

Функция $z = 3y^2 - 3y + 1$ достигает локального минимума в точке $y = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, $x = 0$. Тогда условный минимум равен

$$\ldots$$
\[ z_{\text{мн}} = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}. \]

Таким образом, в точке \( M\left(0; \frac{1}{2}\right) \) функция \( z = x^2 + xy + y^2 \) имеет условный минимум, равный \( \frac{1}{4} \). ▲

Пример 9. На сфере \( x^2 + y^2 + z^2 = 1 \) найти точки \( M_3 \) и \( M_4 \), сумма квадратов расстояний от которых до заданных точек \( M_1(-6; 4; 17) \) и \( M_2(-2; -4; 15) \) была соответственно наименьшей и наибольшей.

Δ По условию задачи требуется найти точки, для которых функция \( u = (x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 17)^2 + (x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 15)^2 \) при ограничении \( x^2 + y^2 + z^2 = 1 \) имеет экстремум.

1. Составляем функцию Лагранжа:
\[ L(x; y; z; \lambda) = (x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 17)^2 + (x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 15)^2 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - 1). \]

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, т. е. решаем систему уравнений:
\[ L'_x = 4x + 16 + 2\lambda x = 0 \implies x = -\frac{8}{\lambda + 2}; \]
\[ L'_y = 4y + 2\lambda y = 0 \implies y = 0; \]
\[ L'_z = 4z - 64 + 2\lambda z = 0 \implies z = \frac{32}{\lambda + 2}; \]
\[ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \implies \lambda = -2 \pm 8\sqrt{17}. \]

Имеем две стационарные точки \( M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; \frac{4}{\sqrt{17}}\right) \) и \( M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \).

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Следовательно, эти точки будут искомыми. Очевидно, что \[ |M_1M_3|^2 + |M_2M_3|^2 < |M_1M_4|^2 + |M_2M_4|^2. \]

Таким образом, наименьшее значение функции \( u \) достигается в точке \( M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; \frac{4}{\sqrt{17}}\right) \), а наибольшее – в точке \( M_4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \) ▲

Пример 10. Найти условный экстремум функции \( z = x + 2y \) при \( x^2 + y^2 = 5 \).

Δ Составим функцию Лагранжа \( F(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5) \) и
рассмотрим систему уравнений

\[
\begin{align*}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2 + 2\lambda y = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 5 = 0.
\end{align*}
\]

Она имеет два решения: \((1; 2; -\frac{1}{2})\) и \((-1; -2; \frac{1}{2})\).

Следовательно, функция \(z = x + 2y\) имеет две критические точки \(P_1(1; 2)\) при \(\lambda_1 = -\frac{1}{2}\) и \(P_2(-1; -2)\) при \(\lambda_1 = \frac{1}{2}\).

Найдем знак \(d^2F\) в каждой точке при соответствующем ей значении \(\lambda\):

\[d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2.\]

Так как \(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,\) то \(d^2F = 2\lambda (dx^2 + dy^2)\).

При \(x_1 = 1, y_1 = 2, \lambda_1 = -\frac{1}{2}\) \(d^2F < 0\), следовательно, в точке \(P_1\) функция \(z\) имеет максимум \(z_{\text{max}} = 5\).

При \(x_1 = -1, y_1 = -2, \lambda_1 = \frac{1}{2}\) \(d^2F > 0\), следовательно, в точке \(P_2\) функция \(z\) имеет минимум \(z_{\text{min}} = -5\). ▲

**Пример 11.** Найти экстремальные значения функции \(u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2\) при наличии связи \(x + y + z + t + 1 = 0\).

Составим функцию Лагранжа: \(F = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda (x + y + z + t + 1)\).

\[
\begin{align*}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + \lambda = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= 2t + \lambda = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x + y + z + t + 1 = 0.
\end{align*}
\]

Функция \(u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2\) имеет единственную критическую точку

\[
\begin{align*}
x &= -\frac{\lambda}{2}, \\
y &= -\frac{\lambda}{2}, \\
\lambda &= \frac{1}{2}, \\
x &= y = z = t = -\frac{1}{4}.
\end{align*}
\]

\[
-2\lambda + 1 = 0
\]
При \( \lambda = \frac{1}{2} \).

Поскольку второй дифференциал функции Лагранжа, равный \( d^2 F = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2) \), всегда положительно определен, то функция \( u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \) при наличии связи \( x + y + z + t + 1 = 0 \) имеет в точке \( P\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right) \) условный минимум. Подставляя координаты точки \( P \) в функцию \( u \), мы получим \( u_{\text{мин}} = \frac{1}{4} \). ▲

Пример 12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции \( z = x^2 + y^2 - 12x + 16y \), если \( x^2 + y^2 \leq 25 \).

\( \Delta \) Функция \( z \) непрерывна в замкнутой ограниченной области. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, она в этой области достигает наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки функции \( z \), принадлежащие области \( x^2 + y^2 < 25 \). Поскольку система уравнений

\[
\begin{align*}
x' &= 2x - 12 = 0, \\
y' &= 2y + 16 = 0
\end{align*}
\]

в указанной области не имеет решений, то своего наибольшего и наименьшего значений функция \( z \) достигает на окружности \( x^2 + y^2 = 25 = 0 \).

Составляя функцию Лагранжа \( F = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda (x^2 + y^2 - 25) = 0 \) и решая систему

\[
\begin{align*}
F'_x &= 2x - 12 + 2\lambda x = 0, \\
F'_y &= 2y + 16 + 2\lambda y = 0, \\
F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 25 = 0,
\end{align*}
\]

находим две точки возможного условного экстремума \( M_1(3; -4) \) и \( M_2(-3; 4) \).

Вычисляя значения функции \( z \) в этих точках \( z(M_1) = -75 \), \( z(M_2) = 125 \), заключаем, что \( z_{\text{наиб}} = 125 \), \( z_{\text{наим}} = -75 \). ▲

Пример 13. При каких значениях радиуса основания \( R \) и высоты \( H \) цилиндрическая банка, объем которой равен \( 54\pi \), имеет наименьшую поверхность?

\( \Delta \) Требуется исследовать на экстремум функцию \( S = 2\pi R^2 + 2\pi RH \) при наличии связи \( \pi R^2 H = 54\pi \).

Составим функцию Лагранжа \( F = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda (R^2 H - 54) \) и рассмотрим систему уравнений
\[
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial R} &= 4\pi R + 2\pi H + 2RH\lambda = 0,  \\
\frac{\partial F}{\partial H} &= 2\pi R + \lambda R^2 = 0,  \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= R^2 H - 54 = 0. \\
\end{aligned}
\]

Так как \( R \neq 0 \), система имеет единственное решение \( R = 3, H = 6 \) при \( \lambda = -\frac{2\pi}{3} \).

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Поэтому решение \( R = 3, H = 6 \) является искомым. ▲

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции 
\[ z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy \] в замкнутой области, ограниченной линиями \( y = x^2 \) и \( y = 4 \).

\[ \Delta \] Найдем критические точки функции \( z \), лежащие внутри заданной области:
\[
\begin{aligned}
&z_x' = 6x^2 + 8x - 2y = 0,  \\
&z_y' = 2y - 2x = 0. \\
\end{aligned}
\]

Решая эту систему, найдем две критические точки \( O(0;0) \) и \( M(-1; -1) \), из которых ни одна не лежит внутри заданной области (рис. 21). Найдем \( z(A) \) и \( z(B) \):
\[ z(A) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32, \quad z(B) = 16 + 16 + 16 - 16 = 32. \]

Найдем критические точки, принадлежащие параболе \( AOB \). Имеем:
\[ y = x^2, \quad z_1(x) = x^4 + 4x^2, \quad x \in (-2; 2); \quad z_1' = 4x^3 + 8x; \quad z_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \]
\[ z_1(0) = z(0;0) = 0. \]

На промежутке \( AB \) имеем
\[ y = 4, \quad z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, \quad x \in (2;2). \]

Найдем критические точки, принадлежащие этому участку: \( z_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8 \). Внутри данного отрезка имеется одна критическая точка \( x = \frac{2}{3}, \quad y = 4 \) (точка \( C \)):
\[ z_2\left(\frac{2}{3}\right) = z\left(\frac{2}{3};4\right) = 16 \frac{22}{27}. \]

Таким образом, наибольшее значение функции \( z \) равно 32 и достигается оно в точках \( A(-2;4) \) и \( B(2;4) \), а наименьшее значение равно нулю в точке \( O(0;0) \). ▲
Дополнительные задачи

1. Исследовать по определению на экстремум функцию
\[ z = 3 + (4x - x^2 - 4)^7 + (\cos y - 1)^5 \] в точке \( M_0 (2; 0) \).

Ответ: точка \( M_0 (2; 0) \) является точкой локального максимума, \( z_{\text{макс}} = z(2; 0) = 3 \).

2. Исследовать на локальный экстремум функцию
\[ z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y. \]

Ответ: \( z_{\text{мин}} = z(2; 1) = -28, \ z_{\text{макс}} = z(-2; -1) = 28 \).

3. С помощью критерия Сильвестра исследовать на экстремум функцию
\[ u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2. \]

Ответ: \( z_{\text{макс}} = z(-3; 2; -1) = 22 \).

4. Для функции \( z = 3x^2y - x^3 - y^4 \) проверить выполнение достаточных условий локального экстремума на экстремум функции \( u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2 \).

Ответ: в точке \( M_1 (6; 3) \) функция \( z(x; y) \) имеет локальный максимум, в точке \( M_2 (0; 0) \) функция \( z(x; y) \) не имеет локального экстремума.

5. Методом исключения части переменных найти экстремум функции \( u = x + y + z^2 \) при условиях связи
\[ \begin{align*}
  z - x &= 1, \\
  y - xz &= 1.
\end{align*} \]

Ответ: \( u_{\text{мин}} = u(-1; 1; 0) = 0 \).

6. Найти условный экстремум функции \( z = 6 - 4x - 3y \) при \( x^2 + y^2 = 1 \).

Ответ: \( z_{\text{мин}} = z \left( \frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) = 1; \ z_{\text{макс}} = z \left( -\frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right) = 11. \)

7. Найти условный экстремум функции \( u = x - 2y + 2z \) при \( x^2 + y^2 + z^2 = 9. \)

Ответ: \( u_{\text{мин}} = u(-2; -2) = -9; \ u_{\text{макс}} = u(1; -2; 2) = 9. \)

8. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна \( 3\pi \text{ м}^2 \) имеет наибольшую вместимость.

Ответ: \( V = \pi \text{ м}^3, \ R = 1 \text{ м}, \ l = 2 \text{ м}. \)

9. На заданной плоскости \( 3x - 2y = 0 \). Найти точку, сумма квадратов расстояний которой до точек \( A(0; 2) \) и \( B(7; 2; 1) \) наименьшая.

Ответ: \( M (2; 3; 3). \)

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции \( z = -x^3 + y^3 + 3xy + 2 \) в треугольнике с вершинами \( A(0; 0) \), \( B(-3; 0) \), \( C(0; 3) \).

Ответ: \( z_{\text{макс}} = z(0; 3) = z(-3; 0) = 29; \ z_{\text{мин}} = z(-1; 1) = 1. \)
Занятие 17

Контрольная работа. Функции
нескольких переменных

Вариант 1

1. Вычислить \( \lim_{x \to 0, y \to 0} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}} \).

Ответ: \(-3\).

2. Вычислить \( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \), если \( f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \).

Ответ: 0.

3. Найти дифференциал функции \( f(x; y; z) \), если \( f = (xy)^z \).

Ответ: \((xy)^{z-1}(yzdx + xzdy + xy\ln(xy)dz)\).

4. Найти производную функции \( f \) в точке \( M_0 \) по направлению вектора \( \overrightarrow{M_0M} \), если \( f = 5x + 10x^2y + y^5 \), \( M_0(1; 2) \), \( M(5; -1) \).

Ответ: \(-18\).

5. Найти второй дифференциал функции \( f(x; y) = \frac{x}{y}e^{x^2} \) в точке (0; 1).

Ответ: \(-2dxdy\).

6. Для функции \( u(x; y) \), заданной неявно уравнением \( 2x^2 + 2y^2 + u^2 - 8xu - u + 8 = 0 \), найти \( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \) в точке \( M(2; 0; 1) \).

Ответ: 0.

7. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки \( M(-2; 1) \) функцию \( f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4 \).

Ответ: \( 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2 \).

8. Исследовать на экстремум функцию \( u(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y \).

Ответ: \( u_{\text{мин}} = u(7; -2) = -39 \).

9. Методом Лагранжа определить локальный экстремум функции \( z = x^2 + xy + y^2 \) при условии \( x + 2y = 1 \).

Ответ: \( z_{\text{мин}} = \frac{1}{4} \).
Вариант 2

1. Вычислить \( \lim_{x \to 0, y \to 0} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 9 - 3} \).

Ответ: 6.

2. Вычислить \( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \), если \( f = \ln (x^2 + xy + y^2) \).

Ответ: 2.

3. Найти дифференциал функции \( f(x; y; z) \), если \( f = x^z \).

Ответ: \( \frac{1}{z} x^z \left( \frac{ydz}{x} + \ln xdy - \frac{y\ln xdz}{z} \right) \).

4. Найти единичный вектор \( \overrightarrow{e^0} \), по направлению которого \( \frac{\partial f}{\partial e^0} \) в точке \( M \) достигает наибольшего значения, если \( f = x^2 - xy + y^2 \), \( M(-1; 2) \).

Ответ: \( \frac{-4i + 5j}{\sqrt{41}} \).

5. Найти второй дифференциал функции \( f(x; y) = e^{\frac{x^2}{y}} \) в точке \( (1; 1) \).

Ответ: \( e \left( 6dx^2 - 8dx dy + 3dy^2 \right) \).

6. Для функции \( z(x; y) \), заданной неявно уравнением \( x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0 \), найти \( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \) в точке \( M(1; -2; 1) \).

Ответ: \( -\frac{1}{5} \).

7. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки \( M(1;-2) \) функцию \( f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y \).

Ответ: \( 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2 \).

8. Исследовать на экстремум функцию \( u(x; y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2 \).

Ответ: \( u_{\text{max}} = u(1;0) = 4 \).

9. Методом Лагранжа определить локальный экстремум функции \( z = -x^2 + xy + y^2 \) при условии \( 2x + y = 1 \).

Ответ: \( z_{\text{min}} = -\frac{5}{4} \).
Занятие 18

Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1. Показать, что данная функция является решением (интегралом) заданного дифференциального уравнения:

а) \( y = 3\sin x - 4\cos x \), \( y'' + y = 0 \);

б) \( y = x \left( 1 + \int e^x \frac{1}{x} \, dx \right), \quad x \frac{dy}{dx} - y = xe^x \);

в) \( y = \arctg(x + y), \quad (x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1 \);

г) \( x = a\sin t, \quad y = b\cos t, \quad y' + \frac{b^2}{a^2} x = 0 \).

А) Последовательно находим:

\( y' = 3\cos x + 4\sin x \),

\( y'' = -3\sin x + 4\cos x \).

Подставляя в заданное уравнение \( y \) и \( y' \), получим

\( -3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0 \).

Таким образом, эта функция обращает заданное уравнение в тождество, т. е. является его решением.

б) Вычислим производную данной функции:

\[
\frac{dy}{dx} = 1 + \int e^x \frac{1}{x} \, dx + x \cdot e^x = 1 + e^x + \int e^x \, dx.
\]

Имеем \( x \frac{dy}{dx} - y = x \left( 1 + e^x + \int e^x \, dx \right) - x \left( 1 + \int e^x \, dx \right) = xe^x \).

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения.

в) Применяя к данному соотношению правило дифференцирования неявной функции, имеем \( \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 + (x + y)^2} \). Отсюда \( \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)^2} \).

Подставляя найденное значение \( \frac{dy}{dx} \) в данное дифференциальное уравнение, получим тождество \( (x + y)^2 \cdot \frac{1}{(x + y)^2} = 1 \).

г) Предполагаемое решение задано параметрическими уравнениями. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, получим
Подставляя в исходное уравнение $x$, $y$, $y'$, получим

$$-\frac{b}{a}\tan t + \frac{b^2a\sin t}{a^2b\cos t} \equiv 0. \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

a) $x^2 + y^2 - cx = 0$;

б) $y = \sin x + c\cos x$.

Δ а) Рассматривая в данном соотношении $y$ как неявную функцию от $x$ и дифференцируя по $x$, имеем $2x + 2y \frac{dy}{dx} - c = 0$. Отсюда $c = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$.

Подставляя в исходное соотношение вместо $c$ последнее выражение, получим $2xy \frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$.

б) Дифференцируя данное равенство по $x$, имеем $\frac{dy}{dx} = \cos x - c\sin x$. Умножим обе части исходного уравнения на $\sin x$, а последнего — на $\cos x$ и, сложив почленно, получим $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x - 1 = 0. \quad \blacktriangle$

**Пример 3.** С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые уравнения $x\frac{dy}{dx} = 2y$.

Δ Очевидно, ось абсцисс является интегральной кривой данного уравнения. Интегральные кривые расположены симметрично относительно оси абсцисс и относительно оси ординат (при замене $x$ на $-x$ или $y$ на $-y$ уравнение не изменяется). Поэтому исследуем поведение интегральных кривых только в I четверти.

Семейство изоклин определяется уравнением $k = \frac{2y}{x}, \quad y = \frac{k}{2}x$. Для любого $k > 0$ касательные к интегральным кривым данному уравнению, проведенные в точках прямой $y = \frac{k}{2}x$, образуют с осью абсцисс угол, равный $\arctg k$. Нарисовав несколько изоклин и поле направлений, строим приближенно интегральные кривые уравнения (рис. 22).
Пример 4. Решить уравнение \( ydx - x^2dy = 0 \).

\( \Delta \) Очевидно, что функции \( x = 0 \) и \( y = 0 \) являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его:

\[
\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}, \quad \ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|c|, \quad (c \neq 0), \quad y = ce^{-\frac{1}{x}}.
\]

Решение \( y = 0 \) можно получить из последнего соотношения при \( c = 0 \). Таким образом, \( y = 0 \) является частным решением.

Решение \( x = 0 \) не может быть получено из общего решения. Это особое решение.

Ответ: \( y = ce^{-\frac{1}{x}}, \quad (c \in R), \quad x = 0. \)

Пример 5. Решить уравнение \( \frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy \).

\( \Delta \) Перепишем уравнение в виде \( \frac{dy}{dx} = xy(y + 2) \).

Функции \( y = 0 \) и \( y = -2 \) являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные и проинтегрировав его:

\[
\left( \frac{dy}{y(y + 2)} - \frac{dx}{y + 2} \right) = 0, \quad \frac{1}{2}\left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 2} \right)dy - \frac{1}{2}xdx = 0,
\]

\[
\ln|y| - \ln|y + 2| - x^2 = \ln c_1, \quad \frac{|y|}{y + 2} = c_1e^{x^2}, \quad c_1 > 0,
\]

\[
\frac{y}{y + 2} = ce^{x^2}, \quad (c \in R) \text{ или } y = \frac{2ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}}.
\]

Решение \( y = 0 \) может быть получено из общего решения при \( c = 0 \). Решение \( y = -2 \) не входит в формулу общего решения ни при каком конечном значении константы \( c \).

Ответ: \( y = \frac{2ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}}, \quad y = -2. \)

Пример 6. Решить уравнение \( \frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x} \) и построить интегральные кривые этого уравнения.

\( \Delta \) Правая часть заданного уравнения определена во всей плоскости \( xOy \), за исключением точек прямой \( x = 0 \). Очевидно, функция \( y = 0 \) при \( x < 0 \) и при \( x > 0 \) является решением данного уравнения. Остальные решения определим из соотношения \( \int \frac{dy}{y} = k\int \frac{dx}{x} \). Отсюда \( \ln|y| = k\ln|x| + \ln c_1, \quad |y| = c_1|x|^k, \quad c_1 > 0. \)
Присоединяя к этим функциям решение $y = 0$, все решения можно записать формулой $y = c|x|^k$, $c \in R$. Интегральные кривые в зависимости от параметра $k$ изображены на рис. 23.

![Изображение графиков](image1.png)

**Рис. 23**

**Пример 7.** Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} + y = 2x + 1$, $y(0) = 0$.

Приравнивая данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $y - 2x - 1 = z$.

Имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dx} = -z - 2$, $z \neq -2$, так как $y(0) = 0$.

Разделив переменные, интегрируем уравнение:

$$\frac{dz}{z + 2} = -dx, \quad \ln|z + 2| = -x + \ln c, \quad |z + 2| = ce^{-x}, \quad z = -2 + ce^{-x}, \quad c \in R$$

или $y = 2x - 1 + ce^{-x}$.

Подставив в последнее соотношение $x = 0$, $y = 0$, получим $c = 1$.

**Ответ:** $y = 2x - 1 + e^{-x}$. ▲
Дополнительные задачи

1. Показать, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:
   а) \((x - 2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = c^2;\)
   б) \((x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + ce^y.\)

2. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром \(A(0;1).\)
   \textbf{Ответ:} \((y - 1)\frac{dy}{dx} + x = 0.\)

3. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат и для которых ось абсцисс является осью симметрии.
   \textbf{Ответ:} \(2x\frac{dy}{dx} - y = 0.\)

4. Решить задачу Коши: \((y - 4)dx - (x + 1)dy = 0, \quad y(1) = 10.\)
   \textbf{Ответ:} \(y = 3x + 7.\)

5. Решить уравнение: \(y\cos\sqrt{x}dx - \sqrt{x}dy = 0.\)
   \textbf{Ответ:} \(y = Ce^{2\sin\sqrt{x}}, \quad x = 0.\)

6. Решить уравнение: \(ye^{2x}dx + (1 + e^{2x})dy = 0.\)
   \textbf{Ответ:} \(y^2(e^{2x} + 1) = C.\)

7. Решить уравнение: \(y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}.\)
   \textbf{Ответ:} \(\ln|2x + y + 1| = x - 2y + C, \quad y = -2x - 1.\)

8. Решить уравнение: \(y' = \sin^2(x - y + 5).\)
   \textbf{Ответ:} \(\tg(x - y + 5) = x + C, \quad x - y + 5 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\)

9. Решить уравнение \((xy - x)dx + (xy + x - y - 1)dy = 0.\)
   \textbf{Ответ:} \(x + \ln|x - 1| + y + 2\ln|y - 1| = c.\)

10. Решить задачу Коши \((1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.\)
    \textbf{Ответ:} \(2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x).\)

11. Решить уравнение \((2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.\)
    \textbf{Ответ:} \(x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = c.\)
Занятия 19–20

Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1. Решить уравнение \( \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \).

\( \Delta \) Правая часть уравнения — однородная функция нулевой степени, поэтому данное уравнение однородное.

Положим \( y = ux \). Тогда \( \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \) и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

\[
\frac{u + x \frac{du}{dx}}{x} = \frac{1 + u^2}{2u} \quad \text{или} \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2u} \ dx.
\]

Функции \( u = \pm 1 \) являются решениями. Пусть \( u \neq \pm 1 \). Разделим переменные \( \frac{2udu}{1 - u^2} = \frac{dx}{x} \). Интегрируя, найдем \( -\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln|c| \) или \( x(1-u^2) = c, \ c \in \mathbb{R} \). Так как у \( y = \frac{y}{x} \), окончательно получаем \( y^2 = x^2 - cx \).

Решения \( u = \pm 1 \), т. е. \( y = \pm x \) являются частными решениями. \( \Delta \)

Пример 2. Решить уравнение \( \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \).

\( \Delta \) Это однородное уравнение. Положим \( y = ux \). Тогда \( \frac{du}{dx} = \frac{u + x \frac{du}{dx}}{x} \) и после подстановки получим \( x \frac{du}{dx} = \text{sign} x \sqrt{1-u^2}, \ x \neq 0 \).

Очевидно, функции \( u = \pm 1 \) или \( y = \pm x \) являются решениями полученного уравнения. Другие решения найдем, разделяя переменные. Имеем \( \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\text{sign} x}{x} \ dx, \ \arcsin u = \text{sign} x \ln|x| + c \). Заменяя \( u \) на \( \frac{y}{x} \), получим

\[ \arcsin \frac{y}{x} = \text{sign} x \ln|x| + c, \ y = x, \ y = -x. \quad \Delta \]

Пример 3. Решить уравнение \( (2x - y + 1) \frac{dx}{dy} + (2y - x - 1) \frac{dy}{dx} = 0 \).

Из всех решений выделите то, которое удовлетворяет условию \( y(1) = 1 \).

\( \Delta \) Данное уравнение приводится к однородному. Произведем замену переменных \( x = t + \alpha, \ y = s + \beta \). Получим

\( (2t + 2\alpha - s - \beta + 1)dt + (2s + 2\beta - t - \alpha - 1)ds = 0. \)
Из системы уравнений
\[
\begin{align*}
2\alpha - \beta + 1 &= 0, \\
-\alpha + 2\beta - 1 &= 0
\end{align*}
\]
находим \( \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3} \), получим однородное уравнение 
\[
(2t-s) \, dt + (2s-t) \, ds = 0.
\]
В последнем уравнении положим \( s = ut \).
Имеем \( (2t-ut) \, dt + (2ut-t)(u \, dt + t \, du) \, du = 0, \)
\[
(2t-ut + 2u^2 \, t - ut) \, dt + (2ut^2 - t^2) \, du = 0, \quad (2u^2 - 2u + 2) \, dt + (2u - 1) \, t \, dt,
\]
или
\[
\frac{1}{2} \cdot \frac{2u-1}{u^2-u+1} \, du = -\frac{dt}{t}, \quad \ln(u^2-u+1) + \ln t^2 = \ln c, \quad \left( \frac{s^2}{t^2} - \frac{s}{t} + 1 \right) \, t^2 = c,
\]
\[
s^2 - st + t^2 = c.
\]
Возвращаясь к переменным \( x \) и \( y \), получим
\[
\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = c, \quad x^2 + y^2 - xy + x - y = c_1.
\]
Это общий интеграл уравнения. Положив \( x = 1, \quad y = 1 \), находим \( c_1 = 1 \).

Ответ: \( x^2 + y^2 - xy + x - y = 1. \) ▲

Пример 4. Решить уравнение \( \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}. \)

\( \Delta \) Это линейное уравнение. Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).
1) Решим соответствующее линейное однородное уравнение
\[
\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0.
\]
Функция \( y = 0 \) является решением этого уравнения. Другие его решения найдем, разделяя переменные:
\[
\frac{dy}{y} = -\cos x, \quad \ln |y| = -\sin x + \ln |c|, \quad y = ce^{-\sin x}, \quad c \neq 0.
\]
Решение \( y = 0 \) можно получить из последней формулы при \( c = 0 \), поэтому все решения однородного уравнения выражаются формулой
\[
y = c \cdot e^{-\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}.
\]
2) Решение исходного уравнения ищем в виде \( y = c(x) \cdot e^{-\sin x}. \) Подставив это выражение в заданное уравнение, получим
\[
\frac{de(x)}{dx} e^{-\sin x} - \cos x \, e^{-\sin x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x},
\]
\[
\frac{de(x)}{dx} = 1, \quad c(x) = x + c.
\]
Ответ: \( y = (x + c) e^{-\sin x}. \) ▲
Пример 5. Проинтегрировать уравнение  \( y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^3} \) методом Бернулли, решить задачу Коши при начальном условии \( y(1) = 1 \).

\[ \Delta \text{ Это линейное уравнение. Сделав подстановку Бернулли } u = xv, \text{ получим } u'v + uv' + \frac{3}{x} uv = \frac{2}{x^3}, \text{ откуда } u'v + \left( v' + \frac{3}{x} v \right) = \frac{2}{x^3}. \]

Находим частное решение уравнения \( v' + \frac{3}{x} v = 0 \) : \( \frac{dv}{v} = -\frac{3}{x} \, dx \), \( \ln|v| = -3 \ln|x| + c \). В качестве частного решения можно взять \( v = \frac{1}{x^3} \). Тогда для отыскания \( u \) получим уравнение \( \frac{u'}{x^3} = \frac{2}{x^3} \). Отсюда находим \( u = 2x + c \).

Общее решение исходного уравнения \( y = (2x + c)\frac{1}{x^3} \). Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее условию \( y(1) = 1 \): \( 1 = (2 + c) - 1 \), откуда \( c = -1 \). Подставляя \( c = -1 \) в общее решение, получаем частное решение \( y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \). ▲

Пример 6. Найти общее решение уравнения \( 2ydy + (y^2 - 2x)dy = 0 \).

\[ \Delta \text{ Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией } x = u(\gamma) : \]
\[ \frac{dx}{dy} \frac{1}{y} x = - \frac{y}{2}, \ (y \neq 0). \]

Решим его методом подстановки Бернулли \( x(y) = u(\gamma) \cdot v(\gamma) \):

\[ u'v + uv' - \frac{1}{y} uv = - \frac{y}{2}, \ u'v + u \left( v' - \frac{1}{y} v \right) = - \frac{y}{2}. \]

Находим частное решение уравнения \( \frac{dv}{v} - \frac{1}{y} v = 0 \). Разделив переменные, получим \( \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \), \( v = y \).

Для отыскания \( u \) получим уравнение \( \frac{du}{dy} y = \frac{-y}{2} \). Отсюда находим \( u = -\frac{1}{2} y + c \).

Следовательно, общее решение исходного уравнения \( x = cy - \frac{y^2}{2} \). ▲
Пример 7. Решить уравнение Бернулли $y' - 2xy = 2x^3 y^2$, приведя его к линейному уравнению.

Разделим обе части уравнения на $y^2$: $y^{-2} y' - 2xy^{-1} = 2x^3$. Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2} y' = z'$. Умножив обе части уравнения на $(-1)$ и выполнив указанную подстановку, получим линейное уравнение $z' + 2xz = -2x^3$.

Решим это уравнение методом интегрирующего множителя (методом Эйлера). Находим интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$.

Домножив обе части уравнения на $e^{x^2}$, получим $(ze^{x^2})' = -2x^3 e^{x^2}$.

Тогда $ze^{x^2} = \int (-2x^3 e^{x^2}) dx = e^{x^2} (1 - x^2) + C$. Отсюда находим $z = \frac{e^{x^2} (1 - x^2) + C}{e^{x^2}}$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения $y = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} (1 - x^2) + C}$. ▲

Пример 8. Решить уравнение $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

Для того чтобы уравнение $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x; y)}{\partial x}.$$ 

В данном случае $M(x; y) = 2xy + 3y^2$, $N(x; y) = x^2 + 6xy - 3y^2$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$ 

Таким образом, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, т. е. левая часть данного уравнения действительно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x; y)$.

Для искомой функции $u(x; y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$ 

Из первого уравнения получаем

$$u(x; y) = \int (2xy + 3y^2) dx = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y).$$ 

Дифференцируем последнее равенство по $y$: 

$$x^2 + 6xy + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\varphi}{dy} = -3y^2.$$
Отсюда \( \varphi(y) = -y^3 + c_1 \). Поэтому \( u(x; y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + c_1 \).

Решение уравнения запишется в виде \( x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c. \)

**Пример 9.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения

\[
(e^x + y + \sin y)\,dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0.
\]

\( \Delta \) Так как \( \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y, \) т. е. \( \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно найти по одной из формул:

\[
\int M(x; y)\,dx + \int N(x_0; y)\,dy = c, \quad \int M(x; y_0)\,dx + \int N(x; y)\,dy = c.
\]

Подставив во вторую формулу для простоты \( x_0 = y_0 = 0 \), получим

\[
\int_0^x e^x\,dx + \int_0^y (e^y + x + x\cos y)\,dy = c,
\]

\[
e^x - 1 + (e^y + xy + x\sin y)\bigg|_{y=0}^{y=y} = c,
\]

\[
e^x - 1 + e^y + xy + x\sin y - 1 = c, \quad e^x + e^y + xy + x\sin y = c_1. \]

**Пример 10.** Решить уравнение \( (x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0. \)

\( \Delta \) Если левая часть уравнения \( M(x; y)\,dx + N(x; y)\,dy \) не является полным дифференциалом и выполнены все условия теоремы Коши, то существует такая функция \( \mu(x; y) \), называемая интегральным множителем, что \( \mu(Mdx + Ndy) = du. \)

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

1) \( \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = F(x) \), тогда \( \mu = \mu(x); \)

2) \( \frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = F'(y) \), тогда \( \mu = \mu(y). \)

В нашем случае \( \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 2y + 2y = 4y, \)

\[
\frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = F(x).
\]

Следовательно, \( \mu = \mu(x). \)

Так как \( \frac{\partial}{\partial y} (\mu(x)(x + y^2)) = \frac{\partial}{\partial x} (-2\mu(x)xy) \) или
\[ \mu(x)2y = -2 \frac{dM}{dx} (xy) - 2\mu(x)y, \quad \text{то} \quad \frac{dM}{\mu} = -\frac{2}{x} \, dx \quad \text{и} \quad \mu = \frac{1}{x^2}. \]

Умножая уравнение на \( \mu = \frac{1}{x^2} \), получим
\[ \frac{x + y^2}{x^2} \, dx - \frac{2y}{x} \, dy = 0 \] — уравнение в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения найдем по формуле
\[ \int M(x; y_0) \, dx + \int N(x; y) \, dy = c, \quad (x_0 = 1, \, y_0 = 0), \]
\[ \int_1^x \frac{1}{x} \, dx - \int_0^\frac{2y}{x} \, dy = c, \quad \ln|x| - \frac{1}{x} y^2 = c. \]

**Дополнительные задачи**

1. Решить задачу Коши \( ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0 \), \( y(1) = 1 \).
   **Ответ:** \( 2 - \ln|y| = 2 \sqrt{\frac{y}{x}} \).

2. Решить уравнение \( (2x + y) \, dy - (x + 2y) \, dx = 0 \).
   **Ответ:** \((y - x)^3 = C^2 (x + y)\).

3. Решить уравнение \( 4(xy + x^2) \, dy - 2y^2 \, dx = 0 \).
   **Ответ:** \( 2y^2 + xy - Cx = 0 \).

4. Решить уравнение \( (x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy - y \, dx = 0 \).
   **Указание.** Используйте замену \( z(y) = \frac{x(y)}{y} \).
   **Ответ:** \( y^2 - 2Cx = C^2 \).

5. Решить уравнение \( xy' + y \left( \ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0 \).
   **Ответ:** \( y = xe^\frac{c}{x} \).

6. Решить уравнение \( (x - y) \, dx + (2y - x + 1) \, dy = 0 \).
   **Ответ:** \( \frac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = c \).

7. Решить уравнение \( y' = \frac{x - 2y + 3}{2x + y + 1} \).
   **Ответ:** \( (y - 1)^2 + 4(x + 1)(y - 1) - (x + 1)^2 = C \).
8. Решить уравнение \((x - y - 3)dx - (x + y + 1)dy = 0\).
\[\text{Ответ: } (x - 1)^2 - 2(x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2 = C.\]
9. Решить задачу Коши \(y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \ y(\pi) = 5.\)
\[\text{Ответ: } y = -5 \cos x + \sin x.\]
10. Решить уравнение \(y' - y = e^x.\)
\[\text{Ответ: } y = e^x(x + C).\]
11. Решить уравнение \(xy' - 2y = x^3 + x.\)
\[\text{Ответ: } y = x^3 - x + Cx^2.\]
12. Решить задачу Коши \(y' - 2y = e^{-x}, \ y(0) = -1.\)
\[\text{Ответ: } y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}.\]
13. Решить задачу Коши \(y' \cos x - y \sin x = -\cos x - x \sin x, \ y(0) = 2.\)
\[\text{Ответ: } y = x - 2\tan x + \frac{2}{\cos x}.\]
14. Решить уравнение \(y^3 dx - (2xy + 3)dy = 0.\)
\[\text{Ответ: } x = cy^2 - \frac{1}{y}.\]
15. Решить уравнение \(y' - xy = x^3 y^2.\)
\[\text{Ответ: } y(Ce^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 + 2) = 1, \ y = 0.\]
16. Решить уравнение \(2yy' + y^2 = x.\)
\[\text{Ответ: } y^2 = Ce^{-x} + x - 1.\]
17. Решить уравнение \(xy' + y = y^2 \ln x.\)
\[\text{Ответ: } y(Cx + \ln x + 1) = 1, \ y = 0.\]
18. Решить уравнение \(x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.\)
\[\text{Ответ: } y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}.\]
19. Решить задачу Коши \(y' - \frac{y}{x - 3} = \frac{y^2}{x - 3}, \ y(-1) = -2.\)
\[\text{Ответ: } y = \frac{x - 3}{1 - x}.\]
20. Решить уравнение \((2x - y + 2)dx + (2y - x - 1)dy = 0.\)
\[\text{Ответ: } x^2 - xy + 2x + y^2 - y = C.\]
21. Решить задачу Коши \( e^{-y} dx + (2y - xe^{-y}) dy = 0, \quad y(-3) = 0. \)
Ответ: \( xe^{-y} + y^2 = -3. \)
22. Решить уравнение \( x + ye^x + (y + e^x)y' = 0. \)
Ответ: \( x^2 + 2ye^x + y^2 = C. \)
23. Решить уравнение \( (2x + e^y)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^y dy = 0. \)
Ответ: \( x^2 + ye^y = c. \)
24. Решить уравнение \( xdx + ydy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}. \)
Ответ: \( x^2 + y^2 + 2\arctg \frac{x}{y} = c. \)
25. Решить уравнение \( y(1 + xy)dx - xdy = 0, \) если известно, что оно имеет интегрирующий множитель \( \mu = \mu(x) \) или \( \mu = \mu(y) \).
Ответ: \( \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c. \)

Занятия 21–22

Уравнения, допускающие понижение порядка.
Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
Самостоятельная работа

Пример 1. Доказать существование и единственность решения задачи Коши \( y'''' = y^2 + \frac{y'^2}{2} + 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \)

\[ \Delta \] Правая часть уравнения – функция \( F(x, y, y') = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x, \) которая непрерывна и имеет непрерывные частные производные \( F'_y = 2y - \frac{y'^2}{y^2}, \quad F''_y = \frac{2y'}{y} \)
в окрестности точки \((0; 1; 2). \) Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и однозначно. \[ \Delta \]

Пример 2. Показать, что функция \( y = y(x), \) неявно заданная уравнением \( x = y^2 + y, \) является решением уравнения \( y'y''' - 3y''^2 = 0. \)
\[ \Delta \] Находим \( y', y'', y'''. \) Имеем:
\[
y' = \frac{dy}{dx} = 1; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y+1}, \text{ так как } \frac{dy}{dx} = 1: \frac{dx}{dy};
\]
\[
y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2y+1} \right) \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3};
\]
\[
y''' = \frac{d}{dx} \left( -\frac{2}{(2y+1)^3} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2y+1)^5}.
\]
Подставив \( y', y'', y''' \) в левую часть уравнения \( y''y''' - 3y''^2 = 0 \), получим
\[
\frac{1}{2y+1} \cdot \frac{12}{(2y+1)^3} - 3\frac{4}{(2y+1)^5} = 0. \quad \blacktriangleleft
\]

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения \( y'' = xe^{-x} \) и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: \( y = 4, \ y' = 0 \) при \( x = 0 \).

Д Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:
\[
y' = \int xe^{-x} dx = x = u, \ du = dx
\]
\[
e^{-x}dx = dv, \ v = -e^{-x}
\]
\[
y = -\int xe^{-x} dx - \int e^{-x} dx = xe^{-x} - e^{-x} + c_1,
\]
\[
y = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.
\]
Воспользуемся начальными условиями
\[
\begin{cases}
-1 + c_1 = 0, \\
2 + c_2 = 4,
\end{cases}
\]
\[
c_1 = 1, \ c_2 = 2.
\]

Следовательно, частное решение имеет вид \( y = (x + 2)e^{-x} + x + 2. \quad \blacktriangleleft \)

**Пример 4.** Решить уравнение \( (x - 3)y'' + y' = 0 \).

Д Полагая \( y' = z \), получим уравнение первого порядка \((x - 3)\frac{dz}{dx} + z = 0.\)

Разделяя переменные и интегрируя, найдем
\[
\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x-3};
\]
\[
\ln |z| + \ln |x-3| = \ln |c|, \ c \neq 0; \ z(x-3) = c, \ \frac{du}{dx} (x-3) = c; \ y = c \ln |x-3| + c_1.
\]
Функция \( z = 0 \) (\( y = c \)) является решением.

Посмотому \( y = c \ln |x-3| + c_1, \ c, c_1 \in R. \quad \blacktriangleleft \)

**Пример 5.** Найдите общее решение уравнения \( y'' + 2xy' = 0.\)

Д Полагая \( y' = z \), получим
\[
\frac{dz}{z} = -2x; \quad \frac{dz}{z} = -2xdx; \quad z = c_1e^{-x^2}.
\]
Решение \( z = 0 \) не потеряно. Следовательно, \( y = c_1 \int e^{-x^2} dx + c_2. \quad \blacktriangleleft \)

**Пример 6.** Решить задачу Коши \( y'' = \frac{y'}{x} \left( 1 + \ln \frac{y'}{x} \right), \ y = \frac{1}{2}, \ y' = 1 \) при \( x = 1.\)
\[ \Delta \text{ Полагая } y' = z, \text{ получим } \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \left(1 + \ln \frac{z}{x} \right). \text{ Это однородное уравнение.} \]

Проинтегрируем его с помощью подстановки \( z = ux \). Имеем

\[ \frac{du}{dx} x + u = u(1 + \ln u); \quad \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|\ln u| = \ln|\ln x|; \quad u = e^{\ln x}; \quad z = xe^{\ln x}. \]

Полагая \( x = 1 \), находим \( c = 0 \). Согласно произведенной замене

\[ \frac{dy}{dx} = x, \quad y = \frac{1}{2} x^2 + c_1. \text{ Полагая } x = 0, \text{ находим } c_1 = 0. \text{ Окончательно } y = \frac{1}{2} x^2. \]

**Пример 7.** Решить уравнение \( 2(y')^2 = (y - 1)y'' \).

\[ \Delta \text{ Положим } y' = p(y). \text{ Тогда } y'' = p \frac{dp}{dy}. \text{ Уравнение примет вид} \]

\[ p \left(2p - (y - 1)\frac{dp}{dy}\right) = 0. \]

Функция \( p = 0 \) (\( y = c \)) является решением.

Пусть \( p \neq 0 \), тогда \( \frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y - 1} \) или \( \frac{1}{2} \ln |p| = \ln |y - 1| + \ln |c_1| \), откуда

\[ p = c_1^2 (y - 1)^2. \text{ Но } p = \frac{dy}{dx}. \text{ Следовательно, } \frac{dy}{dx} = c_1^2 (y - 1)^2 \text{ или} \]

\[ \int \frac{dy}{c_1^2 (y - 1)^2} = \int dx + c_2, \text{ откуда } \frac{-1}{c_1^2} = (x + c_2)(y - 1). \]

Функция \( y = c \) является особым решением.

**Пример 8.** Найти решение задачи Коши

\[ y'' = -\frac{y^2 + y'^4}{2y}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \]

предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

\[ \Delta \text{ Функция } F(x; y; z) = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y} \text{ непрерывна и имеет ограниченные частные производные } F_y' = \frac{y'^2 + y'^4}{2y^2}, \quad F_y'' = \frac{(y'^2 + 2y'^3)}{y} \text{ в окрестности точки} \ (0;1;2). \]

Поэтому, в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Положим \( y' = p \), где \( p = p(y) \) – новая неизвестная функция.

Тогда \( y'' = p \frac{dp}{dy} \). Относительно \( p = p(y) \) мы получим уравнение

\[ p \frac{dp}{dy} = -\frac{p^2 + p^4}{2y}. \]
Для искомого решения $p \neq 0$. Разделяя переменные, получим

$$-rac{d(p)^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{dy}{y} \quad \text{или} \quad \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} - \frac{d(p^2)}{p^2} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$\ln \frac{p^2+1}{p^2} = \ln |c|y| \quad (c > 0), \quad \frac{p^2+1}{p^2} = c_1 y \quad (c_1 \neq 0).$$

Используя начальные условия, находим $c_1 = \frac{5}{4}$.

Имеем $\frac{p^2+1}{p^2} = 5y, \quad p^2 + 1 = \frac{5}{4} p^2 y, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} y - 1}}$.

Согласно произведенной замене, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{5}{4} y - 1}, \quad \sqrt{\frac{5}{4} y - 1} dy = dx, \quad \frac{8}{15} \left(\frac{5}{4} y - 1\right)^{\frac{3}{2}} = x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем $c_2 = \frac{1}{15}$.

Поэтому $y = \frac{1}{15} \left(15x + 1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}$. ▲

**Пример 9.** Найти кривую, проходящую через точку $(1; 1)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 24):

$$Y - y = y'(X - x).$$

Полагая $X = 0$, находим ординату точки $A$: $y = y - y'x$. Получаем дифференциальное уравнение $y - y'x = x$, или $y' - 1 \frac{1}{x} y = -1$. Это линейное уравнение.

Сделав подстановку Бернулли $y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad$ получим $u''v + u\left(v' - \frac{1}{x} v\right) = -1$.

Нахождим частное решение уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} v = 0, \quad \frac{dv}{x} = \frac{dx}{x}, \quad \ln v = \ln x, \quad v = x$.

Далее ищем общее решение уравнения $\frac{du}{dx} x = -1$. 

107
Имеем \( du = -\frac{dx}{x} \), \( u = \ln c_1 - \ln |x| = \ln \frac{c_1}{|x|} \).

Искомое общее решение принимает вид \( y = x \cdot \ln \frac{c}{x} \).

Используя начальное условие, получим \( 1 = \ln c, \quad c = e \).

Уравнение кривой будет \( y = x \ln \frac{e}{x} = x(\ln e - \ln x) = x(1 - \ln x) \). ▲

Пример 10. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100° до 60°C за 20 мин. Температура воздуха 25°C. Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до 30°C?

Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет
\[ \frac{dT}{d\tau} = k(T - t), \]
где \( T \) – температура хлеба; \( t \) – температура окружающего воздуха; \( k \) – коэффициент пропорциональности; \( \frac{dT}{d\tau} \) – скорость охлаждения хлеба.

Пусть \( \tau \) – искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим
\[ \frac{dT}{T - t} = k d\tau. \]

Для условий задачи
\[ \frac{dT}{T - 25} = k d\tau. \]
Интегрируя, получаем
\[ \int \frac{d(T - 25)}{T - 25} = k \int d\tau, \quad \ln (T - 25) = k\tau + \ln c, \quad T - 25 = ce^{k\tau}. \]

Произвольную постоянную \( c \) определяем из начального условия: при \( \tau = 0 \) \( T = 100 \) °C. Отсюда \( c = 100 - 25 = 75 \). Подставив в полученное уравнение \( T = 60 \) и \( \tau = 20 \), получаем \( e^{k} = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}} \).

Уравнение охлаждения хлеба примет вид \( T = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25 \).

Отсюда \( 5 = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} \), или \( \tau = \frac{-20 \ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71 \) мин. ▲

Пример 11. Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которого параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за
ось Ox и найдем уравнение кривой, вращением которой образуется искомая поверхность (рис. 25).

Пусть $kM$ – падающий луч, $MO$ – отраженный луч. В точке $M$ проведем касательную $TT_1$ к искомой кривой. Так как $\angle T_1MK = \angle TMO = \angle MTO$, то треугольник $MTO$ является равнобедренным. Следовательно, $|OM| = |OT|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной:

$$Y - y = y'(X - x),$$

полагая $Y = 0$, имеем

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Таким образом получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}$, или

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0.$$

Это однородное уравнение. Здесь более целесообразно считать $x$ функцией, а $y$ – аргументом. Применим подстановку $\frac{x}{y} = t$. Тогда получим

$$(\sqrt{t^2 y^2 + y'^2 + ty})dy - y(tdy + ydt) = 0,$$

или

$$\sqrt{t^2 + 1}dy - ydt = 0.$$ В разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \ln y = \ln (t + \sqrt{1 + t^2}) + \ln c_1 \quad (y > 0).$$

Возвращаясь к переменным $x$ и $y$, имеем

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{c},$$

$$y^2 = 2c \left( x + \frac{c}{2} \right).$$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения

$$y^2 + z^2 = 2c \left( x + \frac{c}{2} \right).$$

**Пример 12.** Среднее геометрическое координат точки касания кривой равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(1; 1)$.

$\Delta$ В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 26):

$$Y - y = y'(X - x).$$

Полагая $X = 0$, находим ординату точки $A$: $Y = y - y'x$.

Получаем дифференциальное уравнение
\[ \sqrt{xy} = \frac{y - y'x}{2y}, \text{ или } y' - \frac{1}{x} y = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}. \]

Это уравнение Бернулли.
Сделав подстановку \( y = uv, \ y' = u'v + uv' \), получим
\[ u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}, \quad u'v + u\left( v' - \frac{1}{x}v \right) = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}. \]

Находим частное решение уравнения \( v' - \frac{1}{x}v = 0, \ v = x. \)

Находим общее решение уравнения \( u'x = 2x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}, \)
\[ \frac{1}{2}du \cdot u^{-\frac{3}{2}} = dx, \ u = \frac{1}{(x + c)^{2}}. \]

Искомое общее решение принимает вид \( y = uv = \frac{x}{(x + c)^{2}}. \)

Используя начальное условие \( y(1) = 1 \), получаем две интегральные кривые:

\[ xy = 1 \text{ и } x - y(x - 2)^2 = 0. \)

Дополнительные задачи

1. Решить уравнение \( y''' = x \ln x. \)
   \[ \text{Ответ: } y = \frac{x^4}{24} \ln x - \frac{13}{288} x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \]

2. Решить уравнение \( y''' = x^2 - \sin x. \)
   \[ \text{Ответ: } y = \frac{x^5}{60} - \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \]

3. Решить задачу Коши \( y'' = \frac{\ln x}{x^2}, \ y(1) = 3, \ y'(1) = 1. \)
   \[ \text{Ответ: } y = 2x + 1 - \frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x. \]

4. Решить уравнение \( x^3 y'' + x^2 y' = 1. \)
   \[ \text{Ответ: } y = C_1 \ln x + \frac{1}{x} + C_2. \]

5. Решить уравнение \( y^{IV} = y''' / x. \)
   \[ \text{Ответ: } y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \]

6. Решить задачу Коши \( xy''' - y'' = x^2 + 1, y(-1) = 0, y'(-1) = 1, y''(-1) = 0. \)
Ответ: \( y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{3}{4} \).

7. Решить уравнение \( y'' + y'' \tan x = \frac{1}{\cos x} \).
Ответ: \( y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2 x + C_3 \).

8. Решить задачу Коши \( y'' = \frac{1}{y^3} \), \( y(0) = 1 \), \( y'(0) = 0 \).
Ответ: \( x = y^2 - 1 \).

9. Решить уравнение \( yy'' = y'^2 \).
Ответ: \( y = C_2 e^{C_1 x} \).

10. Решить задачу Коши \( y'' = e^{2y} \), \( y(0) = 0 \), \( y'(0) = 1 \).
Ответ: \( e^{-y} = -x + 1 \).

11. Записать уравнение линии, проходящей через точку \( A(1; 0) \), если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси \( Oy \), равен расстоянию от точки касания до начала координат.
Ответ: \( y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \).

12. Составить уравнение кривой, проходящей через точку \( A(1; 5) \), если угловой коэффициент касательной в любой ее точке \( M \) в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку \( M \) с началом координат.
Ответ: \( y = 5x^3 \).

Самостоятельная работа

Вариант 1

Решить уравнения:

1. \( y' = \frac{e^{2x}}{\ln y} \).
Ответ: \( y(\ln y - 1) = \frac{1}{2} e^{2x} + c. \)

2. \( y' = \frac{y(x + y)}{x^2} \).
Ответ: \( y = \frac{-x}{\ln|cx|} \).

3. \( y' + \frac{1}{x} y = e^{-x^2} \), \( y(1) = \frac{1}{2e} \).
Ответ: \( y = e^{-x^2} \).

4. \( (x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0. \)
Ответ: \( x^3 + 3y + 3x \sin y = c. \)
5. $y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{1}{x^3}$. 
Ответ: $y = c_1 \ln x + \frac{1}{x} + c_2$.

Вариант 2

Решить уравнения:

1. $(1 + e^x) y \cdot y' = e^x$. 
Ответ: $y^2 = 2 \ln |c(e^x + 1)|$.

2. $y' = \frac{y^2 + 2x^2}{xy}$. 
Ответ: $y^2 = 4x^2 \ln |c|$. 

3. $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$, $y(0) = 0$. 
Ответ: $y = \frac{1}{3}x^3 e^{x^3}$.

4. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$. 
Ответ: $x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = 0$.

5. $y'' - \frac{1}{x} y' = x$. 
Ответ: $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

Занятия 23–24

Линейные уравнения высших порядков

Пример 1. Найти определитель Вронского систем функций:

а) $e^x$, $xe^x$, $x^2 e^x$; $J = (-\infty;+\infty)$; 
б) $3 \cos^2 x, \sin^2 x$; $J = (-\infty;+\infty)$; 
в) $x^2, x \cdot |x|$; $J = (-\infty;+\infty)$.

Исследовать данные функции на линейную зависимость.

$$
\Delta \quad \text{а)} \quad \text{Находим} \quad W(x) = \begin{vmatrix}
e^x & xe^x & x^2 e^x \\
e^x & (x+1)e^x & (x^2 + 2x)e^x \\
e^x & (x+2)e^x & (x^2 + 4x + 2)e^x
\end{vmatrix} = e^{3x}.
$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, данные функции линейно независимы на $J$.

б) $W(x) = \begin{vmatrix}
3 & \cos^2 x & \sin^2 x \\
0 & -\sin 2x & \sin 2x \\
0 & -2 \cos 2x & 2 \cos 2x
\end{vmatrix} = 0.$
Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Но так как \( \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x = 0 \) при \( \alpha_1 = -\frac{1}{3}, \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \), данные функции являются линейно зависимыми на \( J \).

в) Для функции \( f(x) = x \cdot |x| \) при \( x > 0 \) \( f'(x) = 2x = 2|x| \), при \( x < 0 \) \( f'(x) = -2x = 2|x| \), при \( x = 0 \) \( f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x} = 0 = 2|x| \).

Таким образом, \( (x \cdot |x|)' = 2x, \ x \in J \).

Находим \( W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x \cdot |x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0. \)

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Данные функции линейно независимы на \( J \), так как тождество \( \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \cdot |x| \equiv 0 \ (x \in J) \) выполняется только при \( \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \). Действительно, при \( x = 1 \) получаем \( \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \); при \( x = -1 \) имеем \( \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \). Эта система имеет решение \( \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \). ▲

**Пример 2.** Показать, что функции \( y_1 = x^2 \) и \( y_2 = x^5 \) образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения второго порядка, и найти решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями \( y(1) = 1, \ y'(1) = -2 \).

\[ \Delta \text{ Находим определитель Вронского } W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6. \]

Следовательно, функции \( y_1 = x^2 \) и \( y_2 = x^5 \) образуют фундаментальную систему решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными функциями при \( x \neq 0 \). Общее решение этого уравнения имеет вид \( y = c_1 x^2 + c_2 x^5 \), где \( c_1 \) и \( c_2 \) — произвольные постоянные.

Для решения поставленной задачи Коши необходимо определить значения постоянных \( c_1 \) и \( c_2 \) так, чтобы выполнялись заданные начальные условия.

Имеем \( \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ 2c_1 + 5c_2 = -2, \end{cases} \) откуда \( c_1 = \frac{7}{3}, \ c_2 = -\frac{4}{3} \).

Поэтому решение данной задачи Коши имеет вид \( y = \frac{7}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^5 \). ▲

**Пример 3.** Показать, что функции \( y_1 = 1, \ y_2 = x, \ y_3 = e^x \) образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения...
третьего порядка. Составить это уравнение.

Δ Найдем $W(y_1; y_2; y_3)$:

$$W(y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \neq 0 \ \forall x \in R.$$ 

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка с коэффициентами, непрерывными на $(-\infty; +\infty)$.

Это уравнение имеет вид $W(y; y_1; y_2; y_3) = 0$.

$$W(y; y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} y & 1 & x & e^x \\ y' & 0 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -e^x \begin{vmatrix} y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 1 \\ y''' & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x (y''' - y'') = e^x (y'' - y').$$

Искомое уравнение имеет вид $e^x (y'' - y') = 0$, или $y'' - y' = 0$. ▲

**Пример 4.** Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 5y' + 6y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$;
в) $y'' + 4y' + 4y = 0$; г) $y'' + 2y' + 7y = 0$.

Δ а) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ – числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}$, $e^{-3x}$.

Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$.

б) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ – числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 6$. Фундаментальную систему решений образуют функции 1 и $e^{6x}$. Общее решение имеет вид $y = c_1 + c_2 e^{6x}$.

в) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ – числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}$ и $xe^{-2x}$. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x}$.

г) Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$ – числа $\lambda_1 = -1 \pm i\sqrt{6}$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-x} \cos \sqrt{6}x$ и $e^{-x} \sin \sqrt{6}x$. Общее решение имеет вид $y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{6}x + c_2 \sin \sqrt{6}x)$. ▲
Пример 5. Найти общие решения уравнений:

а) \( y^{(4)} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0; \)

в) \( y^{(5)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0; \)

g) \( y^{(4)} + 2y''' + y = 0; \)

d) \( y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' - 4y' - 4y = 0. \)

\[ \Delta \ a) \text{Находим корни характеристического уравнения } \lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0. \]

Имеем

\[ \lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) = \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6) = \]

\[ = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4) = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0. \]

Откуда \( \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 3. \)

Фундаментальную систему решений образуют функции 1, \( e^x, e^{2x}, e^{3x}. \)

Общее решение имеет вид \( y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}. \)

б) \( y^{(4)} + 8y = 0; \)

g) \( y^{(4)} + 2y''' + y = 0; \)

d) \( y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' - 4y' - 4y = 0. \)

\[ \Delta \ a) \text{Находим корни характеристического уравнения } \lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0. \]

Имеем

\[ \lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) = \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6) = \]

\[ = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4) = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0. \]

Откуда \( \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 3. \)

Фундаментальную систему решений образуют функции 1, \( e^x, e^{2x}, e^{3x}. \)

Общее решение имеет вид \( y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}. \)

Пример 6. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить
уравнение \( y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1} \).

Решим соответствующее однородное уравнение \( y'' - y = 0 \). Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 - 1 = 0 \). Откуда \( \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1 \).  Фундаментальную систему решений образуют функции \( y_1 = e^x \) и \( y_2 = e^{-x} \). Общее решение однородного уравнения имеет вид \( y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \).

Общее решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде 
\( y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x} \).

Составим систему
\[
\begin{align*}
    c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} &= 0, \\
    c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} &= \frac{e^x}{e^x + 1}.
\end{align*}
\]

Решая ее, находим: 
\( c_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x + 1}, \ c_2'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \).

Интегрируя, имеем: 
\( c_1(x) = \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \int e^x (e^x + 1)dx = e^x = t \)

\( c_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{x} + 1 - 1}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + c_2 \).

Общее решение имеет вид
\( y = \frac{1}{2} ((x - \ln(e^x + 1))e^x + (-1 + \ln(e^x + 1))e^{-x}) + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \). ▲

Пример 7. Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) \( y'' - 4y = x^2 e^{2x} \);

б) \( y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x} \);

в) \( y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x \);

г) \( y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x} \);

д) \( y''' + 6y'' + 10y' = xe^{3x} \cos x + x; \)

е) \( y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x} \sin 2x \).

\( \Delta \) а) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 - 4 = 0 \). Откуда \( \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2 \). Частное решение имеет вид \( y^* = x(A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{2x} \).

б) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \). Откуда \( \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \). Частное решение имеет вид
\( y^* = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3x^2 e^{2x} \).

в) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \). Откуда
\[ \lambda_{1,2} = -1 \pm i. \] Частное решение имеет вид \[ y^* = e^x (A_1 \sin x + A_2 \cos x). \]

г) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0. \) Откуда \( \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3. \) Частное решение имеет вид

\[ y^* = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x + x(A_4 x + A_5) e^{2x}. \]

d) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0. \) Откуда \( \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -3 \pm i. \) Частное решение имеет вид

\[ y^* = x e^{-3x} ((A_1 x + A_2) \cos x + (A_3 x + A_4) \sin x) + x(A_5 x + A_6). \]

e) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^3 - 4\lambda = 0. \) Откуда \( \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2. \) Частное решение имеет вид

\[ y^* = A_1 x + A_2 x e^{2x} + e^{2x} (A_4 \sin 2x + A_5 \cos 2x). \]

Пример 8. Найти общее решение уравнения \( y'' - y'' = 3x^2 - 2x + 5. \)

\( \Delta \) Так как характеристическое уравнение \( \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \) имеет корни \( \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1, \) то общим решением соответствующего однородного уравнения \( y'' - y'' = 0 \) является функция \( Y_{o.o} = c_1 + c_2 x + c_3 e^x. \) Частное решение уравнения определяется формулой \( y^* = x^2 (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2. \)

Находим:
\[ y^* = 4A_1 x^3 + 3A_2 x^2 + 2A_3 x; \]
\[ y^*'' = 12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3; \]
\[ y^*''' = 24A_1 x + 6A_2. \]

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим
\[ 24A_1 x + 6A_2 - 12A_1 x^2 - 6A_2 x - 2A_3 \equiv 3x^2 - 2x + 5 \] или
\[ (3 + 12A_1) x^2 + (6A_2 - 24A_1 - 2) x + (5 + 2A_3 - 6A_2) \equiv 0, \] откуда
\[ \begin{cases} 3 + 12A_1 = 0, \\ 6A_2 - 24A_1 - 2 = 0, \\ 5 + 2A_3 - 6A_2 = 0. \end{cases} \]

Решая систему, находим: \( A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{2}{3}, \quad A_3 = -\frac{9}{2}. \)

Общее решение имеет вид \( Y_{o.o} = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{9}{2} x^2. \)

Пример 9. Решить уравнение \( y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x. \)

\( \Delta \) Находим корни характеристического уравнения \( \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0, \) откуда \( \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i. \) Общим решением соответствующего однородного уравнения явля-
является функция $Y_{o.o} = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. Частное решение уравнения определяется формулой $y^* = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x$. Подставляя функцию $y^*$ и ее производные $y'^*= -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x$, $y^{**} = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство
\[(A_1 - 6A_2) \cos 3x + (6A_1 + A_2) \sin 3x = 37 \cos 3x,
\]
откуда
\[
\begin{aligned}
A_1 - 6A_2 &= 37, \\
6A_1 + A_2 &= 0.
\end{aligned}
\]
Решая систему, находим: $A_1 = 1$, $A_2 = -6$.
Следовательно, $Y_{o.o} = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x$. ▲

Пример 10. Решить уравнение $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

$\Delta$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{o.o} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Пользуясь принципом суперпозиции (наложения), частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y^*_1 + y^*_2 = (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}$.

Итак,
\[
\begin{aligned}
y^{*} &= (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}, \\
y^{*'} &= A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x - A_3 e^{-x}, \\
y^{*''} &= 2A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x},
\end{aligned}
\]
$y^{*''} + y^{*} = 2A_1 xe^x + (2A_1 + 2A_2)e^x + 2A_3 e^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}$.

Отсюда
\[
\begin{aligned}
2A_1 &= 1, \\
2A_1 + 2A_2 &= 0, \\
A_1 &= \frac{1}{2}, \\
A_2 &= -\frac{1}{2}, \\
A_3 &= 2.
\end{aligned}
\]
Следовательно, общее решение исходного уравнения
\[
Y_{o.h} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} (x - 1)e^x + e^{-x}. \ ▲
\]

Пример 11. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

$\Delta$ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения $Y_{o.o} = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$. Так как число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде
\[
y^{*} = x^2 (A_1 x + A_2)e^x = (A_1 x^3 + A_2 x^2)e^{2x}.
\]
Находим:
\[
y^{*'} = (2A_1 x^3 + (3A_1 + 2A_2) x^2 + 2A_2 x)e^{2x},
\]
и...
\[ y^{***} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}. \]

Таким образом,

\[ \begin{align*}
4y^* &= (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}, \\
-4y^* &= (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x}, \\
1y^{**} &= (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}, \\
y^{**} - 4y^* + 4y^* &= 6A_1xe^{2x} + 2A_2e^{2x} \equiv xe^{2x}.
\end{align*} \]

Отсюда \( A_1 = \frac{1}{6}, \ A_2 = 0. \)

Следовательно, общее решение исходного уравнения

\[ Y_{o,n} = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{x^3}{6} e^{2x}. \]

**Пример 12.** Решить задачу Коши \( y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1, \ y(0) = \frac{1}{8}, \ y'(0) = 1. \)

\( \Delta \) Характеристическое уравнение \( \lambda^2 - 2\lambda = 0 \) имеет корни \( \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \)

поэтому общее решение однородного уравнения: \( Y_{o,o} = c_1 + c_2 e^{2x}. \)

Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение исходного уравнения следует искать в виде \( y^* = y_{*1}^* + y_{*2}^* = A_1xe^{2x} + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x. \)

Подставляя функцию \( y^* \) и ее производные

\[ \begin{align*}
y'^* &= 2A_1e^{2x} + 2A_1xe^{2x} + 3A_2x^2 + 2A_3x + A_4, \\
y^{**} &= 6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3 \equiv e^{2x} + x^2 - 1, \text{ откуда} \\
&\begin{cases} -6A_2 = 1, \\
-6A_2 - 4A_3 = 0, \\
2A_3 - 2A_4 = -1. \end{cases}
\end{align*} \]

Решая систему, находим: \( A_1 = \frac{1}{2}, \ A_2 = -\frac{1}{6}, \ A_3 = -\frac{1}{4}, \ A_4 = \frac{1}{4}. \)

Следовательно, \( Y_{o,n} = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x. \)

Для того чтобы решить задачу Коши, находим

\[ Y_{o,n}' = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}. \]

Используя начальные условия, получаем систему для определения \( c_1 \) и \( c_2 \):
\[
\begin{cases}
c_1 + c_2 = \frac{1}{8}, \\
2c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,
\end{cases}
\]
откуда находим \( c_1 = 0, \ c_2 = \frac{1}{8}. \)

Таким образом, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид
\[
y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x.
\]
▲

Дополнительные задачи

1. Решить уравнения:
   a) \( y'' - y' + y = 0; \)
   b) \( y'' - 2y'' + 9y' - 18y = 0; \)
   в) \( y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0; \)
   г) \( y'' - 4y' + 3y = 0; \)
   д) \( y'' - 5y' = 0; \)
   е) \( y'' + 6y' + 9y = 0; \)
   ж) \( 4y'' - 4y' + y = 0; \)
   з) \( y'' - 2y' + 2y = 0; \)
   и) \( y'' - 6y' + 13y = 0; \)
   к) \( y^{IV} - 16y = 0; \)
   л) \( y^{IV} + 4y = 0. \)

Ответ: а) \( y = e^{\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right); \)
   б) \( y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x; \)
   в) \( y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x; \)
   г) \( y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}; \)
   д) \( y = C_1 + C_2 e^{5x}; \)
   е) \( y = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x}; \)
   ж) \( y = C_1 e^{x} + C_2 xe^{\frac{x}{2}}; \)
   з) \( y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x); \)
   и) \( y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x); \)
   к) \( y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x; \)
   л) \( y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x). \)

2. Решить уравнения методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных):
   a) \( y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}; \)
   б) \( y'' - y' = e^{2x} \cos e^x; \)
в) \( y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \); г) \( y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1} \).

Ответ: а) \( y = \left( \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + c_1 \right) \cos 2x + \left( \frac{1}{2} x + c_1 \right) \sin 2x \);
б) \( y = c_1 + c_2 e^x - \cos(e^x) \); в) \( y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{x^2}{4} e^{-2x}(2 \ln x - 3) \);
г) \( y = e^x(C_1 + C_2 x) + e^x \left( x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right) \).

3. Указать вид частного решения уравнения:
а) \( y''' + 4y'' - 3y' + 2y = (2x + 1)e^{3x} \);
б) \( y''' + 49y = x^3 + 4x + 3 \sin 7x \); г) \( y''' - y'' + y = e^x \cos x \);
д) \( y'' + y = x \cos x \); е) \( y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x \);
ж) \( y'' - y' = e^x \sin x + 2x^2 \).

Ответ: а) \( y_q = x^2(Ax + B) \); б) \( y_q = x(Ax + B)e^{3x} \);
в) \( y_q = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + x(M \cos 7x + N \sin 7x) \);
г) \( y_q = e^x(A \cos x + B \sin x) \); д) \( y_q = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x) \);
е) \( y_q = (Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x \);
ж) \( y_q = e^x(A \cos x + B \sin x) + x(Cx^2 + Dx + F) \).

4. Решить уравнения:
а) \( y''' + 3y'' - y' - 3y = 3x - 14 \);
б) \( y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x} \);
в) \( y''' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x \);
г) \( y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x} \);
д) \( y'' - 3y' = e^{3x} - 18x \);
е) \( y''' - y'' = -3x + 1 \);
ж) \( y'' - y = \cos^2 x \).

Ответ: а) \( y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x - x + 5 \);
б) \( y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + x^3 e^{-x} \).
в) \( y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4 \cos 2x - 3 \sin 2x; \)

г) \( y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x} + xe^{-2x}; \)

d) \( y = \frac{1}{3} xe^{3x} + 3x^2 + 2x + c_1 + c_2 e^{3x}; \)

e) \( y = \frac{1}{2} x^3 + x^2 + c_1 e^x + c_2 + c_3 x; \)

ж) \( y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos 2x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \)

### Занятия 25–26

#### Системы дифференциальных уравнений

**Пример 1.** Решить систему уравнений

\[
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x \sin t, \\
\frac{dy}{dt} &= xe^{\cos t}.
\end{aligned}
\]

\( \Delta \) Первое уравнение решается независимо от второго. Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим

\[
\frac{dx}{t} = \sin t dt, \quad \ln |x| = c - \cos t, \quad x = c_1 e^{-\cos t} \quad (c_1 \in \mathbb{R}).
\]

Подставляем найденное значение \( x(t) \) во второе уравнение \( \frac{dy}{dt} = c_1. \)

Отсюда \( y = c_1 t + c_2. \) \( \Delta \)

**Пример 2.** Решить систему уравнений

\[
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{y}{t}, \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{x}{t},
\end{aligned}
\] \( t > 0. \)

\( \Delta \) Сложив почленно данные уравнения, получим \( \frac{d}{dt} (x + y) = -\frac{1}{t} (x + y), \)
откуда \( x + y = \frac{c_1}{t}. \)

Вычитая почленно исходные уравнения, имеем \( \frac{d}{dt} (x - y) = \frac{1}{t} (x - y), \)
откуда \( x - y = c_2 - t. \)

Из системы уравнений \[
\begin{aligned}
x + y &= \frac{c_1}{t}, \\
x - y &= c_2 t
\end{aligned}
\]
находим \( x = \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{t} + c_2 t \right). \)
Пример 3. Решить систему уравнений

\[
\begin{align*}
\frac{dx}{dt} &= x^2 y, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} - xy^2.
\end{align*}
\]

Умножив обе части первого уравнения на \( y \), а второго – на \( x \) и сложив почленно полученные уравнения, имеем \( y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t} \) или \( d(xy) = \frac{xy}{t} \, dt \).

Отсюда \( xy = c_1 t \).

Заменяя в первом уравнении данной системы \( xy \) на \( c_1 t \), получим

\[
\frac{dx}{dt} = c_1 tx.
\]

Интегрируя это уравнение, находим \( x = c_1 e^{\frac{c_1 t^2}{2}} \). Если \( c_2 \neq 0 \), то \( y = \frac{c_1 t}{x} = \frac{c_1}{c_2} e^{\frac{c_1 t^2}{2}} \).

Если \( c_2 = 0 \), т. е. \( x = 0 \), то \( y = ct \); если \( y = 0 \), то \( x = c \). ▲

Пример 4. Найти общее решение системы

\[
\begin{align*}
\frac{dy}{dx} + 2y - 4z &= 0, \\
\frac{dz}{dx} + y - 3z &= 3x^2
\end{align*}
\]

и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям \( y(0) = -7, \ z(0) = -1\frac{3}{4} \).

Дифференцируем по \( x \) первое уравнение: \( y'' + 2y' - 4z' = 0 \). Подставляем в это уравнение \( z' = 3x^2 - y + 3z \), а затем \( z = \frac{1}{4}(y' + 2y) \). В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией \( y \): \( y'' - y' - 2y = 12x^2 \).

Составим и решим характеристическое уравнение \( \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \), \( \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \).

\[ Y_{o.o} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}; \quad Y_{u,n} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3; \quad Y'_{u,n} = 2A_1 x + A_2; \quad Y''_{u,n} = 2A_1 . \]

Находим неизвестные коэффициенты \( A_1, A_2, A_3 \):

\[
2A_1 - 2A_1 x - A_2 - 2A_1 x^2 - 2A_2 x - 2A_3 = 12x^2, \quad A_1 = -6, \quad A_2 = 6, \quad A_3 = -9.
\]
Следовательно,

\[ Y_{o.m} = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \quad Z_{o.m} = \frac{y' + 2y}{4} = \frac{1}{4}c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 3x^2 - 3. \]

Подставив в полученные соотношения \( x = 0, y = -7, z = -1 \frac{3}{4} \), получим

\[
\begin{align*}
    c_1 + c_2 - 9 &= -7, \\
    \frac{1}{4}c_1 + c_2 - 3 &= -1 \frac{3}{4}.
\end{align*}
\]

Откуда \( c_1 = 1, \ c_2 = 1 \).

Частное решение имеет вид

\[
\begin{align*}
    y &= e^{-x} + e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \\
    z &= \frac{1}{4}e^{-x} + e^{2x} - 3x^2 - 3. 
\end{align*}
\]

Пример 5. Решить систему уравнений

\[
\begin{align*}
    y' &= -y - 2z, \\
    z' &= 3y + 4z.
\end{align*}
\]

Найти ее частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: \( y = -1, \ z = 2 \) при \( x = 0 \).

\( \Delta \) Частные решения этой системы ищем в виде \( y = \alpha e^{\lambda x}, \ z = \beta e^{\lambda x} \).

Составляем характеристическое уравнение

\[
\begin{vmatrix}
    -1 - \lambda & -2 \\
    3 & 4 - \lambda
\end{vmatrix}
= 0.
\]

\( \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \). Оно имеет корни \( \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \).

При \( \lambda = \lambda_1 = 1 \) система уравнений для нахождения \( \alpha \) и \( \beta \) имеет вид

\[
\begin{align*}
    -2\alpha - 2\beta &= 0, \\
    3\alpha + 3\beta &= 0.
\end{align*}
\]

Она эквивалентна уравнению \( \alpha + \beta = 0 \), одно из решений которого: \( \alpha = 1, \beta = -1 \). Поэтому характеристическому числу \( \lambda = 1 \) соответствует частное решение \( y_1 = e^x, \ z_1 = -e^x \).

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу \( \lambda_2 = 2 \):

\[
\begin{align*}
    -3\alpha - 2\beta &= 0, \\
    3\alpha + 2\beta &= 0.
\end{align*}
\]

Одно из решений этой системы: \( \alpha = 2, \beta = -3 \).

Таким образом, \( y_2 = 2e^{2x}, \ z_2 = -3e^{2x} \).

Общим решением системы уравнений будет

\[
\begin{align*}
    y &= c_1e^x + 2c_2e^{2x}, \\
    z &= -c_1e^x - 3c_2e^{2x}.
\end{align*}
\]
Найдем частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Полагая в общем решении \( x = 0, \ y = -1, \ z = 2, \) имеем \[
\begin{align*}
-1 &= c_1 + 2c_2, \\
2 &= -c_1 - 3c_2,
\end{align*}
\] откуда \( c_1 = 1, c_2 = -1. \)

Поэтому частным решением будет \[
\begin{align*}
y &= e^x - 2e^{2x}, \\
z &= -e^x + 3e^{2x}.
\end{align*}
\]

Пример 6. Решить систему уравнений \[
\begin{align*}
\frac{dx}{dt} &= 3x + y, \\
\frac{dy}{dt} &= -x + y.
\end{align*}
\]

Составляем и решаем характеристическое уравнение:
\[
\begin{vmatrix}
3 - \lambda & 1 \\
-1 & 1 - \lambda
\end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.
\]

Так как характеристическое уравнение имеет корень \( \lambda = 2 \) кратностью два, частные решения системы ищем в виде \( x = (\alpha + \gamma t)e^{2t}, \ y = (\beta + \delta t)e^{2t}. \)

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим
\[
\begin{align*}
\gamma + 2(\alpha + \gamma t) &= 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\
\delta + 2(\beta + \delta t) &= -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t.
\end{align*}
\]

Эти равенства тождественно выполняются тогда и только тогда, когда
\[
\begin{align*}
\alpha - \gamma + \beta &= 0, \\
\gamma + \delta &= 0.
\end{align*}
\]

Полученная алгебраическая система имеет два линейно независимых решения, так как она содержит четыре неизвестных и ранг матрицы системы не равен нулю.

Очевидно, что в качестве таких решений можно взять, например, \( \alpha = 1, \beta = -1, \ \gamma = \delta = 0 \) и \( \alpha = 1, \beta = 0, \ \gamma = 1, \ \delta = -1. \) Следовательно, найдены два линейно-независимых решения исходных уравнений: \( x_1 = e^{2t}, \ y_1(t) = -e^{2t} \) и \( x_2 = (1 + t)e^{2t}, \ y_2(t) = -te^{2t}. \)

Все решения начальной системы уравнений запишутся в виде
\[
\begin{align*}
x &= c_1e^{2t} + c_2(1 + t)e^{2t}, \\
y &= -c_1e^{2t} - c_2te^{2t}.
\end{align*}
\]
Пример 7. Решить систему уравнений
\[ \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases} \]

\[ \Delta \text{ Составляем и решаем характеристическое уравнение} \]
\[ \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i. \]

Построим комплексное решение вида \( y = \alpha e^{(2+i)x}, \quad z = \beta e^{(2+i)x}, \) соответствующее характеристическому числу \( \lambda_1 = 2 + i. \) Числа \( \alpha \) и \( \beta \) определяем из уравнения \(-i\alpha - \beta = 0.\) Полагая \( \alpha = 1, \) находим \( \beta = -i, \) так что
\[ \begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x} (\cos x + i \sin x), \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x} (\sin x - i \cos x). \end{cases} \]

Отделяя действительные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения:
\[ \begin{cases} y_1 = e^{2x} \cos x, \\ z_1 = e^{2x} \sin x, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = e^{2x} \sin x, \\ z_2 = -e^{2x} \cos x. \end{cases} \]

Общим решением системы будет
\[ \begin{cases} y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x), \\ z = e^{2x} (c_1 \sin x - c_2 \cos x). \end{cases} \]

Пример 8. Решить систему уравнений
\[ \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases} \]

\[ \Delta \text{ Составляем и решаем характеристическое уравнение} \]
\[ \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda (\lambda^2 - 1) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1. \]

Частные решения системы будем искать в виде \( x_1 = \alpha e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = \beta e^{\lambda_2 t}, \quad x_3 = \gamma e^{\lambda_3 t}. \)

Корню \( \lambda_1 = 0 \) соответствует система из двух уравнений (третье есть следствие первых двух): \[ \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \beta - 4\gamma = 0. \end{cases} \]
Одно из решений: \( \alpha = 2, \beta = -4, \gamma = -1 \).
Отсюда получаем одно решение исходной системы:
\[
x_1^{(1)} = 2e^{\gamma t} = 2, \quad x_2^{(1)} = -4e^{\beta t} = -4, \quad x_3^{(1)} = -1e^{\alpha t} = -1.
\]
Корню \( \lambda_2 = 1 \) соответствует система
\[
\begin{cases}
2\gamma = 0, \\
-\alpha - 3\gamma = 0.
\end{cases}
\]
Одно из решений: \( \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0 \).
Получаем второе решение исходной системы: \( x_1^{(2)} = 0, \quad x_2^{(2)} = e^t, \quad x_3^{(2)} = 0 \).
Корню \( \lambda = -1 \) соответствует система
\[
\begin{cases}
2\alpha + 2\gamma = 0, \\
2\beta - 4\gamma = 0.
\end{cases}
\]
Одно из решений: \( \alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -1 \).
Отсюда получаем третье решение исходной системы:
\( x_1^{(3)} = e^{-t}, \quad x_2^{(3)} = -2e^{-t}, \quad x_3^{(3)} = -e^{-t} \).
Общее решение имеет вид
\[
x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ или }
\begin{cases}
x_1 = 2c_1 + c_3 e^{-t}, \\
x_2 = -4c_1 + c_2 e^t - 2c_3 e^{-t}, \\
x_3 = -c_1 - c_3 e^{-t}.
\end{cases}
\]

Пример 9. Решить систему уравнений
\[
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\
\frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}.
\end{cases}
\]
а) Методом вариации произвольных постоянных.
б) Методом неопределенных коэффициентов.

\[\Delta\]

а) Рассмотрим однородную систему
\[
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\
\frac{dy}{dt} = x + 2y.
\end{cases}
\]
Ее решение ищем в виде \( x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}, \) где \( \lambda \) — корень уравнения
\[
\begin{vmatrix}
3 - \lambda & 2 \\
1 & 2 - \lambda
\end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.
\]
Соответствующие корню \( \lambda_1 = 1 \) значения \( \alpha \) и \( \beta \) определяем из уравнения \( 2\alpha + 2\beta = 0 \). Одно из решений этого уравнения есть \( \alpha = 1, \beta = -1 \). Поэтому \( x_1 = e^t, \quad y_1 = -e^t \) — решение однородной системы. Значения \( \alpha \) и \( \beta \), соответствующие второму корню \( \lambda = 4 \), определяются из уравнения \( -\alpha + 2\beta = 0 \). Чис-
ла $\alpha = 2$, $\beta = 1$ удовлетворяют этому уравнению, поэтому $x_2 = 2e^{4t}$, $y_2 = e^{4t}$ – решение однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$
\begin{align*}
x &= c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\
y &= -c_1 e^t + c_2 e^{4t}.
\end{align*}
$$

Решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$
\begin{align*}
x &= c_1(t)e^t + 2c_2(t)e^{4t}, \\
y &= -c_1(t)e^t + c_2(t)e^{4t}.
\end{align*}
$$

После подстановки этих выражений в начальную систему уравнений

$$
\begin{align*}
c_1'(t)e^t + 2c_2'(t)e^{4t} &= 3e^{2t}, \\
-c_1(t)e^t + c_2'(t)e^{4t} &= e^{2t}.
\end{align*}
$$

Отсюда $c_1'(t) = \frac{1}{3}e^t$, $c_2'(t) = \frac{4}{3}e^{-2t}$ или $c_1(t) = \frac{1}{3}e^t + c_1$, $c_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + c_2$.

Подставляем найденные значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в решение неоднородной системы. Окончательно получим

$$
\begin{align*}
x &= c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\
y &= -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}.
\end{align*}
$$

б) Общее решение линейной неоднородной системы имеет вид $X_{\text{o,n}} = X_{\text{o,o}} + X_{\text{ч,n}}$.

Найдем $X_{\text{ч,n}} = \begin{pmatrix} x_{\text{ч,n}} \\ y_{\text{ч,n}} \end{pmatrix}$.

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, частное решение системы ищем в виде $x = \alpha e^{2t}$, $y = \beta e^{2t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнение для определения коэффициентов $\alpha$ и $\beta$:

$$
\begin{align*}
2\alpha &= 3\alpha + 2\beta + 3, \\
2\beta &= \alpha + 2\beta + 1,
\end{align*}
$$

$\alpha = -1$, $\beta = -1$.

Таким образом, искомое частное решение есть $x_{\text{ч,n}} = -e^{2t}$, $y_{\text{ч,n}} = -e^{2t}$, а общее решение системы имеет вид

$$
\begin{align*}
x &= c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\
y &= -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}.
\end{align*}
$$

Пример 10. Для системы неоднородных линейных уравнений

$$
\begin{align*}
\frac{dx}{dt} &= 2x + y + 2e^t, \\
\frac{dy}{dt} &= x + 2y - 3e^{4t}.
\end{align*}
$$

128
нужно записать структуру его частного решения.

Δ Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы
\[ \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3. \]

Так как число 1 является простым корнем характеристического уравнения, а число 4 не является корнем характеристического уравнения, частное решение данной системы имеет вид
\[ x_{ч,н} = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{At}, \quad y_{ч,н} = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{At}. \]

Пример 11. Решить систему уравнений
\[ \begin{cases} dx \over dt = y + \tan^2 t - 1, \\ dy \over dt = -x + \tan t. \end{cases} \]

Δ Найдем общее решение соответствующей однородной системы
\[ \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i. \]

Построим комплексное решение вида \( x = \alpha e^{it}, \quad y = \beta e^{it} \). Числа \( \alpha \) и \( \beta \) определяем из уравнения \( i\alpha + \beta = 0 \). Полагая \( \alpha = 1 \), находим \( \beta = i \).

Таким образом, \( x = e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad y = i e^{it} = -\sin t + i \cos t \).

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем
\[ \begin{cases} x_1 = \cos t, \\ x_2 = \sin t, \\ y_1 = -\sin t, \\ y_2 = \cos t. \end{cases} \]

Общее решение однородной системы имеет вид
\[ \begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases} \]

Решение неоднородной системы ищем в виде
\[ \begin{cases} x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t. \end{cases} \]

Подставляя эти выражения в исходную систему, получаем
\[ \begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = \tan^2 t - 1, \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \tan t. \end{cases} \]

Отсюда \( c_1'(t) = -\cos t, \quad c_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}. \)
Интегрируя, находим $c_1(t) = -\int \cos t \, dt = c_1 - \sin t$.

$$c_2(t) = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} \, dt = -\int \frac{(1-\cos^2 t) \cos t}{\cos^2 t} \, dt = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$ 

Последовательно: 

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \tan t, \\
y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2. \end{cases}$$

Дополнительные задачи

1. Решить системы методом исключения:

   a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\
                   \frac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases}$
   
   b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\
                   \frac{dy}{dt} = -8x - 5y; \end{cases}$
   
   в) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\
                   \frac{dy}{dt} = 5x - y + 1; \end{cases}$
   
   г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\
                   \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$
   
   д) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \tan^2 t - 1, \\
                   \frac{dy}{dt} = -x + \tan t. \end{cases}$

Ответ: 

a) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}$;

б) $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$, $y = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}$;

в) $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2t + \frac{7}{4}$;

$y = (C_1 - 2C_2) \cos 2t + (2C_1 + C_2) \sin 2t + 10t + \frac{15}{4}$;

г) $x = C_1 + C_2 e^{2t}$, $y = -C_1 + C_2 e^{2t} - e^{t}$;

д) $x = -C_2 \cos t + C_1 \sin t + \tan t$, $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2$.

2. Решить систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\
                   \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка.

Ответ: $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t$. 

130
3. Решить систему с помощью характеристического уравнения.

Ответ: \( x = c_1 e^{5t} + c_2 e^t, \quad y = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^t. \)

4. Найти общее решение системы методом вариации постоянных.

Ответ: \( y = -2e^{-x} + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \quad z = e^{-x} - c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}. \)

5. Найти общее решение системы

Ответ: \( x = 2c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad y = 3c_1 - 2c_2 e^{2t}, \quad z = c_1 + c_2 e^t + 2c_3 e^{2t}. \)

Занятие 27

Контрольная работа. Дифференциальные уравнения.

Вариант 1

1. Решить задачу Коши

\( y'' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0. \)

Ответ: \( y = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{5}{8} xe^{2x}. \)

2. Найти общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

\( y'' + 4y = 8 \cot 2x. \)

Ответ: \( y = 2 \sin 2x \ln |\tan x| + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x. \)

3. Определить вид частного решения:

а) \( y'' + 4y' + 5y = 3xe^{-2x} \cos x; \)
6) \( y''' - 4y' = e^{2x} \cos 2x - 4x. \)

Ответ: а) \( y = e^{-2x} ((Ax^2 + Bx) \cos x + (Dx^2 + Kx) \sin x); \)
б) \( y = e^{2x} (A \cos 2x + B \sin 2x) + (Dx^2 + Kx). \)

4. Найти общее решение уравнения \( y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}. \)

Ответ: \( y = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}. \)

5. Решить задачу Коши \( y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4. \)

Ответ: \( y = e^{-x} (\cos x + 3 \sin x) + x^2 + 2x. \)

6. Решить систему методом исключения:

\[
\begin{align*}
y' &= -2y + z - e^{2x}, \\
z' &= -3y + 2z + 6e^{2x}.
\end{align*}
\]

Ответ: \( y = 2e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad z = 9e^{2x} + 3c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \)

7. Решить систему методом Эйлера:

\[
\begin{align*}
\frac{dy}{dx} &= 2y - 3z, \\
\frac{dz}{dx} &= 3y + 2z.
\end{align*}
\]

Ответ: \( y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad z = e^{2x} (c_1 \sin 3x - c_2 \cos 3x). \)

Вариант 2

1. Решить задачу Коши

\( y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -14. \)

Ответ: \( y = e^{x} - 3xe^{-x} - e^{-3x}. \)

2. Найти общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

\( y'' + \frac{1}{4} y = \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2}. \)

Ответ: \( y = \sin \frac{x}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{4} \right| + c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2}. \)

3. Определить вид частного решения:

а) \( y'' - 2y' + 5y = 2xe^x \sin 2x; \)
б) \( y'' - 2y'' = e^{2x} \sin 2x + 3x. \)

Ответ: а) \( y = e^x ((Ax^2 + Bx) \cos 2x + (Dx^2 + Kx) \sin 2x); \)
б) \( y = e^{-2x} (A \cos 2x + B \sin 2x) + (Dx^3 + Kx^2) \).

4. Найти общее решение уравнения \( y'' + 2y' + y = 6e^{-x} \).

Ответ: \( y = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} + 3x^2 e^{-x} \).

5. Решить задачу Коши

\( y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x \), \( y(0) = 2 \), \( y'(0) = -2 \).

Ответ: \( y = e^{3x} (2 \cos 4x - 3 \sin 4x) + \sin 4x \).

6. Решить систему методом исключения:

\[
\begin{cases}
y' = 2y - z + 2e^x,
z' = 3y - 2z + 4e^x.
\end{cases}
\]

Ответ: \( y = xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \), \( z = (x+1)e^x + c_1 e^x + 3c_2 e^{-x} \).

7. Решить систему методом Эйлера:

\[
\begin{align*}
\frac{dx}{dt} &= x - 3y, \\
\frac{dy}{dt} &= 3x + y.
\end{align*}
\]

Ответ: \( x = e^t (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \), \( y = e^t (c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t) \).

Занятия 28–29

Кратные интегралы. Приложения кратных интегралов

Пример 1. Пользуясь определением двойного интеграла, вычислить

\[
I = \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2} xy^2 \, dx \, dy.
\]

\( \Delta \) Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки соответственно прямыми \( x = \frac{k}{n} \), \( y = \frac{2l}{n} \) \( (k, l = 1, 2, ..., n-1) \). При таком разбиении площади всех элементарных ячеек равны между собой и составляют \( \frac{2}{n^2} \). При составлении интегральной суммы значения функции \( xy^2 \) будем брать в правой вершине прямоугольника. Тогда

\[
S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{2}{n^2} \cdot \frac{4k^2 l^2}{n^3} = \frac{8}{5} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{l=1}^{n} l^2.
\]
Как известно, \(1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\).

Отсюда \(I = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{8n^2(n+1)^2(2n+1)}{6 \cdot 2n^5} = \frac{4}{3}\). ▲

Пример 2. Оценить интеграл \(I = \iint_{x^2+y^2 \leq 100} \frac{dy dx}{100 + \cos x + \sin^2 y}\).

Отметим что наибольшее и наименьшее значения функции в области интегрирования:
\[M = \max \left( \frac{1}{100 + \cos x + \sin^2 y} \right) = \frac{1}{99}, \quad m = \min \left( \frac{1}{100 + \cos x + \sin^2 y} \right) = \frac{1}{102}\.

Площадь интегрирования \(S = 100\pi\).

Поэтому
\[
\frac{100\pi}{102} \leq I \leq \frac{100\pi}{99}, \quad 3,08 \leq I \leq 3,17. \ ▲
\]

Пример 3. На плоскости \(Oxy\) построить область интегрирования \(D\) по заданным пределам изменения переменных в повторном интеграле \(I = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{2} - 3}^{\frac{2x-3}{3}} dy dx\) и вычислить этот интеграл.

Отметим, что область интегрирования \(D\) расположена между прямыми \(x = 0\) и \(x = 4\), снизу ограничена параболой \(y = \frac{x^2}{2} - 3\), сверху — прямой \(y = 2x - 3\) (рис. 27).

Следовательно,
\[I = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{2} - 3}^{\frac{2x-3}{3}} dy dx = \int_0^4 \left(2x - 3 - \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)\right) dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\bigg|_0^4 = 16 - 10 \frac{2}{3} = 5 \frac{1}{3}. \ ▲
\]

Пример 4. Представить двойной интеграл \(I = \iint_D f(x, y)dy dx\) в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по \(x\) и внутренним интегрированием по \(y\), если известно, что область интегрирования \(D\):
а) ограничена прямыми \(x = 1, \ x = 4, \ x - y + 5 = 0, \ x - y = 0\);
b) треугольник с вершинами \(O(0;0), \ A(2;1), \ B(3; -2)\);
в) внутренняя область эллипса
\[
\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;
\]

г) круговое кольцо \(1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\).

\[\Delta\] а) Построим область интегрирования \(D\) (рис. 28). Она представляет собой параллелограмм \(ABCD\). Из уравнения стороны \(BC\) \(x - y + 5 = 0\) получаем \(y = x + 5\), а из уравнения стороны \(AD\) \(x - y = 0\) получаем \(y = x\).

Следовательно,
\[
I = \iint_D f(x, y)dx dy = \int_1^7 \int_x^{x+5} f(x, y)dy dx.
\]

Если изменить порядок интегрирования, то область \(D\) необходимо рассматривать как объединение трех областей: треугольников \(ABE\), \(CDF\) и параллелограмма \(BFDE\). Это вызвано тем, что нельзя записать границу \(ABC\) и границу \(ADC\).

Из уравнения стороны \(BC\) получаем \(x = y - 5\), а из уравнения стороны \(AD\) получаем \(x = y\).

Тогда
\[
I = \iint_D f(x, y)dx dy = \iint_{ABE} f(x, y)dx dy + \iint_{CDF} f(x, y)dx dy + \iint_{BFDE} f(x, y)dx dy = \int_1^6 \int_1^y f(x, y)dy dx + \int_1^{y-5} \int_{y-5}^{x+5} f(x, y)dx dy + \int_6^{12} \int_{y-5}^{x+5} f(x, y)dy dx.
\]

б) Область интегрирования \(D\) изображена на рис. 29. Нахождим уравнения прямых \(OA\), \(AB\) и \(OB\), на которых расположены стороны треугольника. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:
\[
\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.
\]

Для стороны $OA$ имеем \[\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{1-0}.\]

Следовательно, уравнение прямой $OA$ имеет вид $y = \frac{1}{2} x$ или $x = 2y$.

Аналогично, прямая $AB$ задается уравнением $y = -3x + 7$ или $x = -\frac{1}{3} y + \frac{7}{3}$, а прямая $OB$ – уравнением $y = \frac{2}{3} x$ или $x = -\frac{3}{2} y$.

Так как верхняя граница области интегрирования $D$ состоит из отрезков двух прямых, задаваемых различными уравнениями, то область $D$ следует разбить прямой $x = 2$ на два треугольника: $OAC$ и $CAB$. Тогда

\[I = \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{OAC} f(x, y) dxdy + \iint_{CAB} f(x, y) dxdy =\]

\[= \int_0^2 \int_{\frac{-2}{3} x}^{\frac{1}{2} x} f(x, y) dy dx + \int_{\frac{-2}{3} x}^{\frac{1}{2} x} f(x, y) dx dy.\]

Если изменить порядок интегрирования, то область $D$ следует рассматривать как совокупность треугольников $OAD$ и $OBD$:

\[I = \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{OAD} f(x, y) dxdy + \iint_{OBD} f(x, y) dxdy =\]

\[= \int_{\frac{-2}{3} y}^{\frac{1}{3} y + \frac{7}{3}} \int_0^1 f(x, y) dx dy + \int_{\frac{-2}{3} y}^{\frac{1}{3} y + \frac{7}{3}} f(x, y) dy dx.\]

в) Уравнение $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ задает эллипс с центром в начале координат, фокусы которого расположены на осях $Ox$ и который имеет полуоси 3 и 2 (рис. 30).

Верхняя граница области интегрирования – дуга $ABC$, уравнение которой $y = \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}$. Нижняя граница – дуга $ADC$, задается уравнением $y = -\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}$.

Следовательно,

\[I = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_{-3}^3 \int_{-\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy \ dx.\]

Рис. 30
Запишем двойной интеграл в виде повторного с внешним интегрированием по \( y \). В этом случае область интегрирования \( D \) ограничена справа дугой \( DCB \), уравнение которой \( x = \frac{3}{2} \sqrt{4-y^2} \), а слева — дугой \( DAB \) с уравнением \( x = -\frac{3}{2} \sqrt{4-y^2} \).

Потому

\[
I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{-3}{2} \sqrt{9-y^2}}^{\frac{3}{2} \sqrt{9-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy.
\]

г) Кольцо \( 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \) образовано двумя концентрическими окружностями радиусами 1 и 2 с центром в начале координат (рис. 31). Вертикальные касательные \( BL \) и \( DF \), проведенные в точках \( M(-1;0) \) и \( N(1;0) \) к окружности \( x^2 + y^2 = 1 \), разбивают кольцо на области \( ABL, MBCDNR, MLKFNS, EDF \). Дуги \( AB, BD, DE \) задаются уравнением \( y = \sqrt{4-x^2} \); дуги \( AL, LF, FE \) задаются уравнением \( y = -\sqrt{4-x^2} \); дуга \( MRN \) задается уравнением \( y = \sqrt{1-x^2} \); дуга \( MSN \) задается уравнением \( y = -\sqrt{1-x^2} \).

Таким образом,

\[
I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.
\]

При изменении порядка интегрирования получаем аналогичное выражение формальной заменой \( x \) на \( y \) и \( y \) на \( x \) (за исключением выражения функции \( f(x, y) \)). \( \Delta \)

Пример 5. Вычислить повторные интегралы:

а) \( \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{x} \cos(x+y) \, dy \, dx \); б) \( \int_{0}^{\sin^2 2u} \int_{0}^{\frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}} dv \, du \).

\[
\Delta \quad \text{а) } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{x} \cos(x+y) \, dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{x} \cos(x+y) \, d(x+y) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \bigg|_{y=0}^{y=x} \, dx = \frac{\pi}{2}.
\]

137
\[
= \int_0^\pi (\sin 2x - \sin x)\,dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \bigg|_0^{\pi/2} + \cos x \bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0;
\]

б) \[
\int_0^\sin^2 u \frac{uv}{\sqrt{u^2 - v^2}} \,dv = \int_0^u \sin^2 \frac{1}{2} d(u^2 - v^2) =
\]

\[
= -\frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^\sin^2 \left[ u\sqrt{u^2 - v^2} \right] \,dv = -\int_0^\sin^2 (-u|u|) \,du = \int_0^\sin^2 u \,du = \frac{u^3}{3}\sin^2 0 = \frac{1}{3}\sin^2 2. \quad \Box
\]

Пример 6. Вычислить двойной интеграл \( I = \int_D \frac{x\,dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \) по прямоугольной области \( D: 0 \leq x \leq 1; \ 0 \leq y \leq 1. \)

\[\Delta \]

\[\text{С целью упрощения вычислений здесь целесообразно записать внутренний интеграл по переменной } x: \]

\[I = \int dy \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \,d(1 + x^2 + y^2) =
\]

\[= -\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{1/2}} \left| \begin{array}{c} x=1 \\ x=0 \end{array} \right| dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \right) dy =
\]

\[= \ln \left| \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{y^2 + 2}} \right|_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \quad \Box
\]

Пример 7. Изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

а) \( I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x; y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x; y)\,dy; \)

б) \( I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-\frac{x^2}{2}}} f(x; y)\,dy; \)

в) \( I = \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y)\,dy; \)

г) \( I = \int_1^4 dy \int_0^{\frac{1}{y}} f(x; y)\,dx. \)
а) В первом интеграле $x$ изменяется от 0 до 1, а $y$ от прямой $y = 0$ до кривой $y = \frac{x^3}{2}$, во втором интеграле $x$ изменяется от 1 до 2, а $y$ от прямой $y = 0$ до кривой $y = 1 - \sqrt{4x - x^2} - 3$. Область интегрирования изобразим на чертеже (рис. 32).

Разрешим уравнения кривых $OA$ и $AB$ относительно переменной $x$:

$$y = \frac{x^3}{2} \Rightarrow x = \frac{y^2}{3}; \quad y = 1 - \sqrt{4x - x^2} - 3 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2y - y^2}.$$ 

Следовательно, $I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^3 f(x; y) \, dx$.

б) Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 33).

Если к полуокружности $y = \sqrt{2x - x^2}$ провести касательную, параллельную оси $Ox$, то она разобьет данную область на три части: $OAB$, $BDK$ и $ACD$.

Разрешим уравнения кривых $OA$, $AC$ и $BK$ относительно переменной $x$:

$OA$ и $AC$: $y = \sqrt{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} y^2$;

$OB$: $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ ($x \leq 1$);

$BK$: $y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ ($x \geq 1$).

Уравнение прямой $KC$ имеет вид $x = 2$. В областях $OAB$ и $BDK$ $y$ изменяется от 0 до 1, а в области $ACD$ – от 1 до 2.

Таким образом,

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{2}}^{\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{2}} f(x; y) \, dx + \int_0^2 dy \int_{\sqrt{1 - y^2}}^{\sqrt{1 - y^2}} f(x; y) \, dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{2y^2}}^{\sqrt{2y^2}} f(x; y) \, dx.$$
в) По пределам интегрирования второго интеграла восстановим область интегрирования $D$. Границы искомой области задаются уравнениями:

$$x = -2; x = 2; y = 0; y = \sqrt{4 - x^2}.$$ 

Область интегрирования представлена на рис. 34.

Разрешим уравнение кривой $ABC$ относительно переменной $x$:

$$x = -\sqrt{4 - y^2} \ (x \leq 0), \quad x = \sqrt{4 - y^2} \ (x \geq 0).$$

Следовательно, $I = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$.

г) Область интегрирования $D$ имеет следующие границы: $y = 1; \quad y = 4; \quad x = \frac{1}{y}; \quad x = \sqrt{y}$ (рис. 35). При изменении порядка интегрирования разобьем область $D$ прямой $x = 1$ на две области: $ABN$ и $NBC$.

Разрешим уравнения кривых $AB$ и $BC$ относительно переменной $y$:

$AB: \quad x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x};$

при $y = 4, \quad x = \frac{1}{4}$; при $y = 1, \quad x = 1$;

$BC: \quad x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2;$

при $y = 1, \quad x = 1$; при $y = 4, \quad x = 2$.

Таким образом,

$I = \int_{x=1}^{x=4} \int_{y=1}^{y=2} f(x; y) dy dx + \int_{x=1}^{x=4} \int_{y=1}^{y=2} f(x; y) dx dy. \ △$

Пример 8. Вычислить $I = \iint_D (x^2 + y) dx dy,$ если область $D$ ограничена параболами $y = x^2, \quad x = y^2$.

Область интегрирования $D$ изображена на рис. 36.

Она ограничена слева и справа прямыми $x = 0$ и $x = 1$, а снизу и сверху –
параболами \( y = x^2 \) и \( y = \sqrt{x} \).

Следовательно,

\[
I = \iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}} \left( x^2 + y \right) \, dy = \int_0^1 \left( x^2 \, \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \, dx
\]

\[
= \int_0^1 \left( x^2 \sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) \, dx = \left[ \frac{5}{7} x^ \frac{7}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10} x^5 \right]_0^1 = \frac{33}{140}. \quad \blacktriangle
\]

Пример 9. Вычислить \( I = \iint_D xy \, dx \, dy \), если \( D: \ y = x - 4, \ y^2 = 2x \).

\[\Delta\] Построим данные линии и найдем их точки пересечения (рис. 37).

Если внутренний интеграл записать по переменной \( x \), то двойной интеграл по области \( D \) выразится одним двукратным интегралом:

\[
I = \int \int_D xy \, dx \, dy = \int_{-2}^{4} dy \int_{2}^{y+4} x^2 \, dx = \left[ \frac{1}{2} y^2 x \right]_{2}^{y+4} \, dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left( (y+4)^2 - \frac{y^4}{4} \right) \, dy
\]

\[
= \frac{1}{2} \left[ \frac{y^4}{4} + 8y^3 + 16y - \frac{y^5}{4} \right]_{-2}^{4} = 90.
\]

Если интегрировать в другом порядке – сначала по \( y \), а затем по \( x \), то нужно область \( D \) предварительно разбить прямой \( BC \) на две части.

В этом случае \( I = \int \int_D xy \, dx \, dy + \int \int_D xy \, dy \, dx \).

Вычислив сумму этих двух интегралов, можно убедиться, что результат не зависит от порядка интегрирования. \( \blacktriangle \)
Пример 10. Вычислить
\[ I = \iint_D (\sin x - 2y) \, dxdy, \text{ если } D: y = x^2, \quad y = 2 + x^2, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}. \]

Начертим область интегрирования (рис. 38).
Если интегрировать вначале по переменной $x$, то пришлось бы область $D$ предварительно разбить прямыми, параллельными оси $Ox$, на три части. Поэтому целесообразно внутренний интеграл записать по переменной $y$.

Имеем
\[
I = \iint_D (\sin x - 2y) \, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{x^2}^{2+x^2} (\sin x - 2y) \, dy =
\]
\[
= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( y \sin x - y^2 \right) \, dx \bigg|_{y=x^2}^{y=2+x^2} =
\]
\[
= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2 + x^2) \sin x - x^2 \sin x - (2 + x^2)^2 + x^4) \, dx =
\]
\[
= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 4x^2 - 4) \, dx = 2(1 - \pi) - \frac{\pi^3}{6}. \]

Пример 11. Вычислить
\[ \iint_D \frac{y}{x} \, dxdy, \text{ если } D: xy = 1, \quad xy = 3, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad x > 0, \quad y > 0. \]

Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 39).
Для вычисления этого интеграла в декартовой системе координат область $ABCD$ необходимо разбить прямыми, параллельными одной из координатных осей, на три части. Затем вычислить интеграл по каждой частичной области и полученные результаты просуммировать. Однако существует более короткий путь вычисления этого интеграла. Осуществим переход к криволинейным координатам по формулам:
\[ xy = u, \quad (1 \leq u \leq 3), \quad y = vx, \quad (1 \leq v \leq 2). \]

Отсюда
\[ x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}. \]

При этом изображением области $D$ является прямоугольник $D_1$: $1 \leq u \leq 3$, $1 \leq v \leq 2$ (рис. 40).
Определяем якобиан преобразования:

\[ J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{1}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{1}{\sqrt{v}} & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}. \]

Таким образом,

\[ \iint_D \frac{y}{x} dxdy = \iint_{D'} \frac{\sqrt{uv}}{u} \cdot \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_1^2 dv = 1. \]

**Пример 12.** Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интегrale \( I = \iint_D f(x, y)dxdy \), где

а) \( D \) – круг \( x^2 + y^2 \leq R^2 \);

б) \( D \) – область, ограниченная линиями \( x^2 + y^2 = 4x, \ x^2 + y^2 = 8x, \ y = x, \ y = 2x \).

\( \Delta \) а) Переходя к полярной системе координат \( x = r \cos \phi, \ y = r \sin \phi \), получаем следующее уравнение окружности \( x^2 + y^2 = R^2: \ r = R \). Очевидно, что \( 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ I(r; \phi) = r \), поэтому

\[ I = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot r \cdot dr. \]

б) Преобразуем выражения \( x^2 + y^2 = 4x \) и \( x^2 + y^2 = 8x \) к каноническому виду:

\[ x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4; \]

\[ x^2 + y^2 = 8x \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 16. \]

Следовательно, область \( D \) ограничена окружностью радиусом 2 с центром в точке (2;0), окружностью радиусом 4 с центром в точке (4;0), а также прямыми \( y = x \) и \( y = 2x \) (рис. 41).

Фигура \( ABCK \) ограничена лучом \( \phi = \frac{\pi}{4} \) и \( \phi = \arctg 2 \). В полярной системе координат уравнение дуги \( AK \) имеет вид \( r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi = 4r \cos \phi \Rightarrow r = 4 \cos \phi \).

Аналогично уравнение дуги \( BC \) имеет вид \( r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi = 8r \cos \phi \Rightarrow r = 8 \cos \phi. \)
Таким образом, \[ I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 2} d\varphi \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \cdot dr. \]

Пример 13. Переходя к полярным координатам, вычислить \[ \int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx. \]

Изобразим область интегрирования (рис. 42). Перейдем к полярным координатам:

\[ x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \]

\[ I(r; \varphi) = r, \quad \sqrt{x^2+y^2} = r. \]

Следовательно,

\[ \int_{0}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a} r^2 \, dr = \varphi \mid_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot r^3 \mid_{0}^{a} = \frac{1}{6} \pi a^3. \]

Пример 14. Вычислить \[ I = \iint_{D} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy, \quad \text{если} \quad D: \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \]

Из аналитического выражения подынтегральной функции и уравнения границы области \( D \) следует, что для решения этой задачи целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам. Положив \( x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \) получим

Пример 15. Вычислить \[ \iint_{D} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy, \quad \text{если} \quad D: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \]
\[ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - r^2}, \quad I(\rho; \varphi) = abr, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \]

Следовательно,

\[ \iiint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy \, dz = ab \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{3}} r \sqrt{1 - r^2} \, dr \, d\varphi \left[\frac{1}{2} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \pi ab. \]

Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения:

\[ I_1 = \int_0^{\frac{2}{3}} (4 + z) \, dz = \left. \frac{(4 + z)^2}{2} \right|_0^2 = \frac{36 - 16}{2} = 10; \]

\[ I_2 = \int_{x^2}^{1} dy = 10 \int_{x^2}^{1} y \, dy = 10 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = 10(1 - x^2); \]

\[ I_3 = \int_{-1}^{1} dx = 10 \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \, dx = 10 \left. \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{-1}^1 = \frac{40}{3}. \]

Для построения области интегрирования данного трехкратного интеграла запишем вначале уравнения поверхностей, ограничивавших эту область. Приравниваем переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения: \( x = -1, \quad x = 1, \quad y = x^2, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 2. \)

Построим в системе координат поверхности, соответствующие этим уравнениям (рис. 44).
Ограниченная этими поверхностями область есть прямой цилиндр, обра-
зуяще которого параллельны оси \( Oz \). ▲

Пример 17. Привести тройной интеграл
\[
\iiint_V f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz
\]
tо трехкратному, если об-
ласть интегрирования \( V \) ограничена поверхно-
стями \( z = x^2 + y^2 \) и \( z = 2 - x^2 - y^2 \).

△ Очевидно, что тело ограничено снизу па-
раболоидом \( z = x^2 + y^2 \) и сверху \( z = 2 - x^2 - y^2 \).

Найдем проекцию тела на плоскость \( xOy \) (рис. 45):
\[
x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.
\]
Следовательно,
\[
\iiint_V f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x; y; z) \, dz.
\]

Пример 18. Вычислить \( \iiint_V xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz \), если \( V \):
\[
z = xy, \ y = x, \ x = 1, \ z = 0.
\]
△ Область интегрирования \( V \) определяется следующими нераве-
нствами:
\[
0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x, \ 0 \leq z \leq xy
\]
(рис. 46), поэтому
\[
\iiint_V xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz = \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \int_{0}^{xy} \left( \frac{x^5 y^6}{4} \right) \, dy \, dx = \int_{0}^{1} \frac{x^5 y^7}{28} \bigg|_{y=0}^{y=x} \, dx = \frac{1}{28} \int_{0}^{1} x^{12} \, dx = \frac{1}{364} x^{13} \bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{364}.
\]

Пример 19. Вычислить \( \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{1 - x - y} \), если \( V \):
\[
x + y + z = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.
\]
Построим данные плоскости. Область \( V \) есть тетраэдр \( OABC \) (рис. 47). Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси \( Oz \) пересекает его границу в двух точках. Уравнения плоскостей \( AOB \) и \( ACB \) имеют вид \( z = 0 \) и \( z = 1 - x - y \) соответственно.

Следовательно,
\[
\iiint_V dx dy dz = \iiint_{AOB} dx dy \int_{0}^{1-x-y} dz = \\
= \iiint_{AOB} dx dy \left( z \right|_{0}^{1-x-y} = \\
= \iint_{AOB} dx dy = S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{1}{2}. \quad \Delta
\]

Пример 20. Вычислить \( \iiint_V xyz dx dy dz \), если область \( V \) ограничена сферой \( x^2 + y^2 + z^2 = 1 \) и плоскостями \( x = 0, y = 0, z = 0 \) (первый октант).

\( \Delta \) Область \( V \) ограничена снизу плоскостью \( z = 0 \) и сверху – поверхностью \( z = \sqrt{1-x^2-y^2} \). Изобразим проекцию области \( V \) на плоскость \( xOy \) (рис. 48).

Следовательно,
\[
\iiint_V xyz dx dy dz = \int_{0}^{1} x dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \\
= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x dx \left( y \right|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y^2}{2} \right|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} = \\
= \frac{1}{8} \int_{0}^{1} (2x - 2x^3 - 2x^3 + 2x^5 - x + 2x^3 - x^5) dx = \\
= \frac{1}{8} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \right|_{0}^{1} = \frac{1}{48}. \quad \Delta
\]

Пример 21. Вычислить \( \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \), если \( V: \ x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = 3 \).

\( \Delta \) Проекция области \( V \) на плоскость \( xOy \) есть круг \( (x-1)^2 + y^2 = 1 \) (рис. 49).
Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в этих координатах имеет вид $r = 2\cos \varphi$, \((-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

Якобиан преобразования $J(r, \varphi) = r, \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Следовательно,

$$
\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos \varphi} \int_0^r z \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{r^3}{3}} 2\cos \varphi \, d\varphi = 24 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = 24 \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3}\right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 24 \left(\frac{2}{3}\right) = 16. \quad \Box
$$

**Пример 22.** Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz$, если $V: x^2 + y^2 = z^2, \ z = 1$.

Δ Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r \cos \varphi, \ y = r \sin \varphi, \ r(r, \varphi) = r, \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Область $V$ снизу ограничена поверхностью $z = r$ (поверхностью конуса), сверху – плоскостью $z = 1$.

Проекцией области $V$ на плоскость $xOy$ является круг $r \leq 1$.

Следовательно,

$$
\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \int_0^1 z \, dz \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^1 r^2 \int_0^1 (1 - r) \, dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right) \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \quad \Box
$$

**Пример 23.** Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dxdydz$, если $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Δ Каноническое уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$ имеет вид

$$
(x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2) = \frac{1}{4}.
$$

Изобразим сферу (рис. 50) и ее проекцию на плоскость $xOy$ (рис. 51).
Перейдем к сферическим координатам: \( x = z \cos \varphi \sin \varphi, \ y = r \sin \varphi \sin \varphi, \ z = r \cos \varphi, \ I = r^2 \sin \varphi, \ x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow r = \cos \varphi, \ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r. \)

В области \( V \) сферические координаты изменяются так: \( 0 \leq r \leq \cos \varphi, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq Q \leq \frac{\pi}{2}. \)

Поэтому

\[
\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\sqrt{3} r^3 \cos^4 \varphi \sin \varphi \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi \\
= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \frac{\pi}{10} \cos^5 \varphi \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}. \]

**Пример 24.** Вычислить \( \iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz \), если область \( V \) ограничена поверхностями \( z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \) и \( z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} \).

Так как \( V \) — область, ограниченная верхней полусферой и верхним полуконусом, удобно перейти к сферическим координатам: \( x = r \cos \varphi \sin \varphi, \ y = r \sin \varphi \sin \varphi, \ z = r \cos \varphi. \)

Тогда \( I = r^2 \sin \varphi, \ \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \cos^2 \varphi, \ z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \Rightarrow r = 6; \)

\[
z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{3}, \]

В области \( V \) сферические координаты изменяются так: \( 0 \leq r \leq 6, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq Q \leq \frac{\pi}{3}. \)

Переходя от тройного интеграла к повторному и последовательно интегрируя, получаем

\[
\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^6 r^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi \, dQ = \\
= \frac{\pi}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \varphi \, d\varphi \, dQ = 36\pi. \]

**Пример 25.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями \( y = 2 - x^2 \) и \( y = 2x - 1. \)
Построим фигуру (рис. 52).
Решив уравнение \( y = 2 - x^2 = 2x - 1 \), найдем абсциссы точек \( A \) и \( B \): \( x_A = -3, \ x_B = 1 \).

Находим
\[
S = \int_{-3}^{3} (2 - x^2 - 2x + 1)\ dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)|_{-3}^{1} = \\
= \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (-9 + 9 - 9) = 10\frac{2}{3}, \quad \Delta
\]

Пример 26. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями \( r = 2\cos\varphi \) и \( r = 2(1 + \cos\varphi) \).

Линии заданы в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой площади в полярных координатах
\[
S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\ d\varphi.
\]

Функция \( r = 2\cos\varphi \) определена при \( \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \), так как при прочих значениях \( \varphi \) получается \( r < 0 \). Вторая функция \( r = 2(1 + \cos\varphi) \) определена при \( \varphi \in (-\pi; \pi) \).

Область интегрирования \( D \) имеет вид, изображенный на рис. 53. Так как фигура симметрична относительно полярной оси, можно ограничиться вычислением верхней половины площади, а результат утроить.

Имеем
\[
S = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\ dr\ d\varphi = 2\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\ d\varphi = \\
= 4\int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\ d\varphi + 4\int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi + \cos^2\varphi)\ d\varphi = \\
= 4\left\{\int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\ d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2\varphi)\ d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi\right\} =
\]
Пример 27. Найти площадь фигуры, ограниченной линией \( x^3 + y^3 = 3axy \).

\[ \Delta \quad \text{Уравнение } x^3 + y^3 = 3axy \]
заряжает прямую, которая называется декартовым листом и состоит из петли и двух бесконечных ветвей (рис. 54). Для нахождения площади фигуры удобно перейти к полярным координатам:

\[ x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad I(r, \phi) = r. \]

В полярной системе координат исходное уравнение примет вид

\[ r^3 (\cos^3 \phi + \sin^3 \phi) = 3ar^2 \cos \phi \sin \phi, \]

т. е. \( r = \frac{3a \cos \phi \sin \phi}{\cos \phi + \sin \phi} \).

Осью симметрии петли является луч \( \phi = \frac{\pi}{4} \), поэтому

\[ S = 2 \int_{D_1} r dr d\phi = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{0}^{\frac{3a \cos \phi \sin \phi}{\cos \phi + \sin \phi}} r dr = 9a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \phi \cdot \sin^2 \phi}{(\cos \phi + \sin \phi)^2} d\phi = \]

\[ = 9a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 \phi \cdot \operatorname{tg}^2 \phi}{\cos^6 \phi (1 + \operatorname{tg}^3 \phi)^2} d\phi = 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 \phi d(tg \phi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \phi)^2} d\phi = \]

\[ = 3a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d(1 + \operatorname{tg}^3 \phi) = - \frac{3a^2}{1 + \operatorname{tg}^3 \phi} \mid_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3a^2}{2}. \]

Пример 28. Найти площадь, ограниченную линией \( \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}. \)

\[ \Delta \quad \text{Ввиду симметрии, площадь всей фигуры } S = 4S_1, \text{ где } S_1 \text{ – площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Перейдем к обобщенным полярным координатам: } x = 2r \cos \phi, \quad y = 3r \sin \phi, \quad I = 6r. \]

Найдем уравнение линии в обобщенной полярной системе:
\[
\left( \frac{4r^2 \cos^2 \varphi + 9r^2 \sin^2 \varphi}{9} \right)^2 = \frac{4r^2 \cos^2 \varphi}{4} - \frac{9r^2 \sin^2 \varphi}{9}; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \sqrt{\cos 2\varphi}.
\]

Отсюда следует, что в первой четверти полярные координаты изменяются так: \(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi} \).

Таким образом,

\[
S = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{0} d\varphi = 24 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cos 2\varphi d\varphi = 6 \sin 2\varphi \bigg|_0^{\pi/4} = 6. \quad \▲
\]

**Пример 29.** Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: \(y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x + z = 6, \quad z = 0\).

\(\Delta\) Снизу тело ограничено плоскостью \(z = 0\), сверху — плоскостью \(z = 6 - x\). Изобразим проекцию тела на плоскость \(xOy\) (рис. 55).

Следовательно,

\[
V = \int_0^6 \int_0^{2\sqrt{x}} (6 - x) dy = \int_0^6 \int_y^{2\sqrt{x}} dy dx = \int_0^6 \left(12\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + x\right) dx = \int_0^6 \left(6x^{3/2} - x^3\right) dx = \left[ \frac{2}{3} \cdot 6x^{5/2} - \frac{2}{5}x^5 \right]_0^6 = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 5^2 - \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 5^5 = \frac{4}{15} \cdot 6^3 = \frac{48}{5} \sqrt{6}. \quad \▲
\]

**Пример 30.** Найти объем тела, ограниченного плоскостями \(y + z = 2, \quad y - z = 2\) и цилиндром \(x^2 + y^2 = 4\).

\(\Delta\) Тело, ограниченное данными поверхностями, изображено на рис. 56. В силу его симметрии относительно плоскости \(xOy\), вычислим объем половины тела, расположенной над плоскостью \(xOy\), и результат удвоим. Проекцией этой части тела на плоскость \(xOy\) является окружность \(x^2 + y^2 = 4\) радиусом 2 с центром в точке \(O\). Для вычисления двойного интеграла...
грала, определяющего объем тела, перейдем к полярным координатам: \( x = r \cos \varphi, \ y = r \sin \varphi, \ I(r; \varphi) = r \).

Уравнение окружности \( x^2 + y^2 = 4 \) в полярной системе координат имеет вид \( r^2 = 4 \) или \( r = 2 \); уравнение плоскости \( z = 2 - y = 2 - r \sin \varphi \). Так как \( 0 \leq \varphi \leq 2 \pi \), то имеем

\[
V = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(2-r\sin \varphi) \, dr = 2 \int_0^{2\pi} \left( r^2 - \frac{r^3}{3} \sin \varphi \right) \, dr = 2 \int_0^{2\pi} \left( 4 - \frac{8}{3} \sin \varphi \right) \, d\varphi =
\]

\[
= 2 \left( 4\varphi + \frac{8}{3} \cos \varphi \right) \bigg|_0^{2\pi} = 16\pi. \quad \square
\]

При мер 31. Вычислить площадь поверхности конуса \( z = \sqrt{x^2 + y^2} \), расположенной внутри цилиндра \( x^2 + y^2 = 1 \).

∆ Проекцией поверхности на плоскость \( xOy \) является круг \( x^2 + y^2 \leq 1 \). Из уравнения конуса имеем

\[
\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
\]

Тогда \( S = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dxdy =
\]

\[
= \sqrt{2} \int_D dxdy = \sqrt{2} S = \sqrt{2} \cdot \pi = \sqrt{2} \pi. \quad \square
\]

При мер 32. Вычислить массу неоднородной пластины \( D \), ограниченной линиями \( y = x^2 \), \( x = y^2 \), если поверхностная плотность в каждой ее точке \( \mu = 3x + 2y + 6 \).

∆ Построим область, ограниченную кривыми \( y = x^2 \) и \( x = y^2 \) (рис. 57).

Из физического смысла двойного интеграла следует, что искомая масса

\[
m = \iint_D \mu(x, y) \, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (3x + 2y + 6)dy =
\]

\[
= \int_0^1 (3xy + y^2 + 6y) \bigg|_{y = \sqrt{x}}^{y = 2} \, dx =
\]

\[
= \int_0^1 (3x^2 + x + 6x - 3x^3 - x^4 - 6x^2) \, dx =
\]

\[
= \left( \frac{2}{5} 3x^2 + \frac{x^3}{2} + 6 \frac{2}{3} 3x^2 - \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - 2x^3 \right) \bigg|_0^1 =
\]

\[
= \quad \text{Рис. 57}
\]
\[
\frac{6}{5} + \frac{1}{2} + 4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} - 2 = \frac{11}{4}. \quad \blacktriangle
\]

Пример 33. Найти моменты инерции \( I_x \) и \( I_y \) относительно координатных осей \( Ox \) и \( Oy \) пластины плотностью \( \delta(x, y) = xy \), ограниченной кривыми \( y = 0 \), \( y = x \), \( y = 2x \).

\( \Delta \) Область, ограниченная кривыми \( y = 0 \), \( y = x \), \( y = 2x \) изображена на рис. 58. Моменты инерции \( I_x \) и \( I_y \) определяются по формулам:

\[
\begin{align*}
I_x &= \iint_D y^2 \delta(x, y) \, dxdy, \\
I_y &= \iint_D x^2 \delta(x, y) \, dxdy.
\end{align*}
\]

Следовательно,

\[
\begin{align*}
I_x &= \int_0^1 \int_0^{2-y} x y^3 \, dxdy = \int_0^1 y^3 dy \int_0^{2-y} x \, dxdy = \int_0^1 y^3 \left( \frac{x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=2-y} dy = 2 \int_0^1 \left( y^3 - y^4 \right) dy = \frac{1}{10}; \\
I_y &= \int_0^1 \int_0^{2-y} x^3 \, dx dy = \int_0^1 y^3 \int_0^{2-y} x^3 \, dx dy = \int_0^1 y^3 \left( \frac{x^4}{4} \right)_{x=0}^{x=2-y} dy = \int_0^1 y \left( \frac{(2-y)^4}{4} - \frac{y^4}{4} \right) dy = \frac{13}{30}.
\end{align*}
\]

Пример 34. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

\( y = 2x^2 - 3 \), \( y = -7x^2 + 6 \), \( z = 1 - 5x^2 - 6y^2 \), \( z = -3 - 5x^2 - 6y^2 \).

\( \Delta \) Изобразим проекцию тела на плоскость \( xOy \) (рис. 59).

Ввиду симметрии

\[
V = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2-3} dy \int_0^{-7x^2+6-5x^2-6y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2-3} dy \int_0^{-7x^2+6} dz = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2-3} \left( -7x^2 + 6 - 2x^2 + 3 \right) dx = \int_0^1 (9 - 9x^2) dx = 8 \left( 9x - 3x^3 \right) \bigg|_0^1 = 48. \quad \blacktriangle
\]

Пример 35. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями \( z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3 \), \( z = 16x + 19 \).

\( \Delta \) Снизу тело ограничено параболоидом \( z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3 \), сверху – плоскостью \( z = 16x + 19 \).
Найдем проекцию тела на плоскость $xOy$:

$$8((x + 1)^2 + y^2) + 3 = 16x + 19 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$ 

Это окружность радиусом 1 с центром в начале координат. Введем цилиндрические координаты: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, |I| = r$.

Тогда $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1,$

$$8r^2 + 16r \cos \varphi + 11 \leq z \leq 16r \cos \varphi + 19.$$ 

Имеем

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \, dr \int_{8r^2+16r\cos\varphi+11}^{16r\cos\varphi+19} dz \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (8r - 8r^3) \, dr =$$

$$= 2\pi (4r^2 - 2r^4) \bigg|_0^1 = 4\pi. \quad \Delta$$

Пример 36. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$ (внеши-го по отношению к конусу).

По заданным уравнениям поверхностей строим область $V$ (рис. 60).

Тело симметрично относительно плоскости $xOy$. Поэтому $V = 2V_1$, где $V_1$ — объем верхней половины тела.

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = r \sin Q \cos \varphi,$$

$$y = r \sin Q \sin \varphi, \quad z = r \cos Q, \quad |I| = r^2 \sin Q.$$ 

В области $V_1$ сферические координаты изменяются так: $0 \leq r \leq a,$

$$\frac{\pi}{4} \leq Q \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$ 

Следовательно,

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin Q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \, dr = 2\cos Q \left. \left[ \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \right]_0^a \right| = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}. \quad \Delta$$

Пример 37. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхнос-
ностью $x^2 = 2y$ и плоскостями $y + z = 1, 2y + z = 2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

Согласно условию, в точке $N(x, y, z)$ тела объемная плотность $\delta(M) = y$. Масса этого тела вычисляется по формуле

$$m = \iiint_V \delta(M)\, dx\,dy\,dz = \iiint_V y\, dx\,dy\,dz,$$
где $V$ – область, ограниченная данным телом (рис. 61).

Вывчисляя тройной интеграл получим

$$m = \iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \iiint_{AOB} y(1-y) \, dx \, dy = \int_0^1 (y - y^2) \, dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx =$$

$$= \int_0^1 (y - y^2) 2\sqrt{2} y \, dy = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5} y^2 - \frac{2}{7} y^3\right)|_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{35}.$$  ▲

Пример 38. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V$, ограниченную поверхностями

$$x = 6(y^2 + z^2), \quad y^2 + z^2 = 3, \quad x = 0.$$  △ Строим тело, ограниченное данными поверхностями (рис. 62).

Его проекция на плоскость $Oyz$ представляет круг, ограниченный окружностью $y^2 + z^2 = 3$ радиусом $\sqrt{3}$. Вычислим вначале массу тела в цилиндрических координатах, считая, что его плотность $\delta = 1$:

$$m = \iiint_V dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\phi \, dx = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} r^2 \, dr \, dx = 3\pi r^4 |_0^{\sqrt{3}} = 27\pi.$$  □

Тогда $x_c = \frac{1}{m} \iiint_V x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{27\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\phi \, x \, dx = \frac{2}{27} \int_0^{\sqrt{3}} 18r^5 \, dr = \frac{2}{27} \frac{3}{2} r^6 |_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$
Так как тело однородное и симметрично относительно оси Ox, то $y_c = x_c = 0$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти площадь области, ограниченной кривыми:
а) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = 9 - 6x$;
б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Ответ: а) $\frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{15}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

2. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:
а) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;
б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z (x^2 + y^2)$.

Ответ: а) $\frac{45\pi}{32}$; б) $\frac{\pi}{60}$.

3. Найти координаты центра масс однородного тела $\frac{1}{4} (y^2 + 2z^2) \leq x \leq 2$.

Ответ: $x_c = \frac{4}{3}$, $y_c = z_c = 0$.

4. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:
а) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy$;
б) $\int_0^\pi \int_0^{\pi \sin x} \frac{\sin x}{x} dx$.

Ответ: а) $\frac{8}{15}$; б) 2.

5. Вычислить двойные интегралы:
а) $\int_D (x + 2y) dx dy$, $D$: $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$;
б) $\int_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}$, $D$: $\{9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$. 

157
Ответ: а) $\frac{76}{3}$; б) $\pi \ln 3$.

6. Вычислить $\iiint_V (x + 2y + 3z)dxdydz$, где $V$ – призма, ограниченная плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$, $x + y = 2$, $2x - y + 2 = 0$.

Ответ: 28.

7. Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$, перейдя к цилиндрическим координатам, если $V = \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2 \right\}$.

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

8. Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, перейдя к сферическим координатам, если $V = \left\{ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 \right\}$.

Ответ: $63\pi$.

Занятие 30

Контрольная работа. Кратные интегралы

Вариант 1

1. Свести двойной интеграл $\iint_D f(x; y)dxdy$ к повторному двумя способами, если $D$ – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;4)$, $B(2;6)$.

Ответ: $\iint_D f(x; y)dxdy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\frac{3x}{2}} f(x; y)dydx = \int_{y=0}^{y=\frac{4}{3}} \int_{x=0}^{x=\frac{2y}{3}} f(x; y)dxdy + \int_{y=\frac{4}{3}}^{y=\frac{6}{3}} \int_{x=0}^{x=\frac{2y}{3}} f(x; y)dxdy.$

2. Вычислить $\iint_D x dxdy$, где $D$ – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 63x$.

Ответ: $-\frac{27}{4}$.

3. Вычислить площадь фигуры $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2$ (перейти к полярным координатам).
Ответ: \( \frac{5\pi}{2} \).

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями \( x^2 = 1 - y, \) \( x + y + z = 3, \) \( y \geq 0, \) \( z \geq 0. \)

Ответ: \( \frac{52}{15} \).

5. Вычислить \( \iiint_V y\,dxdydz \) если \( V \) – пирамида, ограниченная плоскостями \( x = 0, \) \( y = 0, \) \( z = 0, \) \( 2x + y + z = 4. \)

Ответ: \( \frac{16}{3} \).

6. Вычислить \( \iiint_V y\,dxdydz \) \( V : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \) \( y \leq \sqrt{3x}, \) \( y \geq 0, \) \( z \geq 0 \)

с помощью сферических координат.

Ответ: \( \frac{15\pi}{2} \).

7. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область \( V, \) ограниченную поверхностями \( x^2 + z^2 = 4y, \) \( y = 9. \)

Ответ: \( (0; 6; 0). \)

Вариант 2

1. Свести двойной интеграл \( \iint_D f(x; y)\,dxdy \) к повторному двумя способами, если \( D \) – треугольник с вершинами \( O(0,0), A(1; -1), B(1;4). \)

Ответ: \( \iint_D f(x; y)\,dxdy = \int_0^4 \int_{-x}^{4x} f(x; y)\,dy\,dx + \int_{-1}^0 \int_{-y}^{1-y} f(x; y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1} \int_{0}^{x} f(x; y)\,dy\,dx. \)

2. Вычислить \( \iint_D \frac{y}{x^2}\,dxdy, \) \( D = \left\{ 0 < x, x^2 \leq y \leq x^2 \right\}. \)

Ответ: \( \frac{1}{15}. \)

3. Вычислить площадь фигуры \( (x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \) (перейти к полярным координатам).

Ответ: \( \frac{\pi}{8}. \)

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$z = x^2, x + y = 6, y = 2x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

Ответ: 4.

5. Вычислить $\iiint_V x\,dxdydz$, если $V$ — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x - y + z = 1$.

Ответ: $\frac{1}{24}$.

6. Вычислить $\iiint_V \frac{x\,dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0$ с помощью сферических координат.

Ответ: $\frac{13\sqrt{2}\pi}{12}$.

7. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область $V$, ограниченную поверхностями $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$.

Занятия 31–32

Криволинейные и поверхностные интегралы. Самостоятельная работа

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_C \frac{dl}{c\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где $C$ — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$.

Уравнение прямой $OA$ имеет вид $y = 2x \ (0 \leq x \leq 1)$. Находим $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{5}dx$.

Следовательно,

$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{5}{5}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)_0^1 = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$

Пример 2. Вычислить $I = \int_C (4\sqrt{x} - 3\sqrt{y})\,dl$ между точками $A(-1; 0)$ и
В(0;1) по дуге астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Δ Находим $x' = -3\cos^2 t \sin t$, $y' = 3\sin^2 t \cos t$,

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = 3|\sin t \cos t| \, dt = -3\sin t \cos t \, dt,$$

так как $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Следовательно, $I = -\int_{\pi/2}^{\pi/2} (4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t}) \sin t \cos t \, dt = -12\int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt + 9\int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{12}{3} \cos^3 t \left|_{\pi/2}^{\pi/2} + \frac{18}{7} \sin^2 t \left|_{\pi/2}^{\pi/2} \right. \right. = -\frac{46}{7}$. ▲

Пример 3. Вычислить $I = \int_C \arctg_\frac{y}{x} \, dl$, где $C$ — дуга кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Δ Находим $r' = -\sin \varphi$, $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi = \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \sqrt{2 + 2\cos \varphi} \, d\varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} \, d\varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}} \, d\varphi = 2\cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi$, так как $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $f(x, y) = \varphi$, поскольку $\arctg_\frac{y}{x} = \arctg(\tg \varphi) = \varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$I = \int_0^{\pi/2} 2\cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = \left. u = \varphi, \, du = d\varphi \right|_{v = 2\sin \frac{\varphi}{2}} = 2\left(2\sin \frac{\pi}{2} - 2\sin \frac{0}{2}\right) = 2\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\cos \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \pi + 4\sqrt{2} - 8 = (\pi + 4)\sqrt{2} - 8$. ▲

Пример 4. Вычислить $I = \int_C xy \, dl$, где $C$ — четверть эллипса \( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \), лежащая в первом квадранте.

Δ Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$$x = a \cos t, \ y = b \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).$$
Находим \( x' = -a \sin t \), \( y' = b \cos t \), \( dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \).
Следовательно,
\[
I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a \cos t b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = 
\]
\[
= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \frac{1}{2} \, d(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) = 
\]
\[
= \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \left|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right. = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} (a^3 - b^3) = 
\]
\[
= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}. \quad \blacktriangle
\]

Пример 5. Вычислить \( I = \int (x+z) \, dl \), где \( C \) — дуга кривой \( x = t \), \( y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}} \), \( z = t^3 \) \((0 \leq t \leq 1)\).

\Delta Находим \( x' = 1 \), \( y' = \frac{6t}{\sqrt{2}} \), \( z' = 3t^2 \), \( dl = \sqrt{1+18t^2+9t^4} \, dt \).
Следовательно,
\[
I = \int_{0}^{1} (t+t^3) \sqrt{1+18t^2+9t^4} \, dt = \frac{1}{36} \int_{0}^{1} (1+18t^2+9t^4)^{\frac{1}{2}} \, d(1+18t^2+9t^4) = 
\]
\[
= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} (1+18t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}} \left|_{0}^{1} \right. = \frac{1}{54} (56\sqrt{7} - 1). \quad \blacktriangle
\]

Пример 6. Вычислить \( I = \int \sqrt{x^2 + y^2} \, dl \), где \( C \) — кривая, заданная уравнением \( (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = a^2 \left( x^2 - y^2 \right) \).

\Delta Перейдем к полярным координатам: \( x = r \cos \varphi \), \( y = r \sin \varphi \). Уравнение кривой \( C \) примет вид \( r = a^2 \cos 2\varphi \), где \( \varphi \in \left[ -\pi \cdot \frac{4}{4}, \pi \cdot \frac{4}{4} \right] \cup \left[ 3\pi \cdot \frac{4}{4}, 5\pi \cdot \frac{4}{4} \right] \).
Так как \( \sqrt{x^2 + y^2} = r = a^2 \cos 2\varphi \), \( dl = \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi = a^2 \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi} \, d\varphi \), то

162
\[ I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1 + 3\sin^2 2\varphi} \, d\varphi + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \sqrt{1 + 3\sin^2 2\varphi} \, d\varphi = \]
\[ = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}} \ln (\sqrt{3} + 2). \]  

Пример 7. Вычислить массу \( m \) дуги \( AB \) кривой \( y = \ln x \), заключенной между точками с абсциссами \( x = \sqrt{3} \) и \( x = \sqrt{8} \), если линейная плотность \( q \) дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы в этой точке.

\[ \Delta \text{ Воспользуемся формулой } m = \int_{AB} \rho(x, y) \, dl. \]

Так как \( y' = \frac{1}{x} \), \( dl = \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx \), \( \rho(x, y) = x^2 \), то
\[ m = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{3}}^{\sqrt{8}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \bigg|_3^{8} = \]
\[ = \frac{1}{3} (27 - 8) = \frac{19}{3}. \]

Пример 8. Найти координаты \( x_0, y_0, z_0 \) центра тяжести первого полувитка винтовой линии \( C \), заданной уравнениями \( x = a \cos t \), \( y = a \sin t \), \( z = bt \), \( 0 \leq t \leq \pi \), если ее линейная плотность постоянная и равна \( \rho \).

\[ \Delta \text{ Масса } m = \int_{C} \rho \, dl. \]

Так как \( dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} \, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \, dt \), то
\[ m = \rho \, dl. \]

Значения \( x_0, y_0, z_0 \) находим по формулам:
\[ x_0 = \frac{\rho}{m} \int_{C} x \, dl, \quad y_0 = \frac{\rho}{m} \int_{C} y \, dl, \quad z_0 = \frac{\rho}{m} \int_{C} z \, dl. \]

Таким образом,
\[ x_0 = \frac{\rho}{m} \int_{0}^{\pi} a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = 0, \]
\[ y_0 = \frac{\rho}{m} \int_{0}^{\pi} a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = \frac{2a}{\pi}, \]
\[ z_0 = \frac{\rho}{m} \int_{0}^{\pi} bt \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = \frac{b\pi}{2}. \]

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл \( I = \int_{C} x^2 \, y \, dl \), где \( C \) – отрезок прямой \( y = 3x - 1 \), заключенный между точками \( A(0; -1) \) и \( B(2; 5) \).
Δ Находим \( dl = \sqrt{1+ y'^2} \, dx = \sqrt{1+9} \, dx = \sqrt{10} \, dx \).
Следовательно,
\[
I = \int_0^2 x^2 \left(3x - 1\right) - \sqrt{10} \, dx = \sqrt{10} \int_0^2 \left(3x^3 - x^2\right) \, dx = \sqrt{10} \left(3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right) \bigg|_0^1 = \frac{5\sqrt{10}}{12}. \quad \square
\]

**Пример 10.** Вычислить \( I = \int_{AB} (4x + y) \, dx + (x + 4y) \, dy \), где кривая \( AB \) задана уравнением \( y = x^4 \), \( A(1; 1) \) и \( B(-1; 1) \).
Δ Учитывая, что \( y = x^4 \), \( dy = 4x^3 \, dx \) и \( x \) изменяется от 1 до –1, получаем
\[
I = \int_{-1}^1 (4x + x^4) + (x + 4x^4) \cdot 4x^3 \, dx = \int_{-1}^1 (16x^7 + 5x^4 + 4x) \, dx =
\]
\[
= \left(2x^8 + x^5 + 2x^2\right) \bigg|_{-1}^1 = -2. \quad \square
\]

**Пример 11.** Вычислить
\[
I = \int_C 2xy \, dx - x^2 \, dy,
\]
где \( C \) — ломаная \( OBA; O(0; 0), B(2; 0), A(2; 3) \) (рис. 63).
Δ Воспользуемся свойством аддитивности интеграла и представим его как сумму двух интегралов – по отрезкам \( OB \) и \( BA \). Так как для отрезка \( OB \) \( y = 0 \), \( y' = 0 \), \( 0 \leq x \leq 2 \), то
\[
\int_{OB} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^2 \left(2x \cdot 0 - x^2 \cdot 0\right) \, dx = 0.
\]
Для отрезка \( BA \) имеем \( x = x(y) = 2 \), \( x' = 0 \), \( 0 \leq y \leq 3 \), поэтому
\[
\int_{BA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^3 \left(2 \cdot 2 \cdot y \cdot 0 - 2^2 \right) \, dy = -4y \bigg|_0^3 = -12.
\]
Следовательно, \( I = \int_{OB} 2xy \, dx - x^2 \, dy + \int_{BA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = 0 - 12 = -12. \quad \square
\]

**Пример 12.** Вычислить криволинейный интеграл \( I = \int_C (x^2 + y^2) \, dx \), где \( C \) — дуга параболы \( y = 2x^2 \), заключенная между точками \( A(2; 8) \) и \( B(4; 32) \).
Δ Кривая задана явным уравнением \( y = f(x) \), поэтому для вычисления интеграла применим формулу

164
\[
\int P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{a}^{b} \left( P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x) \right) \, dx.
\]

Так как \( Q(x, y) = 0 \), то \( I = \int_{a}^{b} \left( \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^5}{5} \right) \, dx = \frac{12184}{15}. \quad \▲

Пример 13. Найти работу силы \( \overline{F} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \overline{r} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \overline{j} \) при перемещении материальной точки вдоль отрезка прямой \( AB \), если \( A(2; 1) \) и \( B(1; 7) \).

\( \Delta \) Уравнение прямой \( AB \) имеет вид \( y = -6x + 13 \). Тогда работа \( A \) силы \( \overline{F} \) по пути \( AB \) вычисляется по формуле

\[
A = \int_{AB} F_x \, dx + F_y \, dy = \int_{AB} \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} \, dy \right) = \\
= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2 + (-6x + 13)^2} + \frac{2(-6x + 13)}{x^2 + (-6x + 13)^2} \cdot (-6) \right) \, dx = \\
= \frac{1}{2} \left( \frac{74x - 156}{37x^2 - 156x + 169} \right) \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{37x^2 - 156x + 169} (37x^2 - 156x + 169) \right) = \\
= \ln \left| \frac{37x^2 - 156x + 169}{2} \right|^{1}_{0} = \ln 10. \quad \▲
\]

Пример 14. Вычислить \( I = \int_{C} (y^2 - z^2) \, dx + 2yz \, dy - x^2 \, dz \), где \( C \) – кривая \( x = t, \ y = t^2, \ z = t^3, \ 0 \leq t \leq 1, \) пробегаемая в направлении возрастания параметра \( t \).

\( \Delta \) Так как \( dx = dt, \ dy = 2tdt, \ dz = 3t^2 \, dt \), то

\[
I = \int_{0}^{1} \left( t^4 - t^6 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2 \right) \, dt = \int_{0}^{1} \left( t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4 \right) \, dt = \\
= \int_{0}^{1} \left( 3t^6 - 2t^4 \right) \, dt = \left[ \frac{3}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 \right]^{1}_{0} = \frac{1}{35}. \quad \▲
\]

Пример 15. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса \( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \), лежащую в первом квадранте.

\( \Delta \) Запишем параметрическое уравнение кривой \( x = a \cos t, \ y = b \sin t, \)
0 ≤ t ≤ \( \frac{\pi}{2} \). Точка движется под действием силы \( \mathbf{F} = k(-a \cos t \mathbf{i} - b \sin t \mathbf{j}) \). Находим \( \frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = b \cos t \).

Работа силы \( \mathbf{F} \) по пути \( AB \) вычисляется по формуле

\[
A = \int_{AB} F_x \, dx + F_y \, dy = k \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin t \cos t + b^2 \sin t \cos t) \, dt =
\]

\[
= -k \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt = \frac{k (b^2 - a^2)}{4} \cos 2t \bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k (a^2 - b^2)}{2}. \quad \blacktriangle
\]

Пример 16. Применяя формулу Грина, вычислить \( I_1 = \int_{C} -x^2 \, y \, dx + xy^2 \, dy \), где \( C \) – окружность \( x^2 + y^2 = R^2 \), пробегаемая против часовой стрелки.

\( \Delta \) Находим \( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 \).

Следовательно,

\( I_1 = \int_{C} -x^2 \, y \, dx + xy^2 \, dy = \iint_{D} (x^2 + y^2) \, dxdy, \)

Перейдем к полярной системе координат:

\( x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |I| = r, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \)

\( I_1 = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} r^2 \, dr \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \bigg|_{0}^{R} = \frac{\pi R^4}{2}. \quad \blacktriangle \)

Пример 17. Вычислить площадь \( S \) фигуры, ограниченной кривыми \( y = \frac{x^2}{4}, \) \( x = \frac{y^2}{4}, \) \( xy = 2 \) и примыкающей к началу координат (рис. 64).

\( \Delta \) Решая совместно уравнения кривых, находим точки их пересечения: \( A(2; 1) \) и \( B(1; 2) \). Для нахождения площади воспользуемся формулой \( S = \frac{1}{2} \int_{C} x \, dy - y \, dx \).

Имеем

\[
S = \frac{1}{2} \int_{OA} x \, dy - y \, dx + \frac{1}{2} \int_{AB} x \, dy - y \, dx + \frac{1}{2} \int_{BO} x \, dy - y \, dx =
\]

166
Пример 18. Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной астатройдой $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\Delta$ Пользуясь формулой $S = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$, находим

$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3ab \cos^4 t \sin^2 t + 3ab \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3}{2} ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{16} ab \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3ab\pi}{8}$. ▲

Пример 19. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить интеграл $I = \int_A^B (x^2 + 4xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy$, где $A(-2;-1)$, $B(3;0)$.

$\Delta$ Здесь $P = x^2 + 4xy^3$, $Q = 6x^2 y^2 - 5y^4$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$.

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $I = \int_A^B Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную $AMB$ (рис. 65).

Вдоль отрезка $AM$ и $x = -2$, $dx = 0$, $-1 \leq y \leq 0$, поэтому

$\int_A^M Pdx + Qdy = \int_{-1}^{0} (24y^2 - 5y^4) dy = (8y^3 - y^5) \bigg|_{x=-2}^{x=0} = 7$.

Вдоль отрезка $MB$ имеем $y = 0$, $dy = 0$, $-2 \leq x \leq 3$. Поэтому

$\int_M^B Pdx + Qdy = \int_{-2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \bigg|_{-2}^{3} = \frac{35}{3}$.

Искомый интеграл равен сумме вычисленных интегралов, т. е. $\frac{56}{3}$. ▲
Пример 20. Показать, что дифференциальное выражение
\[ du = (x^2 + 2xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy - y^2) \, dy \]
является полным дифференциалом некоторой функции, и найти эту функцию.

\[ \Delta \quad \text{Так как} \quad P(x; y) = x^2 + 2xy - y^2, \quad Q(x; y) = x^2 - 2xy - y^2, \quad \text{то} \]
\[ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y. \]

Значит во всех точках плоскости Оху данное дифференциальное выражение будет полным дифференциалом. Для нахождения функции \( u(x; y) \) воспользуемся формулой \( u(x; y) = \int P(x; y_0) \, dx + \int Q(x; y) \, dy + C \), где можно взять \( x_0 = y_0 = 0 \).

Имеем
\[ u(x; y) = \int_0^x x^2 \, dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) \, dy + C = \frac{x^3}{3} \bigg|_0^x + \left( x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{y=0}^{y=y} + C = \]
\[ = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \]

Пример 21. Вычислить поверхностный интеграл первого рода
\[ I = \iint_S (6x + 4y + 3z) \, dS, \]
где \( S \) – часть плоскости \( x + 2y + 3z = 6 \), расположенная в первом октанте.

\[ \Delta \quad \text{Поверхность} \ S \ \text{однозначно проектируется на плоскость} \ Oxy \ (\text{рис. 66}). \]

Рис. 66

Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностный интеграл в двойной:
\[ z = \frac{1}{3} (6 - 2x - 2y), \quad dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \, dx \, dy, \]
\[ I = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_{D_{xy}} (5x + 2y + 6) \, dx \, dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^6 \int_0^{6-2y} (5x + 2y + 6) \, dx \, dy = \]

168
Пример 22. Вычислить поверхностный интеграл первого рода \( I = \iint_S zdS \),
где \( S \) — часть гиперболического параболоида \( z = xy \), вырезанная цилиндром \( x^2 + y^2 \leq 4 \).

\[ \Delta \] Проекцией поверхности \( S \) на плоскость \( Oxy \) является круг \( x^2 + y^2 \leq 4 \).

Если масса поверхности \( S \) на плоскость \( Oxy \) является круг \( x^2 + y^2 \leq 4 \).

\[ \Delta \] Проекцией поверхности \( S \) на плоскость \( Oxy \) является круг \( x^2 + y^2 \leq 4 \).

Пример 23. Найти массу поверхности куба \( 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \), если поверхностная плотность в точке \( M(x; y; z) \) равна \( xyz \).

\[ \Delta \] Ввиду симметрии масса поверхности куба равна утроенной массе верхней грани куба (масса трех граней куба равна нулю).

Найдем массу верхней грани куба \( m_1 = \iint_S \rho(x; y; z) dS \).

Проекция поверхности \( S \) на плоскость \( Oxy \) представляет собой квадрат

\[ \Delta \] Нормаль к поверхности образует тупой угол с осью \( O_3 \). Проекцией данной части конуса на плоскость \( Oxy \) является круг \( D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1 \). Сведем поверхностный интеграл к двойному: \( I = \iint_S dxdy = - \iint_{D_{xy}} dxdy. \)
Так как \( \int dxdy = S_{круга} = \pi \), то \( I = -\pi \). ▲

Пример 25. Вычислить поверхностный интеграл второго рода
\[
I = \iint_S dxdy + ydxdz - x^2 z dydz,
\]
где \( S \) – внешняя сторона части эллипсоида \( 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \), расположенной в первом октанте.

\( \Delta \) Раскладываем данный поверхностный интеграл на три слагаемых интеграла
\[
I = \iint_S dxdy + \iint_S ydxdz - \iint_S x^2 z dydz.
\]

Каждый из полученных интегралов преобразуем в двойной интеграл, учитывая, что нормаль к ориентированной поверхности образует острые углы с осями \( Ox, Oy, Oz \).

Находим \( I_1 = \iint_S dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy \), где \( D_{xy} \) – четверть области \( x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \).

Этот интеграл равен четверти площади эллипса с полуосами \( a = 1, b = 2 \), т. е. \( I_1 = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi}{2} \). \( I_2 = \iint_S ydxdz = 2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2+z^2} dxdz \), где \( D_{xz} \) – четверть круга \( x^2 + z^2 \leq 1 \).

Переходя к полярным координатам, получим:
\[
I_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dp \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r (1-r^2)^{\frac{1}{2}} dr = -\frac{\pi}{2} \left. \int_0^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} d (1-r^2) = -\frac{\pi}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{3};
\]
\[
I_3 = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}} zdz \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}} \left(1-\frac{y^2}{4} - z^2\right) dy = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}} z \left( y-\frac{y^3}{12} - z^2 y \right) |_{y=2\sqrt{1-z^2}}^{y=0} dz =
\]
\[
= \frac{4}{3} \left. z (1-z^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1 = \frac{4}{15}.
\]

Следовательно, \( I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{4}{15} = \frac{5}{6} \pi - \frac{4}{15} \). ▲

Пример 26. Вычислить поверхностный интеграл второго рода
\[
I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,
\]
где \( S \) – внешняя сторона сферы \( x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \).

\( \Delta \) Рассмотрим интеграл \( I_1 = \iint_S zdx dy \). Его можно представить в виде суммы интегралов по верхней и нижней сторонам сферы, которые обозначим соответственно...
ветственно $S_+$ и $S_-$. 

На поверхности $S_+$ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а на поверхности $S_-$ $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Но нормаль к поверхности $S_+$ образует острый угол с осью $Oz$, а нормаль к поверхности $S_-$ образует тупой угол с осью $Oz$. С учетом того, что проекции $S_+$ и $S_-$ на плоскость $Oxy$ совпадают, имеем

$$I_1 = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{4}{3} \pi (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$ 

Из очевидных равенств $\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = I_1$ окончательно находим

$$I = 4\pi a^3. \quad \blacksquare$$

**Пример 27.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода 

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx - 3zdzdy,$$

где $S$ – часть внешней поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$.

Д Воспользуемся формулой

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D \left( \vec{a} \cdot \vec{n} \right) dxdy,$$

В нашем случае $\vec{a} = (x; y; -3z)$, $\vec{n} = \pm(-z'_x; -z'_y; 1) = \pm(-2x; -2y; 1)$.

Так как внешняя нормаль образует тупой угол с осью $Oz$, $\vec{n} = (2x; 2y; -1)$. Находим $(\vec{a}; \vec{n}) = 2x^2 + 2y^2 + 3z$. Таким образом,

$$I = \iint_{D_{xy}} (2x^2 + 2y^2 + 3z) \bigg|_{z = x^2 + y^2} dxdy = 5 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Переходя к полярной системе координат, получим 

$$I = 5 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 r^2 dr = 40\pi. \quad \blacksquare$$

**Пример 28.** Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислить 

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где $S$ – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Д Используя формулу Гаусса – Остроградского, получаем
\[ I = \iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iiint_V dV = 3V = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad \uparrow \]

**Пример 29.** Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислить
\[ I = \iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy, \]
где \( S \) – внешняя сторона сферы \( x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \).

\[ \Delta \text{ Используя формулу Гаусса – Остроградского, находим} \]
\[ I = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz. \]

Переходя к сферическим координатам, получаем
\[ I = \int_0^{\pi} \sin \psi \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4\,dr\,d\phi\,d\psi = \frac{12}{5} \pi a^5. \quad \uparrow \]

**Пример 30.** Применяя формулу Стокса, вычислить \( I = \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz, \)
где \( C \) – окружность \( x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ x + y + z = 0, \) пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси \( Ox. \)

\[ \Delta \text{ По формуле Стокса} \]
\[ \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iiint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\,dy\,dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\,dz\,dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\,dx\,dy \]

имеем
\[ \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -\iint_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)\,dS. \]

В качестве поверхности \( S \) можно взять круг радиусом \( a \) с центром в начале координат, лежащий в плоскости \( z = -x - y. \)

Найдем направляющие косинусы нормали к плоскости \( z = -x - y: \)
\[ \cos \alpha = \frac{-z_x'}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-z_y'}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}. \]

Так как нормаль к плоскости образует с осями острые углы, получаем
\[ \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}. \]

Таким образом, \[ I = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3} \cdot S, \] где \( S = \pi a^2. \) Окончательно,
\[ I = -\sqrt{3} \pi a^2. \quad \uparrow \]
Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода \( \int_C (x - y)dl \),
где \( C \) – окружность \( x^2 + y^2 = 2x \) \( (x = 1 + \cos t, \ y = \sin t) \).
Ответ: \( 2\pi \).

2. Вычислить \( \int_O \bigg( xydx - y^2dy \bigg) \), \( O(0; 0), \ A(2; 2), \ y^2 = 2x \).
Ответ: \( \frac{8}{15} \).

3. Вычислить \( \iint_S (2x + 15y + z) dS \), где \( S \) – часть плоскости \( x + 2y + 2z = 2 \), отсеченная координатными плоскостями.
Ответ: 10.

4. Вычислить \( \iint_S xdydz \), где \( S \) – внешняя сторона сферы \( x^2 + y^2 + z^2 = 1 \).
Ответ: \( \frac{4}{3} \pi \).

5. Вычислить с помощью формулы Гаусса – Остроградского
\( \iint_S 3xdydz + (y + z) dx dz + (x - z) dy dx \),
где \( S \) – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью \( x + 3y + z = 3 \) и координатными плоскостями.
Ответ: \( \frac{9}{2} \).

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода \( \int_C (x^2 + y^2)dl \),
где \( C \) – окружность \( x^2 + y^2 = 4x \) \( (x = 2 + 2 \cos t, \ y = 2 \sin t) \).
Ответ: \( 32\pi \).

2. Вычислить \( \int_O \bigg( y(x - y) + xdy \bigg) \), \( O(0; 0), \ A(1; 2), \ y^2 = 4x \).
Ответ: \( -\frac{8}{15} \).

3. Вычислить \( \iint_S (4x - 4y - z) dS \), где \( S \) – часть плоскости \( x = 2y + 2z = 4 \), отсеченная координатными плоскостями.
Ответ: 44.

4. Вычислить \( \iiint_S x^2 dydz \), где \( S \) – внешняя сторона части сферы
   \[ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x \leq 0, \ y \geq 0. \]
   \[ \text{Ответ:} \ -\frac{\pi R^4}{4}. \]

5. Вычислить с помощью формулы Гаусса – Остроградского
   \[ \iiint_S (x+z) dydz + (z-x) dxz + (x+2y+z) dxdy, \]
   где \( S \) – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью
   \[ x + 3y + z = 2 \] и координатными плоскостями.
   \[ \text{Ответ:} \ \frac{16}{3}. \]

Дополнительные задачи

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по кривой \( C \):
   \[ \int_C (2x+y)dl, \quad \text{где} \ C = \text{ломаная} ABOA, \ A(1; \ 0), B(0; \ 2), O(0; \ 0). \]
   \[ \text{Ответ:} \ 3 + 2\sqrt{5}. \]

2. Вычислить \( \int_C (x+y)dl \), где \( C \) – четверть окружности
   \[ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ y = x, \] расположенная в первом октанте.
   \[ \text{Указание.} \ C : x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \ z = a \sin t \ \left( 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right). \]
   \[ \text{Ответ:} \ a^2 \sqrt{2}. \]

3. Вычислить \( \int_{AB} xydx - y^2dy \), где \( AB \) – дуга параболы \( y^2 = 2x \), \( A(0;0), B(2;2) \).
   \[ \text{Ответ:} \ \frac{8}{15}. \]

4. Вычислить \( \int_C ydx + zdy + xdz \) в направлении возрастания параметра, \( C \) – виток винтовой линии
   \( x = a \cos t, \ y = a \sin t, \ z = bt, \ 0 \leq t \leq 2\pi. \)
   \[ \text{Ответ:} \ -\pi a^2. \]

5. Вычислить \( \iiint_S z^2 dS \), где \( S \) – полная поверхность конуса \( \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2. \)
   \[ \text{Ответ:} \ 8\pi(2 + \sqrt{2}). \]
6. Вычислить \( \iint_{S} (2z - x)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3z\,dxdy \), где \( S \) – верхняя сторона плоскости треугольника \( x + 4y + z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \).

Ответ: \( \frac{128}{3} \).

7. Вычислить \( \iint_{S} x^3\,dy\,dz + y^3\,dxdz + z^3\,dxdy \), где \( S \) – внешняя сторона боковой поверхности конуса \( x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1 \).

Указание. Замкнуть поверхность плоскостью \( z = 1 \) и применить формулу Гаусса – Остроградского.

Ответ: \(-\frac{\pi}{10}\).

8. Применив формулу Стокса, вычислить

\[ \int_{L} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz, \]

где \( L \) – кривая пересечения параболоида \( x^2 + y^2 + z = 3 \) с плоскостью \( x + y + z = 2 \), которая ориентирована положительно относительно вектора \( (1; 0; 0) \).

Ответ: \(-12\pi\).

Занятия 33–34

Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля.

Потенциальные поля

Пример 1. Найти поток вектора \( \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \) через площадку, перпендикулярную оси \( Oz \) и имеющую форму круга радиусом \( R \), в положительном направлении оси \( Oz \).

\[ \Delta \text{ Согласно определению потока вектора через поверхность } S, \text{ будем иметь } \Pi = \iint_{S} (\vec{a}, \vec{n})\,dS. \]

В нашем случае \( \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{n}_0 = \vec{k}, \text{ так что } (\vec{a}, \vec{n}_0) = 3. \text{ Учитывая, что площадь круга равна } \pi R^2, \text{ получим } \Pi = \iint_{S} 3\,dS = 3\iint_{S} dS = 3\pi R^2. \]

Пример 2. Найти поток векторного поля \( \vec{a} = \vec{r}, \) где \( \vec{r} \) – радиус-вектор через прямой круговой цилиндр с высотой \( h \), радиусом основания \( R \) и осью \( Oz \):

\[ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \]

\( \Delta \text{ Поверхность } S \text{ состоит из боковой поверхности } S_1, \text{ верхнего основания} \]
$S_2$ и нижнего основания $S_3$ цилиндра. Искомый поток $\Pi$ в силу свойств аддитивности равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ — потоки данного поля через $S_1, S_2, S_3$ соответственно.

На боковой поверхности $S_1$

$$(\vec{a}, \vec{n}_0) = (\vec{r}, \vec{n}_0) = R \text{ (рис. 67)}.$$

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = R \iint_{S_1} dS = R \cdot 2\pi Rh = 2\pi R^2 h.$$

На верхнем основании $(\vec{a}, \vec{n}_0) = (\vec{r}, \vec{k}) = h$ и,
 значит,

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = h \iint_{S_2} dS = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании $S_3$ вектор $\vec{r}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_0 = -\vec{k}$. Поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_0) = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

Искомый поток равен $\Pi = \iint_{S} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = 3\pi R^2 h$. ▲

Пример 3. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через внешнюю поверхность гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 3h^2$, ограниченную плоскостями $z = 0, z = h$ (рис. 68). Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость $xOy$ в кольцо $Dxy$ (рис. 69).

Находим орт нормали $\vec{n}_0$ к поверхности $S$:

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\text{grad} (x^2 + y^2 - z^2)}{\sqrt{\text{grad} (x^2 + y^2 - z^2)}} = \pm \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
По условию задачи нормаль $\mathbf{n}_0$ образует тупой угол с осью $Oz$, поэтому перед дробью надо взять знак плюс. Таким образом, $\mathbf{n}_0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Отсюда $\cos \gamma = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} < 0$ и, значит, $dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dxdy$.

Находим скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{n}_0) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$:

$$\Pi = \int_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}_0) dS = \int_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} dxdy = \int_{\Delta} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} \Big|_{z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdy =$$

$$= \int d\phi \int \frac{2r^2 - 3h^2}{\sqrt{r^2 - 3h^2}} dr + \int d\phi \int \frac{2h}{r} dr = 2\pi \int \frac{2h}{h \sqrt{r^2 - 3h^2}} (r^2 - 3h^2) dr =$$

$$= \pi \cdot \frac{2}{3} (r^2 - 3h^2)^{3/2} \int_{h\sqrt{3}}^{2h} = \frac{2\pi}{3} \pi h^3;$$

$$\int d\phi \int \frac{r^3}{r^2 - 3h^2} dr = \int_0^h r dr = \frac{1}{2} \int_0^h (r^2 - 3h^2)^{1/2} d(r^2 - 3h^2) =$$

$$= 2\pi \int_0^h (z^2 + 3h^2) dz = 2\pi \left( \frac{h^3}{3} + 3h^3 \right) = \frac{20}{3} \pi h^3;$$

$$\Pi = \frac{2}{3} \pi h^3 + \frac{20}{3} \pi h^3 = \frac{22}{3} \pi h^3. \quad \blacksquare$$

Пример 4. Даны векторное поле $\mathbf{a} = (y - x + z)\mathbf{j}$ и плоскость $P$: $2x - y + 2z - 2 = 0$, которая ограничена координатными плоскостями. Требуется вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть плоскости $P$ в том направлении нормали к плоскости $P$, которая образует с осью $Oz$ оструй угол.

$\Delta$ Если поверхность $S$ взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то поток вектора $\mathbf{a} = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$ че-
рез поверхность \( S \) можно записать так:
\[
\Pi = \pm \int_{D_{yz}} P(x(y; z), y; z) dy dz \pm \int_{D_{xz}} Q(x; y(x; z); z) dx dz \pm \int_{D_{xy}} R(x; y; z(x; y)) dx dy,
\]
причем знак в каждой из формул выбирается таким, какой знак \( \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \) на поверхности \( S \). В качестве нормального вектора плоскости \( P \) можно взять вектор \( \vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \) (\( \cos \gamma > 0 \)), откуда получим \( \cos \gamma > 0, \cos \beta < 0 \). Так как в нашем случае \( P(x; y; z) = R(x; y; z) = 0 \), будем иметь
\[
\Pi = -\int_{D_{xz}} (y - x + z) dxdz = -\int_{D_{xz}} (x + 3z - 2) dxdz,
\]
где \( D_{xz} \) – проекция части плоскости \( P \) на плоскость \( xOz \) (рис. 70).
\[
\Pi = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} (x + 3z - 2) dz dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (x + 3z^2 - 2z) \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (2xz + 3z^2 - 4z) \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (2x - 2x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 4 + 4) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.
\]

**Пример 5.** Пользуясь инвариантным определением вычислить дивергенцию вектора \( \vec{a} = z\vec{k} \) в произвольной точке \( M \), выбрав в качестве поверхностей \( S \), окружающих точку \( M \), поверхности куба с гранями, параллельными координатным плоскостям, и стороной куба, равной \( \varepsilon \) (рис. 71).

Для определения дивергенции в нашей точке имеем
\[
\text{div} \vec{a}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{S}(\vec{a}, \vec{n}_0) dS}{V},
\]
где \( V \) – объем куба.

Поверхность \( S \) состоит из боковой поверхности \( S_1 \), нижнего основания \( S_2 \) и верхнего основания \( S_3 \).

Пусть для определенности уравнение нижней грани – \( z = h \). Тогда уравнение верхней грани – \( z = h + \varepsilon \). Поток вектора \( \Pi_1 \) через боковую поверхность \( S_1 \) равен нулю, так как \( \vec{a} \) перпендикулярен \( \vec{n}_0 \).
\[ \Pi_2 = \iiint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint_{S_2} -h dS = -h \varepsilon^2. \]
\[ \Pi_3 = \iiint_{S_3} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint_{S_3} (h + \varepsilon) dS = h \varepsilon^2 + \varepsilon^3. \]
\[ \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \varepsilon^3. \]
Следовательно, \( \text{div} \, \vec{a}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi}{V} = 1. \]

**Пример 6.** Найти дивергенцию векторного поля \( \vec{a} = xy^2 \vec{i} + x^2 y \vec{j} + z^3 \vec{k} \) в точке \( A(1; -1; 3) \). Будет ли данная точка источником или стоком поля?

\[ \Delta \text{div} \, \vec{a} = \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} + \frac{\partial (z^3)}{\partial z} = x^2 + y^2 + 3z^2; \quad \text{div} \, \vec{a}(A) = 29 > 0. \]

Следовательно, точка \( A \) является источником векторного поля. ▲

**Пример 7.** Применив Формулу Гаусса–Остроградского, вычислить поток векторного поля \( \vec{a} = (x - y) \vec{i} + (z - y) \vec{j} + (2z - x) \vec{k} \) через сферу \( x^2 + 6x + y^2 + z^2 = 0. \)

\[ \Delta \text{Запишем уравнение сферы в виде} \quad (x + 3)^2 + y^2 + z^2 = 9. \]
Радиус сферы равен 3.

\[ \text{div} \, \vec{a}(M) = \frac{\partial (x - y)}{\partial x} + \frac{\partial (z - y)}{\partial y} + \frac{\partial (2z - x)}{\partial z} = 1 - 1 + 2 = 2. \]
Находим \( \Pi = \iiint_V \text{div} \, \vec{a}(M) \, dV = 2 \iiint_V dV = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 72 \pi. \)

**Пример 8.** Вычислить поток векторного поля \( \vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k} \) через боковую поверхность \( S_1 \) конуса \( \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \) в сторону внешней нормали.

\[ \Delta \text{Дополним заданную поверхность} \quad S_1 \quad \text{до замкнутой кусочно-гладкой} \]
покрытии с основанием конуса – кругом \( S_2: \quad x^2 + y^2 \leq h^2, \quad z = h. \)

Применим теперь формулу Гаусса–Остроградского к области \( V \), ограниченной замкнутой поверхностью \( S: \)

\[ \iiint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS + \iiint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint_V \text{div} \, \vec{a} dxdydz = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz. \]
На круге \( S_2 \) имеем \( \vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + h^2 \vec{k}, \quad \vec{n}_0 = \vec{k} \), поэтому
\[ \iiint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) = \iint_{S_2} h^2 dS = \pi h^4. \]
Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: \( x = r \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad z = z \). Уравнение конической поверхности примет вид \( z = r \).
Таким образом,

\[ 2 \iiint_V (x + y + z) \, dxdydz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int r (\cos \varphi + \sin \varphi + z) \, dz = \]

\[ = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \, zdz = 2\pi \int_0^h r (h^2 - r^2) \, dr = 2\pi \left( \frac{r^2h^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^h = \frac{\pi}{2} h^4. \]

Искомый интеграл по боковой поверхности равен

\[ \iiint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) = \frac{\pi h^4}{2} - \frac{\pi h^4}{2} = -\frac{\pi h^4}{2}. \]

**Пример 9.** Вычислить линейный интеграл в векторном поле \( \vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k} \) в направлении от точки \( A(0;0;0) \) до точки \( B(1;1;1) \) вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

\( \Delta \) Линейный интеграл имеет вид \( \int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{AB} x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz. \)

Запишем параметрическое уравнение прямой \( AB: \)

\[ \begin{align*}
  x &= t, \\
  y &= t, \quad t \in [0;1]. \\
  z &= t,
\end{align*} \]

Отсюда \( dx = dy = dz = dt. \)

Искомый линейный интеграл будет равен

\[ \int_0^1 (t^2 + t^2 + t^2) \, dt = \frac{3}{3} t^3 \bigg|_0^1 = 1. \]

\( \Delta \)

**Пример 10.** Вычислить циркуляцию вектора \( \vec{a} = z^2 \vec{i} + x \vec{j} + y \vec{k} \) по контуру \( L: \)

\[ \begin{cases}
  x^2 + y^2 = 1, \\
  z = y.
\end{cases} \]

\( \Delta \) Параметрическое уравнение линии \( L: \)

\[ \begin{align*}
  x &= \cos t, \\
  y &= \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ так что } \\
  z &= y = \sin t,
\end{align*} \]

что \( dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = \cos t dt. \)

\( \Gamma = \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{0}^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t + \sin t \cos t) dt = \int_{0}^{2\pi} \cos^2 t dt = \]

\[ = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} dt = \pi. \]

\( \Delta \)

**Пример 11.** Для векторного поля \( \vec{a} = z^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + x^3 \vec{k} \) найти вектор, направленный так, что для перпендикулярной ему плоскости плотность цирку-
ляции в точке \( P(1; 2; 2) \) будет наибольшей. Найти величину этой плотности циркуляции.

Δ Указанным условиям удовлетворяют вектор \( \text{rot} \, \vec{a}(p) \) и \( |\text{rot} \, \vec{a}(p)| \) соответственно.

\[
\text{rot} \, \vec{a} = \begin{vmatrix}
    i & j & k \\
    \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\
    x^3 & y^3 & z^3
\end{vmatrix} = \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right| \vec{i} - \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right| \vec{j} + \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right| \vec{k} = 3(z^2 - x^2) \vec{j};
\]

\( \text{rot} \, \vec{a}(p) = 9 \vec{j}; \quad |\text{rot} \, \vec{a}(p)| = 9. \) ▲

**Пример 12.** Вычислить циркуляцию вектора \( \vec{a} = xz \vec{i} + xy^2 \vec{j} + yz^2 \vec{k} \) по контуру \( L \):

\[
\begin{cases}
x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\
x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0)
\end{cases}
\]

непосредственно и по теореме Стокса.

Δ Для параметрического задания контура необходимо найти радиус окружности, являющейся пересечением конуса и сферы (рис. 72). Для этого нужно решить систему уравнений:

\[
\begin{cases}
x^2 + y^2 = 9, \\
x^2 + y^2 = z^2.
\end{cases}
\]

\( 2z^2 = 9, \quad z = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad R = z = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \)

Параметрическое уравнение контура:

\[
\begin{cases}
x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\
y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.
\end{cases}
\]

Отсюда \( dx = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t, \quad dy = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t dt, \quad dz = 0. \)

\[
\text{Ц} = \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{27}{2\sqrt{2}} \sin t \cos t + \frac{81}{4} \cos^2 t \sin^2 t \right) dt =
\]

181
Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

\[
\text{rot} \, \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy^2 & z^2 y \end{vmatrix} = z^2 \vec{i} + x \vec{j} + y^2 \vec{k}.
\]

Натянем на контур \( L \) часть плоскости \( z = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{n}_0 = \vec{k} \).

\[
\Gamma = \oint_S (\text{rot} \, \vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iint_S y^2 dS = |dS| = \iint_{Dxy} y^2 dxdy = \left| x = r \cos \varphi \right| = \\
= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}} r(r^2 \sin^2 \varphi) dr d\varphi = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} r^3 dr = \\
= \frac{\pi}{4} \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{81}{16} \pi. \quad \Delta
\]

Пример 13. Вычислить циркуляцию векторного поля \( \vec{a} = yi - xj + (z - y)k \) по контуру \( L = \left\{ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = x\sqrt{3} \right\} \), непосредственно и по теореме Стокса.

\( \Delta \) Найдем проекцию \( L \) на плоскость \( xOy \) (рис. 73):

\[
x^2 + y^2 - \frac{3x^2}{4} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.
\]

Проекцией контура на плоскость \( xOy \) является эллипс с полусами \( a = 2 \) и \( b = 1 \). Площадь этого эллипса равна \( 2\pi \).

Запишем параметрическое уравнение контура:

\[
\begin{aligned}
x &= 2 \cos \varphi, \\
y &= \sin \varphi, & \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \\
z &= 2\sqrt{3} \cos \varphi,
\end{aligned}
\]

Отсюда

\[
dx = -2 \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \varphi d\varphi, \quad dz = -2\sqrt{3} \sin \varphi d\varphi.
\]
\[ \zeta = \int (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\mathcal{L}} (-2\sin^2 \varphi - 2\cos^2 \varphi - 12 \sin \varphi \cos \varphi + 2\sqrt{3} \sin^2 \varphi) \, d\varphi = \]

\[ = \int_{0}^{2\pi} \left(-2\frac{1 - \cos^2 \varphi}{2} - 2\frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} + 2\sqrt{3} \frac{1 - \cos^2 \varphi}{2}\right) \, d\varphi = \]

\[ = \int_{0}^{2\pi} (-1 - \sqrt{3}) \, d\varphi = (\sqrt{3} - 2) \cdot 2\pi. \]

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

\[ \text{rot} \, \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - x & z - y & \end{vmatrix} = -i + 0j - 2k. \]

На контур \( L \) натянем часть плоскости \( z = x\sqrt{3}. \)

\[ \vec{n}_0 = \pm \frac{\text{grad} (z - x\sqrt{3})}{\text{grad} (z - x\sqrt{3})} = \pm \frac{-\sqrt{3}i + k}{2}, \quad \vec{n}_0 = -\frac{\sqrt{3}i + k}{2}. \]

\[ \zeta = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot} \, \vec{a}, \vec{n}_0) \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \, dS = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \iint_{\mathcal{D}_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy = \]

\[ = (\sqrt{3} - 2) \iint_{\mathcal{D}_{xy}} \, dxdy = (\sqrt{3} - 2) \cdot 2\pi. \]

**Пример 14.** Доказать, что векторное поле \( \vec{a} = (2xy + z)i + (x^2 - 2y)j + xk \)

является потенциальным, и найти его потенциал.

Вычислим \( \int_{(1;2;4)} (2xy + z)dx + (x^2 - 2y)dy + xdz. \)

\[ \Delta \text{ Находим} \]

\[ \text{rot} \, \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy + z & x^2 - 2y \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - (1 - 1)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} \equiv 0, \]

т. е. поле является потенциальным.

\[ U(x; y; z) = \int_{x_0}^{x} P(x; y_0; z_0) \, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x; y; z_0) \, dy + \int_{z_0}^{z} P(x; y; z) \, dz + C. \]
За начальную фиксированную точку примем $O(0;0;0)$.
Тогда получим

$$U(x; y; z) = \int_0^x 0 \, dx + \int_0^y (x^2 - 2y) \, dy + \int_0^z x \, dz + C = x^2 y - y^2 + xz + C.$$  

$$(1;2;4) \quad \int_0^{2xy + z} (2xy + z) \, dx + (x^2 - 2y) \, dy + x \, dz = U(1;2;4) - U(1;1;1) =$$

$$= (2 + C) - (1 + C) = 1. \quad \blacktriangle$$

**Дополнительные задачи**

1. Найти поток векторного поля $\vec{a} = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + xz \vec{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $y = x^2 + y^2$, ограниченную плоскостью $y = 1$ и лежащую в I октанте. **Ответ:** $-\frac{1}{15}$.

2. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = z \vec{i} - xy \vec{j} + y \vec{k}$ через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями. **Ответ:** $\frac{7}{6}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x^2z \vec{i} + yz \vec{j} + z \vec{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$ в сторону внешней нормали. **Указание.** Дополнить заданную поверхность плоскостью $z = 1$. 

**Ответ:** $-\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (x^2 + 2xy) \vec{i} + (x^2 + y^2) \vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(0;0)$ до точки $(1;1)$. **Ответ:** $\frac{5}{3}$.

5. Найти ротор вектора $\vec{a} = (x^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 + z^2) \vec{j} + (z^2 + x^2) \vec{k}$. 

**Ответ:** $-2(zi + xj + yk)$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}$ по контуру $L$:

$$\begin{align*}
    &\begin{cases}
    x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\
    z = x
    \end{cases}, \\
    &\text{непосредственно и по теореме Стокса.} \quad \textbf{Ответ:} \quad -\sqrt{2}\pi.
\end{align*}$$

7. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = (x^2 - 2yz) \vec{i} + (y^2 - 2xz) \vec{j} + (z^2 - 2xy) \vec{k}$ является потенциальным. Найдите его потенциал. 

**Ответ:** $\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C.$
Список использованных источников

## Содержание

| Занятие 1. | Комплексные числа | 3 |
| Занятия 2–3. | Непосредственное интегрирование. Метод подстановки, интегрирование по частям | 8 |
| Занятие 4. | Интегрирование рациональных функций | 16 |
| Занятие 5. | Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений | 21 |
| Занятие 6. | Контрольная работа. Неопределенный интеграл | 30 |
| Занятие 7. | Определенный интеграл | 32 |
| Занятие 8. | Геометрические и физические приложения определенных интегралов | 39 |
| Занятия 9–10. | Несобственные интегралы. Самостоятельная работа | 48 |
| Занятие 11. | Основные понятия функции нескольких переменных | 59 |
| Частные производные, дифференциал | | |
| Занятие 12. | Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению | 65 |
| Занятие 13. | Касательная плоскость и нормаль. Производные и дифференциалы высших порядков | 70 |
| Занятие 14. | Дифференцирование неявных функций. Формула Тейлора | 75 |
| Занятия 15–16. | Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум | 80 |
| Занятие 17. | Контрольная работа. Функции нескольких переменных | 90 |
| Занятие 18. | Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными | 92 |
| Занятия 19–20. | Дифференциальные уравнения первого порядка | 97 |
| Занятия 21–22. | Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Самостоятельная работа | 104 |
| Занятия 23–24. | Линейные уравнения высших порядков | 112 |
| Занятия 25–26. | Системы дифференциальных уравнений | 122 |
| Занятие 27. | Контрольная работа. Дифференциальные уравнения | 131 |
| Занятия 28–29. | Кратные интегралы. Приложения кратных интегралов | 133 |
Занятие 30. Контрольная работа. Кратные интегралы .......... 158
Занятия 31–32. Криволинейные и поверхностные интегралы.
Самостоятельная работа .................................................. 160
Занятия 33–34. Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный
интеграл и циркуляция векторного поля. Рotor векторного поля.
Потенциальные поля ......................................................... 175
Список использованных источников .................................. 185
Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Кобринец Николай Иванович
Баркова Елена Александровна и др.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Е. И. Герман
Компьютерная верстка Г. М. Кореневская
Компьютерная правка, оригинал-макет Е. Г. Бабичева

Подписано в печать 20.07.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,04. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 250 экз. Заказ 28.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
220013, Минск, П. Бровки, 6