S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 773–785 (2018) УДК 514.76
DOI 10.17377/semi.2018.15.063 MSC 53B05

СВЯЗНОСТИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Н.П. МОЖЕЙ

Abstract. The purpose of the work is the local classification of three-dimensional homogeneous spaces, admits invariant affine connections nonzero curvature only, description of the connections on those spaces together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character.

Keywords: affine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor.

1. Введение

Многообразия, снабженные дифференциально-геометрическими структурами, являлись объектом многих исследований, специализация многообразия приводит к важным понятиям геометрии: группе Ли, главному расслоению, однородным пространствам, пространствам со связностями и другим. Наиболее интересным с математической и физической точки зрения является однородный случай, поскольку большинство физических моделей являются однородными, большинство пространств, появляющихся в различных разделах математики, тесно связанных с приложениями, также считаются однородными. Условие однородности является принципиальным и с математической точки зрения, оно

Mozhey, N.P., Connections of nonzero curvature on homogeneous spaces of unsolvable transformations groups.

Поступила 29 мая 2017 г., опубликована 18 июля 2018 г.

позволяет свести задачу к чисто алгебраической, позволяет применить технику теории групп и алгебр Ли. Решение задач классификации однородных пространств, описания инвариантных аффинных связностей на однородных пространствах сегодня важно как для самой теории, так и для приложений, однако эти задачи не были решены даже в малых размерностях. Двумерные однородные пространства были локально классифицированы еще Софусом Ли [1], но В. В. Горбацевич и А. Л. Онищик [2] считали, что “описание произвольных транзитивных действий на многообразиях M, где $\dim M \geq 3$, сейчас представляется невозможным”. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Теория связностей, а также её применение при исследовании однородных пространств, занимает важное место в дифференциальной геометрии. “Если на поверхности зафиксирован способ “параллельно” переносить касательные вектора вдоль кривых, то говорят, что на этой поверхности задана связность. Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках “кривого” пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике” [3]. Инвариантные связности на однородных пространствах независимо изучались П. К. Рашевским [4, 5], М. Куритой [6], Е. Б. Винбергом [7, 8] и Ш. Кобаяши, К. Номидзу [9, 10]. Б. Дубров, Б. Комраков, Ю. Чемпковский [11] описали максимальные аффинные пары (трехмерное локально однородное пространство, аффинная связность), группа симметрий которых транзитивна и как минимум пятимерна.

Рассматриваемая тема имеет также многочисленные приложения, например, связности – важный физический объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля, А. З. Петров [12] дал алгебраическую классификацию полей тяготения, связанную со структурой тензора кривизны пространства.

Инвариантные аффинные связности на трехмерных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований изучались в работе [13]. В данной работе изучаются однородные пространства неразрешимых групп Ли, допускающие связности только ненулевой кривизны.

2. Основные определения

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M,\ \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G},\ G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [14]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу $\bar{G}$, а ее образ в $Diff(M)$, т. е. достаточно изучать только эффективные действия группы $\bar{G}$ на многообразии M. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s \in G,\ \ x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}\ /\,\mathfrak{g}$ следующим образом: $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y]+\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g},\ \ y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}} \,/\, \mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M,\ \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [10]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [9]. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем, эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in InvT^1_2(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT^1_3(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = \Lambda(x)y_\mathfrak{m} - \Lambda(y)x_\mathfrak{m} - [x,y]_\mathfrak{m}$, $R(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$. Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3,\ \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\ \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim\bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [15], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

3. Описание однородных пространств и связностей на них

Аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии выписаны в доказательстве теоремы.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1. *Все трехмерные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), допускающие связности только ненулевой кривизны, локально имеют следующий вид:*

2.1.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	$-u_2$	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	$-u_1$	0	0	e_1	0
u_2	u_2	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.3.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.3.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	0	e_1	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

3.8.8.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	u_1	0	0
e_2	0	0	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_2	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2-e_1$
u_3	0	u_3	$-u_1$	0	e_1-2e_2	0

,

3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

,

3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

4.11.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	e_2
u_3	0	u_3	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0

,

4.13.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

,

4.13.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

.

Замечание. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала описаны все трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ выписаны в [15]. Из них выбраны пары с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, допускающие связность только ненулевой кривизны.

Если $\mathfrak{g}$ – разрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ задает трехмерное однородное пространство, допускающее связность только ненулевой кривизны, $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$2.1.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & -x & \\ & & y \\ \hline\end{array};\ 2.3.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & \\ -x & & \\ & & y \\ \hline\end{array};\ 2.9.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & y \\ & -2x & \\ & & 2x \\ \hline\end{array};\ 3.8.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z \\ & y & \\ & & -y \\ \hline\end{array};$$

$$3.19.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z \\ & x & \\ & & -x \\ \hline\end{array};\ 3.21.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z \\ & & x \\ & -x & \\ \hline\end{array};\ 4.11.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u \\ & y & \\ & & -y \\ \hline\end{array};\ 4.13.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z \\ & & u \\ & -u & \\ \hline\end{array}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары. Рассмотрим, например, пару типа 3.21. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ – базис $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную вектором e_1. Рассмотрим комплексный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1$, $i = 1, 2, 3$, и $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, и $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ – стандартный базис в $U^{\mathbb{C}}$. Тогда $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1$, $\mathfrak{g}^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $\mathfrak{g}^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $(U^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{u}_1$, $(U^{\mathbb{C}})^{(+i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $(U^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$ и $[e_1, u_1] = 0$, $[e_2, u_1] = pe_2$, $[e_3, u_1] = pe_3$, $[e_1, u_2] = qe_3 - u_3$, $[e_2, u_2] = u_1$, $[e_3, u_2] = pe_1$, $[e_1, u_3] = u_2 + re_3$, $[e_2, u_3] = -pe_1$, $[e_3, u_3] = u_1$ при $p, q, r \in \mathbb{R}$, имеем $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\tilde{e}_1 + \mathbb{C}\tilde{u}_1$, $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3) + \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}})^{(-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3) + \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$. Поэтому $[u_1, u_2] = a_2e_2 + a_3e_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3$, $[u_1, u_3] = b_2e_2 + b_3e_3 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3$, $[u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1$. Здесь и далее все $a_i, b_i, c_i, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,3}$. При $p \neq 0$ пара не допускает аффинных связностей и не входит в рассматриваемый в работе класс. При $p = 0$, используя тождество Якоби, видим, что $[u_1, u_2] = a_2e_2, [u_1, u_3] = a_2e_3, [u_2, u_3] = a_2e_1 + \gamma_1u_1$, $q = 0$. При $r \neq 0$ пары также не входят в рассматриваемый в работе класс (при $a_2 = 0$ пара является разрешимой, при $a_2 \neq 0$ пары не допускают аффинных связностей). При $a_2 = r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, алгебра является разрешимой и не входит в рассматриваемый в работе класс алгебр. При $a_2 > 0$, $r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.6 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_6 \to \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$\pi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}(u_2 - \frac{\gamma_1}{2}e_3), \pi(u_3) = \frac{1}{\sqrt{a_2}}(u_3 - \frac{\gamma_1}{2}e_2).$$

При $a_2 < 0$, $r = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.21.7. Заметим, что $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_6$, $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_7$, подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_6$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, а подалгебра Леви в $\bar{\mathfrak{g}}_7$ изоморфна $\mathfrak{su}(2)$. Отсюда следует, что пары не эквивалентны друг другу.

Рассмотрим теперь, например, пару типа 2.1. Заметим, что $\mathfrak{g}$ - нильпотентная алгебра Ли. В силу тождества Якоби $[u_1, u_2] = a_1e_1$, $[u_1, u_3] = [u_2, u_3] = 0$. При $a_1 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре (т.е. $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима), при $a_1 \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 2.1.2 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = (1/a_1)u_2$, $\pi(u_3) = u_3$. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_1$, пары не эквивалентны.

В случае 2.3 можно считать, что $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, u_1] = -u_2$, $[e_2, u_1] = 0$, $[e_1, u_2] = u_1$, $[e_2, u_2] = 0$, $[e_1, u_3] = 0$, $[e_2, u_3] = u_3$. Из тождества Якоби следует, что $[u_1, u_2] = a_1 e_1$, $[u_1, u_3] = [u_2, u_3] = 0$. При $a_1 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре с разрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, при $a_1 > 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 2.3.2 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_1) = a_1^{-1/2}u_1$, $\pi(u_2) = a_1^{-1/2}u_2$, $\pi(u_3) = u_3$, при $a_1 < 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 2.3.3 задается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \mathfrak{g}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_1) = (-a_1)^{-1/2}u_1$, $\pi(u_2) = (-a_1)^{-1/2}u_2$, $\pi(u_3) = u_3$. Остается показать, что пары не эквивалентны друг другу. Действительно, алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_1$ разрешима, а алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$, $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не разрешимы. Отсюда следует, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ не эквивалентна парам $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$. Поскольку подалгебры Леви $\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\bar{\mathfrak{g}}_3$ изоморфны $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}(2)$ соответственно, пары 2.3.2 и 2.3.3 не эквивалентны.

В случае 4.11 $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1, e_2, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,1)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) \supseteq \mathbb{R}u_3$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_1, u_2] = c_2 e_4$, $[u_1, u_3] = c_2 e_3$, $[u_2, u_3] = c_2 e_2$, где при $c_2 = 0$ пара тривиальна, при $c_2 \neq 0$ пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 4.11.2 эквивалентны посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 4$, $\pi(e_3) = (1/c_2)e_3$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = c_2 u_2$, $\pi(u_3) = u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары не эквивалентны.

В случае 4.13 $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2. Рассмотрим комплексный модуль $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, U^{\mathbb{C}})$. Положим $\tilde{e}_i = e_i \otimes 1$, $1 \leq i \leq 4$, $\tilde{u}_j = u_j \otimes 1$, $1 \leq j \leq 3$. Тогда $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ – базис $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Векторное пространство $U^{\mathbb{C}}$ может быть отождествлено с $\mathbb{C}^3$, $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ - базис $U^{\mathbb{C}}$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3)$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(\tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3)$, тогда $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,-i)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, $[\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Получаем $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3] = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] + i[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}(\tilde{e}_2 + i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] - i[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}(\tilde{e}_2 - i\tilde{e}_3)$, $[\tilde{u}_2 + i\tilde{u}_3, \tilde{u}_2 - i\tilde{u}_3] = -2i[\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] \in \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_4$.

Следовательно, $[u_1, u_2] = a_2 e_2 + a_3 e_3$, $[u_1, u_3] = b_2 e_2 + b_3 e_3$, $[u_2, u_3] = c_1 e_1 + c_4 e_4$. В силу тождества Якоби $[u_1, u_2] = a_2 e_2$,$[u_1, u_3] = a_2 e_3$, $[u_2, u_3] = a_2 e_4$. При $a_2 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре. При $a_2 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 4.13.2 устанавливается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1,4}$, $\pi(u_j) = a_2^{-1/2}u_j, j = \overline{1,3}$. При $a_2 < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.13.3 при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_j) = (-a_2)^{-1/2}u_j$, $j = \overline{1,3}$. Поскольку $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, ни одна из пар 4.13.2 и 4.13.3 не эквивалентна тривиальной паре. Через $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ обозначим подалгебры Леви алгебр $\bar{\mathfrak{g}}_2$ и $\bar{\mathfrak{g}}_3$ соответственно. Заметим, что $\mathfrak{a}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{a}_3 \cong \mathfrak{su}(2)$. Поэтому 4.13.2 и 4.13.3 не эквивалентны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Рассмотрим, например, пару 2.9.12. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i, j = 1, 2, 3$). Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$.

Получим $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{2,1} = p_{3,1} = 0$, $p_{3,3} = p_{1,1}$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$. Следовательно, $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{1,3} = p_{2,2} = p_{2,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_2, u_2])$, то $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$. Поэтому $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{2,1} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1}$. Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = -2\Lambda(u_2)$, то $q_{1,1} = q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 2\Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = r_{3,1} = r_{3,2} = r_{3,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, то $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Далее такую связность будем называть нулевой. Тензор кривизны ненулевой, он имеет вид, указанный ниже. Алгебра, порожденная множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, т. е. $R(u_i, u_j)$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, алгебра голономии совершенна). Действительно, поскольку связность тривиальна, $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] = [\Lambda(\mathfrak{g}), V] = V$, так как $\Lambda(\mathfrak{g})$ совпадает с V. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, т. е. связность нормальна. Тензор кручения нулевой. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Таким образом, прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности имеют вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12,4.11.2,4.13.2,4.13.3, 3.8.8, 2.1.2, 2.3.2, 2.3.3	нулевая

Тензоры кривизны и кручения на найденных однородных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.21.6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4.13.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3.8.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2.1.2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.2 2.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.19.14	$(0,0,0),(0,0,0),(q_{1,3}-r_{1,2},0,0)$
3.21.6, 3.21.7	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
2.9.12,4.11.2, 4.13.2,4.13.3, 3.8.8, 2.1.2, 2.3.2, 2.3.3	нулевой

Алгебры голономии указанных связностей:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$	4.13.2 4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
3.8.8	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & -p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$	2.1.2	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}.$
3.21.6, 3.21.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$		$p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$

Таким образом, найдены все трехмерные однородные пространства с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, допускающие связности только ненулевой кривизны, а также сами аффинные связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии. □

Теорема 2. *Все трехмерные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, допускающие связности только ненулевой кривизны, локально имеют следующий вид:*

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5
u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0

, $\alpha\geq 0$,

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

.

Доказательство. Рассуждения аналогичны приведенным в предыдущей теореме, только выбираем пары с неразрешимыми алгебрами $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$, допускающие связности только ненулевой кривизны.

Если $\mathfrak{g}$ – неразрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ допускает связности только ненулевой кривизны, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из подалгебр 3.4, 3.5, 5.2, 6.1:

$$3.4.\boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{array}};\ 3.5.\boxed{\begin{array}{ccc} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{array}};\ 5.2.\boxed{\begin{array}{ccc} x & u & u \\ z & -x & v \\ & & \end{array}};\ 6.1.\boxed{\begin{array}{ccc} x & z & w \\ u & y & v \\ & & \end{array}}.$$

Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары.

Рассмотрим, например, пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 3.4. Пусть $\mathfrak{h}$ (нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$) порождена вектором

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3\oplus\mathbb{R}u_3$, $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$, тогда $[u_1,u_2]=a_2e_2+\alpha_1u_1$, $[u_1,u_3]=b_1e_1+\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]=c_3e_3+\gamma_3u_3$. Использовав тождество Якоби, получим, что $[u_1,u_3]=-a_2e_1+\alpha_1u_2$, $[u_2,u_3]=-a_2e_3+\alpha_1u_3$. Положим $p=a_2+\alpha_1^2/4$. Рассмотрим следующие случаи:

1° $p>0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.4.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=p^{-1/2}(u_1-(\alpha_1/2)e_2)$, $\pi(u_2)=p^{-1/2}(u_2+(\alpha_1/2)e_1)$, $\pi(u_3)=p^{-1/2}(u_3+(\alpha_1/2)e_3)$. В этом случае аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},\ p_{1,2}\in\mathbb{R},$$

а тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $p_{1,2}=\pm 1$ тензор кривизны нулевой, т.е. пара не входит в рассматриваемый в работе класс.

2° $p = 0$. Пара эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = u_1 - (\alpha_1/2)e_2$, $\pi(u_2) = u_2 + (\alpha_1/2)e_1$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_1/2)e_3$. В данном случае тензор кривизны также может быть нулевым, т.е. пара не входит в рассматриваемый в работе класс.

3° $p < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.4.3 показывается при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$,$\pi(u_1) = (-p)^{1/2}(u_1 - (\alpha_1/2)e_2)$,$\pi(u_2) = (-p)^{-1/2}(u_2 + (\alpha_1/2)e_1)$,$\pi(u_3) = (-p)^{-1/2}(u_3 + (\alpha_1/2)e_3)$.

Поскольку $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, тривиальная пара не эквивалентна паре 3.4.2 и паре 3.4.3. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_3$ – простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$), пары 3.4.2 и 3.4.3 не эквивалентны.

Рассмотрим пару типа 3.5. В силу тождества Якоби (с учетом того, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли) $[u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_3u_3$, $[u_1, u_3] = a_2e_1 - \alpha_3u_2$, $[u_2, u_3] = a_2e_3 + \alpha_3u_1$. Положим $p = \left|a_2 - \alpha_3^2/4\right|^{-1/2}$ при $a_2 \neq \alpha_3^2/4$.

1° $4a_2 = \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = u_1 + (\alpha_3/2)e_3$, $\pi(u_2) = u_2 - (\alpha_3/2)e_1$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_3/2)e_2$ (в этом случае тензор кривизны может быть нулевым, т.е. пара не входит в рассматриваемый в работе класс).

2° $4a_2 > \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.5.2 при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$,$i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$.

3° $4a_2 < \alpha_3^2$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.5.3 определяется посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$,$i = \overline{1,3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3/2)e_2)$. В этом случае тензор кривизны также может быть нулевым, т.е. пара не входит в рассматриваемый в работе класс.

Поскольку $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \{0\}$ и $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2) = \mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3) = \{0\}$, ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна тривиальной паре. Заметим, что алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$). Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай 5.2. Разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{-e_5, e_4\}, \{2e_2, -2e_3 - 2e_5, e_1 + e_4\}\}$, $\mathfrak{h}$ порождена e_1. Так как $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где $\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}u_2$,$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3$,$\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, имеем $[u_1, u_2] = a_1e_1 + \alpha_3u_3$, $[u_1, u_3] = b_4e_4 + \beta_1u_1$, $[u_2, u_3] = c_5e_5 + \gamma_2u_2$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha e_4 + \beta u_1$, $[u_2, u_3] = \alpha e_5 + \beta u_2$.

1° $\alpha=\beta=0$. Пара тривиальна (не входит в рассматриваемый в работе класс).

2° $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. Пара эквивалентна 5.2.2 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = e_4 + u_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = e_5 + u_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})/2 \neq 0$. Полученная пара допускает связности нулевой кривизны и не входит в рассматриваемый в работе класс.

3° $\beta^2 + 4\alpha < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 5.2.3 показывает $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_3 \to \mathfrak{g}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = u_1 + (\beta\lambda/2)e_4$,$\pi(e_2) = e_2$,$\pi(u_2) = u_2 + (\beta\lambda/2)e_5$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda^{-1}u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = 2/\sqrt{-\beta^2 - 4\alpha}$.

Пусть $\mathfrak{r}_i$ – радикал $\bar{\mathfrak{g}}_i$ для $i = \overline{1,3}$. Рассмотрим $f_i : \bar{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\bar{\mathfrak{r}}_i} x$ в базисе $\{e_4, e_5, u_1, u_2\}$ пространства $\bar{\mathfrak{r}}_i$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары не эквивалентны.

Рассмотрим случай 6.1, тогда разложение Леви $\mathfrak{g}$ – $\{\{-2e_5, e_4, -2e_6\},\{-4e_1 + 2e_6, -4e_2 - 2e_5, -4e_3\}\}$, а $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = b_5e_5 + \beta_1u_1$, $[u_2, u_3] = c_6e_6 + \gamma_2u_2$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_2, u_3] = b_5e_6 + \beta_1u_2$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}' \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,6}$, $\pi(u_1) = u_1 + (\beta_1/2)e_5$, $\pi(u_2) = u_2 + (\beta_1/2)e_6$, $\pi(u_3) = u_3 - (\beta_1/2)e_4$, установит эквивалентность пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и пары $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$. При $b_5 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна тривиальной паре. При $b_5 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ и 6.1.2 определяется при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,6}$, $\pi(u_j) = \sqrt{b_5}u_j$, $j = \overline{1,3}$ (у данной пары тензор кривизны может быть нулевым, т.е. пара не входит в рассматриваемый в работе класс). При $b_5 < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 6.1.3 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,6}$, $\pi(u_j) = \sqrt{-b_5}u_j$, $j = \overline{1,3}$. Обозначим $\mathfrak{a}_i$ радикал $D\bar{\mathfrak{g}}_i$, $i = \overline{1,3}$. Рассмотрим $f_i : \bar{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\mathfrak{a}_i} x$ в базисе $\{e_6, e_6, u_1, u_2\}$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_i, \mathfrak{g}_i)$, $i = \overline{1,3}$, не эквивалентны друг другу. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии. Прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на найденных пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2-1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2-1 & 0 \\ p_{2,3}^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2-1 \\ 0 & p_{2,3}^2+1 & 0 \end{pmatrix}$
6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.4.3	$(2p_{1,2},0,0)\,,(0,2p_{1,2},0)\,,(0,0,2p_{1,2})$
3.5.2	$(0,0,-2p_{2,3})\,,(0,2p_{2,3},0)\,,(-2p_{2,3},0,0)$
6.1.3	$(0,0,0),(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0)\,,(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0)$
5.2.3	$(0,0,0),(q_{2,3}-r_{1,1},0,0)\,,(0,q_{2,3}-r_{1,1},0)$

Алгебры голономии указанных связностей имеют вид:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
3.4.3	$\begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$	3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
6.1.3	$\mathfrak{p}$	5.2.3	$\mathfrak{p}$

Здесь

$$\mathfrak{p}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ p_1,p_2,p_3\in\mathbb{R}. \qquad \Box$$

Заметим, что все найденные пары являются симметрическими, за исключением пары 5.2.3 при $\alpha\neq 0$, являющейся редуктивной (в другом базисе), но не являющейся симметрической.

4. Заключение

Таким образом, приведена в явном виде полная локальная классификация трехмерных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих связности только ненулевой кривизны. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом найденном однородном пространстве. Найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей.

Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. В работе используется алгебраический подход к проблеме исследования однородных пространств с аффинными связностями, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Полученные результаты могут быть использованы не только в различных разделах математики, но и в классической и квантовой механике, квантовой теории поля и других областях теоретической физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

References

[1] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen. III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit*, Arch. for Math., Kristiania, **3** (1878), 93–165.

[2] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, *Lie groups of transformations*, Results of science and technology, VINITI AS USSR, M., **20** (1988), 103-–240. MR0950863

[3] D. V. Alekseyevskiy, A. M. Vinogradov, V. V. Lychagin, *Basic ideas and concepts of differential geometry*, Results of science and technology, VINITI AS USSR, M., **28** (1988), 5-–297. Zbl 0675.53001

[4] P. K. Rashevskii, *On the geometry of homogeneous spaces*, Dokl. Akad. Nauk, SSSR (N. S.), **80** (1951), 169–171. MR0044183

[5] P. K. Rashevskii, *On the geometry of homogeneous spaces*, Trudy Sem. Vektor Tenzor Analiz.,**9** (1952), 49–74. MR0053586

[6] M. Kurita, *On the vector in homogeneous spaces*, Nagoya Math. J., **5** (1953), 1–33. MR0059052

[7] E. B. Vinberg, *On invariant linear connections*, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, **128** (1959), 653–654. MR0110073

[8] E. B. Vinberg, *Invariant linear connections in a homogeneous space*, Trudy Moscow Mat. Obsc., **9** (1960), 191–210. MR0176418

[9] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, New York: John Wiley and Sons, **1** (1963); **2** (1969). MR0152974, MR0238225

[10] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math., **76** (1954), 33–65. MR0059050

[11] B. Dubrov, B. Komrakov, Y. Tchempkovsky, *Invariant affine connections on three-dimensional homogeneous spaces*, Preprint series: Pure mathematics, **6** (1996).

[12] A. Z. Petrov, *New methods in the general theory of relativity*, M.: Nauka, 1966. MR0207365

[13] N. P. Mozhey, *Invariant affine connections on three-dimensional homogeneous spaces with non-solvable transformation group*, Lobachevskii Journal of Mathematics., **35** (2014), 218–240. MR3259518

[14] A.L. Onischik, *Topology tranzitive Lie groups of transformations*, M.: Phiz.-math. lit., 1995.

[15] N. P. Mozhey, *Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them*, Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 2015.

Natalya Pavlovna Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,
P. Brovki Street, 6,
220013, Minsk, Belarus
E-mail address: mozheynatalya@mail.ru