Итератор интерактивных процессов решения транспортных задач

Ревотюк М.П.; Заяц А.В.; Тиханович Т.В.
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: rmp@bsuir.by

***Аннотация*—Рассмотрена задача быстрого решения последовательности классических транспортных задач с ограничениями на пропускную способность коммуникаций. В случае незначительного изменения исходных данных наследование результатов решения предшествующих задач позволяет существенно снизить время получения очередного решения. Предложен рекуррентный алгоритм реоптимизации, базирующийся на методе потенциалов.**

Ключевые слова: транспортная задача, итератор, метод потенциалов, реоптимизация

I. Введение

Решение реальных задач транспортного типа часто связано с необходимостью пересмотра результата оптимизации для нового варианта исходных данных классических транспортных задач Хичкока [1]:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\;\middle|\;\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\; j=\overline{1,n};\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\; i=\overline{1,m};\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j\end{array}\right\} \quad (1)$$

Оценки вычислительной сложности их решения полиномиальны и зависят от реализации. Например, лучшие из них имеют вид от $O(n^2 m\log n+n^2\log^2 n)$ до $O(nm^2\log^2 n)$ [1,2]. Отсюда следует, что для независимых транспортных задач проблему выбора метода решения можно считать исчерпанной. Однако для последовательно порождаемых подзадач в задачах комбинаторного типа или в случае интерактивной работы над транспортными проблемами, когда требуется оперативность формирования оценки решения, практический интерес представляет любой путь снижения даже полиномиальной вычислительной сложности.

II. Постановка задачи

Предмет рассмотрения – алгоритм реоптимизации решения задачи (1) , когда учитывается информация об оптимальном решении в предшествующей задаче. Предлагается построить такой алгоритм путем модификации алгоритма метода потенциалов [2], сокращая путь до цели в пространстве состояний рекуррентного процесса поиска оптимума в задаче (1).

III. Схема итератора

Метод потенциалов основан на переходе от задачи (1) к двойственной задаче

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j v_j\;\middle|\;\begin{array}{l}c_{ij}-u_i-v_j\ge 0,\\ i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n}\end{array}\right\}. \quad (2)$$

Здесь потенциалы строк $(u_i,\ i=\overline{1,m})$ и столбцов $(v_j,\ j=\overline{1,n})$ соответствуют формальной записи [1] двойственной задачи для задачи (1), но для удобства реализации алгоритма будем использовать вариант записи с инверсией знака потенциалов строк.

Для элементов любого допустимого плана перевозок $P=\{(i,j)\,|\,(x_{ij}>0),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$ на всех этапах процедуры метода потенциалов должны выполняться необходимые условия оптимальности

$$P^k=\left\{\begin{array}{l}(i,j)\,|\,(v_j^k-u_i^k=c_{ij})\wedge(x_{ij}^k>0),\\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\end{array}\right\},$$

$$\left|P^k\right|=m+n-1. \quad (3)$$

Здесь и далее верхний индекс соответствует номеру этапа поиска решения, когда изменяются потенциалы строк и столбцов, а также элементы матрицы корреспонденций.

Для элементов с нулевыми корреспонденциями, не входящими в план перевозок, должно выполняться достаточное условие оптимальности

$$\overline{P^k}=\left\{\begin{array}{l}(i,j)\,|\,(v_j^k-u_i^k\le c_{ij})\wedge(x_{ij}^k=0),\\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\end{array}\right\},$$

$$\left|\overline{P^k}\right|=mn-m-n+1. \quad (4)$$

Процесс поиска оптимального плана строится на решении системы $m+n-1$ уравнений относительно $m+n$ неизвестных потенциалов строк и столбцов

$$\left\{v_j^k-u_i^k=c_{ij},\,(i,j)\in P^k\right. . \quad (5)$$

Такая система может быть решена фиксацией одного из потенциалов, например, $v_l^k=0,\ l\in\overline{1,n}$ или $u_l^k=0,\ l\in\overline{1,m}$.

Сохраняя значения потенциалов от задачи к задаче, в [1] построена разностная схема алгоритма реоптимизации транспортных задач (1).

Так как необходимое условие оптимальности, по определению (3), задано императивно и не зависит от значений матрицы стоимостей, то при переходе к новому варианту транспортной задачи из итераций поиска оптимума можно исключить этап формирования базисного плана.

Реоптимизация транспортной задачи реализуется путем использования старого решения в качестве базисного плана. Условие баланса (6) не нарушено, изменены лишь некоторые элементы матрицы стоимостей. Отсюда следует, что итерации алгоритма метода потенциалов и предлагаемую раскраску меток можно продолжить, начиная с этапа решения (5).

Алгоритм пересмотра результата решения задачи (1) методом потенциалов включает следующие шаги.

Шаг 1. Определение потенциалов, решая (5) для множества P^k (номер k не обнулен).

Шаг 2. Проверка достаточных условий оптимальности (4). Если условия (3) и (4) выполнены, то выход из цикла – решение найдено.

Шаг 3. Перестройка плана $P^k \to P^{k+1}$, $k \leftarrow k+1$ и возврат к шагу 1.

Различие между алгоритмами оптимизации и реоптимизации – в глубине истории работы с данными транспортных задач. Реоптимизация может использовать информацию о состоянии процесса решения нескольких последовательно решаемых задач.

IV. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ

Учитывая связь процесса коррекции плана со структурой системы (5), предлагается расширить такую схему на случай задач с ограничениями на пропускную способность, когда $x_{ij} \le d_{ij}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$ Для этого необходимо лишь уточнить правило пересчета плана перевозок, ограничивая значения корреспонденций $x_{ij}^k = \min(x_{ij}^{k-1}, d_{ij}^k),\ (i,j) \in P^k$.

Таким образом, реоптимизация транспортных задач с ограничением на пропускную способность не требует полного пересчета, если наследовать значения потенциалов предыдущего расчета и продолжить анализ необходимых условий оптимальности.

Слабое место метода потенциалов – опасность зацикливания алгоритма, что возможно в случае, когда $\left|P^k\right| < m+n-1, \quad k \ge 0$ [1,2]. Задача становится вырожденной, причем это может случиться на любом этапе, что особенно нежелательно для случая реоптимизации.

В случае произвольных значений матриц стоимостей даже в базисный план могут включаться и некоторые элементы с нулевыми корреспонденциями. Например, оптимальное решение задачи о назначении, как частного случая транспортной задачи с единичными объемами поставки и потребления, содержит всего $\min(m,n)$ ненулевых значений корреспонденций.

Предвосхищение опасности зацикливания обычно реализуется переходом к обобщенной транспортной задаче, когда текущий план возмущается на бесконечно малую величину ε [2]. Если T – произвольная транспортная задача вида (1), то в ее обобщенном варианте $T(\varepsilon)$ объемы производства будут $a_i(\varepsilon) = a_i + \varepsilon,\ i = \overline{1,m}$, а потребления – $b_j(\varepsilon) = b_j + m\varepsilon(j = n),\ j = \overline{1,n}.$

Известно, что при малом значении ε, $\varepsilon > 0$, $T(\varepsilon)$ – невырожденная транспортная задача [2]. Отсюда следует, что свободный от зацикливания алгоритм должен решать задачу $T(\varepsilon)$.

Однако можно заметить, что значения объемов производства и потребления используются лишь на начальном этапе алгоритма метода потенциалов, который в нашем случае исключен. Тем не менее, после формирования исходного множества P^0 представление $T(\varepsilon)$ остается в матрице корреспонденций, а точнее, в ее элементах, представленных во множестве P^k:

$$x_{ij}(\varepsilon) = x_{ij} + \delta, (i,j) \in P^k,$$

$$\delta < 2^{]\log_2 \lambda[}, \quad \lambda = \max\left\{a_i,\ i = \overline{1,m},\ b_j,\ j = \overline{1,n}\right\},\ k \ge 0.$$

Легко заметить, что такое преобразование не меняет структуру оптимального решения задач (1). На промежуточных шагах преобразования множества объемов перевозки изменяются на различающиеся целочисленные величины, которые предлагается назначать в виде

$$x_{ij}^{k+1}(\varepsilon) = x_{ij}^k(\varepsilon) + \sum (x_{ij}^k(\varepsilon) = 0), (i,j) \in P^k. \qquad (12)$$

Смысл последнего выражения – нулевые корреспонденции последовательно заменяются их порядковым номером, начиная с единицы. При переходе к очередной итерации нулевой элемент будет в одном экземпляре, что исключает образование цикла. После отыскания оптимума окончательный результат определяется преобразованием

$$x_{ij}^{k+1}(\varepsilon) = x_{ij}^k(\varepsilon) - x_{ij}^k(\varepsilon) \bmod \delta, (i,j) \in P^k.$$

Очевидно, что такое преобразование можно выполнить и на промежуточных этапах решения, так как изменения корреспонденций в соответствии с (12) компенсируют потерю данных о возмущениях текущего плана.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод потенциалов использует компактную структуру данных представления пространства поиска решения при наличии допустимого решения. Кроме эффекта распределения накладных расходов на общие операции между задачами, малые изменения исходных данных часто существенно не изменяют уже найденное решение. Это объясняет сокращение среднего времени решения отдельных задач.

[1] Ревотюк, М.П. Реоптимизация решения транспортных задач Хичкока методом потенциалов/М.П.Ревотюк, П.М.Батура, А.М. Полоневич. – Доклады БГУИР, № 7(53), 2010. – С. 89-96.

[2] Brenner U. A faster polynomial algorithm for the unbalanced Hitchcock transportation problem//Operations Research Letters, vol. 36(4), 2008. – pp. 408-413.

[3] *Gass Saul I.* On Solving the Transportation Problem//The Journal of the Operational Research Society, vol. 41, No. 4 (Apr., 1990). – pp. 291-297.