

УДК 681.511.4

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ УСТРОЙСТВ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В.Н. ПРИГАРА, А.А. ДЕРЮШЕВ, И.Л. СВИТО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 14 сентября 2009

Дана классификация устройств фазовой синхронизации с переключаемой передаточной функцией в зависимости от устойчивости процессов в отсутствие переключения. Разработаны машинно-ориентированные алгоритмы анализа устойчивости устройств различного вида. Предложены методы обеспечения устойчивости.

*Ключевые слова:* устойчивость, импульсные устройства фазовой синхронизации, переключаемая передаточная функция, машинно-ориентированные методы.

### Введение

Импульсные устройства фазовой синхронизации (ИУФС) получают все более широкое распространение в системах автоматики, радио- и проводной связи, телевидения, радиолокации, энергетических и производственных системах. Дальнейшее развитие ИУФС связано с улучшением их качественных характеристик при расширении рабочего диапазона частот и повышении быстродействия. В традиционных устройствах фазовой синхронизации улучшение качественных характеристик в установившемся режиме ведет к ухудшению быстродействия, что вынуждает значительно усложнять структуру устройства [1]. Для преодоления указанного противоречия целесообразно использовать устройства с переключаемой передаточной функцией [2, 3], однако для их широкого применения необходимо разработать машинно-ориентированные методики проектирования, учитывающие как особенности данного класса устройств, что обеспечит достоверность получаемых результатов моделирования, так и позволяющие сократить затраты машинного времени [4, 5].

В данной работе предложена методика анализа устойчивости ИУФС с переключаемой передаточной функцией (ИУФСП).

### Классификация ИУФСП с зависимости от устойчивости устройства в отсутствие переключения

При анализе устойчивости все множество ИУФСП можно разделить на три вида в зависимости от устойчивости устройства в отсутствие переключения:

- устройства, асимптотически устойчивые при любой передаточной функции;
- устройства, асимптотически устойчивые хотя бы при передаточной функции;
- устройства, асимптотически неустойчивые при всех передаточных функциях.

Как правило, при разработке ИУФСП стремятся получить устройство первого вида, что обеспечивает наиболее широкий выбор алгоритма переключения и наименее жесткие требования к переключающему устройству. Необходимость разработки устройств второго и третьего видов возникает при разработке ИУФС с жестко заданным объектом управления при ограничениях на структуру и параметры устройства.

Таким образом, считаем целесообразным анализ устойчивости ИУФСП провести в два этапа.

1. Анализ устойчивости устройства без учета действия алгоритма переключения.
2. Анализ устойчивости с учетом действия алгоритма переключения.

При анализе устройств с переключаемой структурой при реализации первого этапа необходимо провести анализ устойчивости устройства со всеми структурами из заданного набора; при анализе устройств с переключаемыми параметрами достаточно провести однократный анализ в области переключаемых параметров.

### Анализ устойчивости ИУФСП

Рассмотрим анализ устойчивости ИУФСП первого вида. Выполнение расчетов для реализации первого этапа анализа устойчивости проведем по линеаризованным моделям; на втором этапе проведем расчет с помощью цифрового моделирования по нелинейным моделям.

Для получения линеаризованной модели ИУФСП запишем уравнение динамики в виде

$$X(t_{n+1}) = F_1(X_n, U_n), \quad (1)$$

где  $U_n$  — вектор входных координат.

Учтем, что устойчивость (1) в соответствии с [6] определяется тривиальным решением:

$$X(t_{n+1}) = F_1(X_n, 0) = F(X_n). \quad (2)$$

Разложим (2) в окрестностях точки установившегося режима  $X^*, \tau^*$  в ряд Тейлора, отбросив члены выше первого порядка малости. В результате выражение для отклонений от установившегося режима примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{1n+1} \\ \Delta X_{2n+1} \\ \vdots \\ \Delta X_{Mn+1} \\ \Delta \tau_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1,M+1} \\ q_{21} & \vdots & \vdots & \cdots & q_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{M,1} & \vdots & \vdots & \cdots & q_{M,M+1} \\ q_{M+1,1} & q_{M+1,2} & q_{M+1,3} & \cdots & q_{M+1,M+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_{1n} \\ \Delta X_{2n} \\ \vdots \\ \Delta X_{Mn} \\ \Delta \tau_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\Delta X_{in} = X_{in} - X_{in}^*$ ,  $\Delta \tau_n = \tau_n - \tau_n^*$ ,

а элементы матрицы динамики  $Q$  определяются по формулам

$$q_{ij} = \left. \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \right|_{X^*, \tau^*}, \quad i, j = \overline{1, M+1}. \quad (4)$$

Для анализа устойчивости в малом необходимо составить и решить характеристическое уравнение

$$\det[Q - \lambda E] = 0. \quad (5)$$

При значениях  $\lambda$ , не превышающих по модулю единицы, устройство с данной структурой либо набором параметров будет устойчиво; при значениях корней, строго меньших единицы, устройство будет устойчиво асимптотически.

Рассмотрим устройство слежения за частотой входного сигнала с триггерным фазовым детектором и переключаемой постоянной времени знаменателя передаточной функции с параметрами:

- коэффициент деления в цепи ОС  $N=170$ ,
- частота сравнения ИФД  $f_0=1$  кГц,
- неуправляемая составляющая частоты ГУН  $G=100$  кГц,
- амплитуда напряжения на выходе детектора  $U_{\delta_m} = 10$  В,

– в качестве фильтрующе-корректирующего звена (ФКЗ) используется звено с передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{1 + pT_1}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}, \quad (6)$$

при этом  $T_1=7 \cdot 10^{-5}$  с,  $T_2=2 \cdot 10^{-4}$  с, постоянная времени  $T_3$  переключается.

В данном случае матрица  $Q$  будет иметь размерность  $[3 \times 3]$ , а ее коэффициенты соответственно равны:

$$q_{11} = \exp\left(-\frac{T^*}{T_2}\right), \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = \frac{T_1 - T_2}{T_2(T_2 - T_3)} U_{\text{ом}} \sum_{i=2}^3 \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_i}\right),$$

$$q_{21} = 0, \quad q_{22} = \exp\left(-\frac{T^*}{T_3}\right), \quad q_{23} = \frac{T_1 - T_3}{T_3(T_3 - T_2)} U_{\text{ом}} \sum_{i=2}^3 \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_i}\right),$$

$$q_{31} = \frac{T_2 \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_2}\right) \left[ \exp\left(-\frac{T^*}{T_2}\right) + \exp\left(-\frac{2\tau^*}{T_2}\right) - 2 \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_2}\right) \right]}{\left[ \left( X_1^* + \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_3} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_2}\right) + \left( X_2^* + \frac{T_3 - T_1}{T_3 - T_2} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_3}\right) - U_{\text{ом}} \right] + \frac{G}{K_{\text{зун}}}},$$

$$q_{32} = \frac{T_3 \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_3}\right) \left[ \exp\left(-\frac{T^*}{T_3}\right) + \exp\left(-\frac{2\tau^*}{T_3}\right) - 2 \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_3}\right) \right]}{\left[ \left( X_1^* + \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_3} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_2}\right) + \left( X_2^* + \frac{T_3 - T_1}{T_3 - T_2} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_3}\right) - U_{\text{ом}} \right] + \frac{G}{K_{\text{зун}}}},$$

$$q_{33} = \frac{\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \left[ \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_2}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_2}\right) + \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} \left[ \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_3}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{T^* - \tau^*}{T_3}\right)}{\left[ \left( X_1^* + \frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_3} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_2}\right) + \left( X_2^* + \frac{T_3 - T_1}{T_3 - T_2} U_{\text{ом}} \right) \exp\left(-\frac{\tau^*}{T_3}\right) - U_{\text{ом}} \right] + \frac{G}{K_{\text{зун}}}} U_{\text{ом}}.$$

На рис. 1 приведена рассчитанная в соответствии с (5) область устойчивости данного устройства. Из данного графика видно, что при выборе  $K_{\text{зун}}=12$  кГц/В и  $T_{2_1}=0,01$  с,  $T_{2_2}=0,19$  с устройство будет устойчиво при двух наборах параметров.

На втором этапе производится анализ устойчивости в большом; для устройств первого вида этот этап состоит в расчете полос удержания и захвата устройства со всеми передаточными функциями.

При этом полоса захвата устройства со структурой, включаемой при получении сигнала на изменение выходной частоты, будет являться полосой захвата устройства в целом; полосы захвата устройства с другими структурами служат для определения условий переключения.

На этом этапе расчет производится методом цифрового моделирования по нелинейным моделям. Такой выбор метода расчета связан с тем, что аналитические методы позволяют определить полосы удержания и захвата с ФКЗ не выше первого порядка, и даже при этом приходится вводить упрощающие предположения [7]. Цифровое моделирование позволяет рассчитывать характеристики устройств любого порядка, при этом могут использоваться как имитационные, так и специализированные модели на основе метода переменных состояния. При любой выбранной нелинейной модели определение полосы захвата для каждой структуры производится путем многократного моделирования переходных процессов при изменяющейся начальной частотной расстройке и фазовом рассогласовании, равном максимальному фазовому рассогласованию, возникающему при переключении с предыдущей структуры; при расчете на

наихудший случай фазовое рассогласование принимается равным максимальному рассогласованию из всех, которые могут возникнуть в данном устройстве. Определение полосы захвата целесообразно проводить относительно полосы удержания, которая при медленном изменении сигнала может быть рассчитана с помощью следующих соотношений:

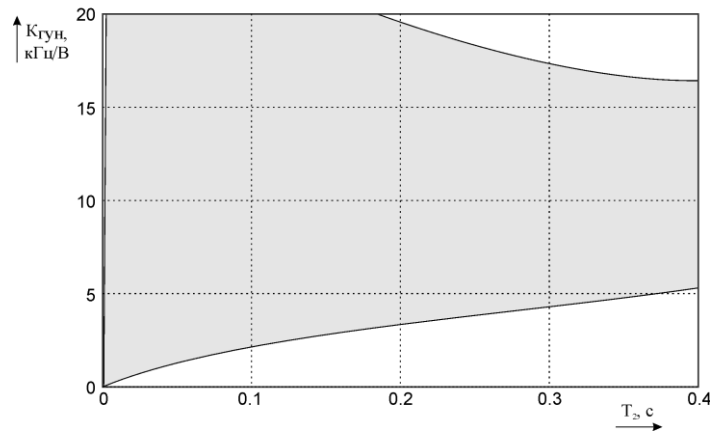


Рис. 1. Область устойчивости устройства

– для следящих устройств с триггерным детектором:

$$f_{\min} = \frac{G}{2\pi N},$$

$$f_{\max} = \frac{G + K_{oy} U_{\partial_m}}{2\pi N};$$

– для следящих устройств с детектором "выборка-запоминание"

$$f_{\min} = \frac{G}{2\pi N},$$

$$f_{\max} = \frac{TK_{oy}K_s + G}{2\pi N};$$

– для следящих устройств с накачкой заряда

$$f_{\min} = \frac{G - K_{oy} U_{\partial_m}}{2\pi N},$$

$$f_{\max} = \frac{G + K_{oy} U_{\partial_m}}{2\pi N}.$$

Для устройств стабилизации полоса удержания определяется по следующим формулам:

– для устройств с триггерным детектором

$$N_{\min} = \left[ \frac{GT}{2\pi} \right] + \gamma \left( \frac{GT}{2\pi} \right),$$

$$N_{\max} = \left[ \frac{T(G + K_{oy} U_{\partial_m})}{2\pi} \right];$$

– для устройств с детектором "выборка-запоминание"

$$N_{\min} = \left[ \frac{GT}{2\pi} \right] + \gamma \left( \frac{GT}{2\pi} \right),$$

$$N_{\max} = \left[ \frac{T(G + K_{oy} K_g T)}{2\pi} \right];$$

– для устройств с накачкой заряда

$$N_{\min} = \left[ \frac{(G - K_{oy} U_{\partial_m}) T}{2\pi} \right] + \gamma \left( \frac{(G - K_{oy} U_{\partial_m}) T}{2\pi} \right),$$

$$N_{\max} = \left[ \frac{(G + K_{oy} U_{\partial_m}) T}{2\pi} \right],$$

где  $\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \{x\} \neq 0; \\ 0, & \{x\} = 0. \end{cases}$

При расчете полосы захвата методом цифрового моделирования большое значение имеет алгоритм определения сходимости переходного процесса, который должен учитывать возможность возникновения как однопериодного, так и многопериодного захватов, при этом обеспечивая минимальное время моделирования. Авторами предлагается следующий алгоритм:

1. Определение максимального времени моделирования  $t_{\max} = 3T_{\max}$ , где  $T_{\max}$  — максимальная постоянная времени из постоянных времени знаменателей передаточных функций всех блоков ИУФС.

2. Если производится переход с меньшей частоты  $f_{31}$  на большую  $f_{32}$ , то при дальнейших вычислениях используются приведенные ниже формулы; при  $f_{32} < f_{31}$  используются альтернативные формулы, приведенные в скобках рядом с основными.

3. Определение среднего за период частоты сравнения импульсно-фазового детектора (ИФД) значения выходной частоты  $f_n$  в момент времени  $t_n$ ,  $0 \leq t_n \leq t_{\max}$ .

4. Определяем первый момент времени  $t_k$ , в который  $f_k \geq f_{32}(1-\varepsilon)$  (либо  $f_k \leq f_{32}(1+\varepsilon)$ ), где  $\varepsilon$  — заданное допустимое отклонение частоты от установившегося значения. Если такого значения  $t_k$  за время моделирования  $t_{\max}$  не найдено, то процесс не сходится. Переход к п. 9.

5. Определяем локальные максимумы (минимумы) выходной частоты  $f_{i-1}$ ,  $f_{i+1}$ , а также локальный минимум (максимум)  $f_i$ .

6. Если выполняется условие  $f_{32}(1-\varepsilon) \leq f_{i-1}$ ,  $f_i$ ,  $f_{i+1} \leq f_{32}(1+\varepsilon)$ , то переходный процесс сходится. Переход к п. 9.

7. Определяем значения  $f_j$ ,  $f_{j+1}$  по формулам:  $f_j = 0,5(f_{i-1} + f_i)$ ,  $f_{j+1} = 0,5(f_i + f_{i+1})$ .

8. Если  $f_{j+1} = f_j$  и при этом  $f_i \leq f_{32}$ ,  $f_{i+1} \geq f_{32}$  (либо  $f_i \geq f_{32}$ ,  $f_{i+1} \leq f_{32}$ ) то при:

а)  $f_{i+1} < f_{i-1}$  (либо  $f_{i+1} > f_{i-1}$ ) переходный процесс сходится.

б)  $f_{i+1} = f_{i-1}$  в устройстве наблюдаются незатухающие колебания.

9. Конец.

Для обеспечения устойчивой работы устройства переключение должно осуществляться в моменты времени, в которые устройство находится в пределах полосы захвата устройства с  $l$ -й структурой, на которую производится переключение, т.е. выходная частота в эти моменты времени принимает значения в пределах:

$$f_{\min_l} N \leq f \leq f_{\max_l} N.$$

Рассмотрим возможные пути организации такого переключения. Проекция фазовых портретов устройства первого вида представляют собой набор траекторий, стягивающихся к особым точкам типа устойчивый узел либо устойчивый фокус. При этом возможны два варианта:

а) координаты особых точек для различных передаточных функций равны;

б) координаты особых точек различны.

В обоих случаях необходимо осуществлять переключение в пределах области пересечения проекций фазовых траекторий для двух структур либо наборов параметров.

Анализ устойчивости ИУФСП второго и третьего видов также проводится в два этапа. Расчеты первого этапа проводятся аналогично соответствующим расчетам для ИУФС первого вида. На втором этапе с помощью цифрового моделирования проводится построение фазовых портретов для различных структур и их объединение с помощью алгоритма переключения.

Обеспечение устойчивости устройства второго вида может быть выполнено двумя способами:

- путем переключения с неустойчивой структуры на устойчивую в общей области проекций фазовых траекторий на плоскость;
- путем переключений между неустойчивыми структурами.

Отметим, что второй способ на практике редко применяется в устройствах второго вида, однако является единственно возможным в устройствах третьего вида.

Рассмотрим вопрос устойчивости ИУФСП третьего вида, которые в отсутствие переключения асимптотически неустойчивы при любой структуре либо наборе параметров. Для обеспечения устойчивости данных устройств необходимо производить многократные переключения так, чтобы обеспечить движение изображающей точки в желаемом направлении.

В зависимости от направления проекций фазовых траекторий по разные стороны линии переключения можно выделить два случая:

- с одной стороны линии переключения проекции фазовых траекторий направлены к этой линии, с другой стороны — от линии переключения;
- все проекции фазовых траекторий направлены к линии переключения.

Рис. 2,а иллюстрирует первый случай, рис. 2,б — второй.

Планарные фазовые портреты в первом случае будут называть сонаправленными; планарные фазовые портреты во втором случае — противоположно-направленными.

На рис. 2,а изображен случай, когда планарные фазовые портреты устройства при активизации любой из двух структур являются неустойчивыми фокусами. Мы видим, что движение изображающей точки происходит не по линиям переключения 1–3 и 2–4, а по отрезкам проекций фазовых траекторий, соответствующих планарным фазовым портретам устройства при выборе той или иной структуры. При работе переключающего устройства в соответствии с алгоритмом переключения движение происходит по траектории 1–2–3–4–5–6–7–8– и т.д. Однако при задержке переключения относительно требуемого момента может происходить удаление от требуемой точки. Допустим, что в результате действия внешних факторов уменьшилось быстродействие логического устройства, управляющего ключевым элементом, в результате чего переключение произошло не в точке 9, а в точке А. Аналогичным образом точка 6 перешла в точку В и т.д. Отметим, что изменение параметров переключающего устройства и ИУФСП в целом происходит как под действием внешних факторов, так и в процессе старения; при изменении параметров ИУФСП происходят изменения фазовых портретов, что требует коррекции алгоритма переключения. Из изложенного можно сделать вывод, что применение для обеспечения устойчивости ИУФСП структур либо наборов параметров, которым соответствуют сонаправленные планарные фазовые портреты, является не лучшим способом обеспечения устойчивости. На рис. 2,б приведен пример обеспечения устойчивости путем применения структур, которым соответствуют противоположно направленные проекции фазовых траекторий; при этом особая точка планарного фазового портрета устройства с первой структурой представляет собой неустойчивый фокус, особая точка планарного фазового портрета устройства со второй структурой — седло. При поступлении сигнала на изменение выходной частоты происходит переключение на первую структуру, затем переключения происходят на линии переключения АВ. При использовании идеального (работающего с бесконечной частотой) устройства переключения изображающая точка будет двигаться по линии переключения. В этом случае можно говорить о скользящем режиме работы ИУФСП [8]. Данный режим обладает малой чувствительностью к параметрам устройства, минимальной длительностью переходного процесса и другими полезными свойствами. Происхождение преимуществ скользящего режима легко объяснимо: бесконечная частота переключений эквивалентна бесконечному коэффициенту усиления. На рис. 3 изображены проекции фазовых траекторий устройства с конечным временем коммутации  $t_k$ .

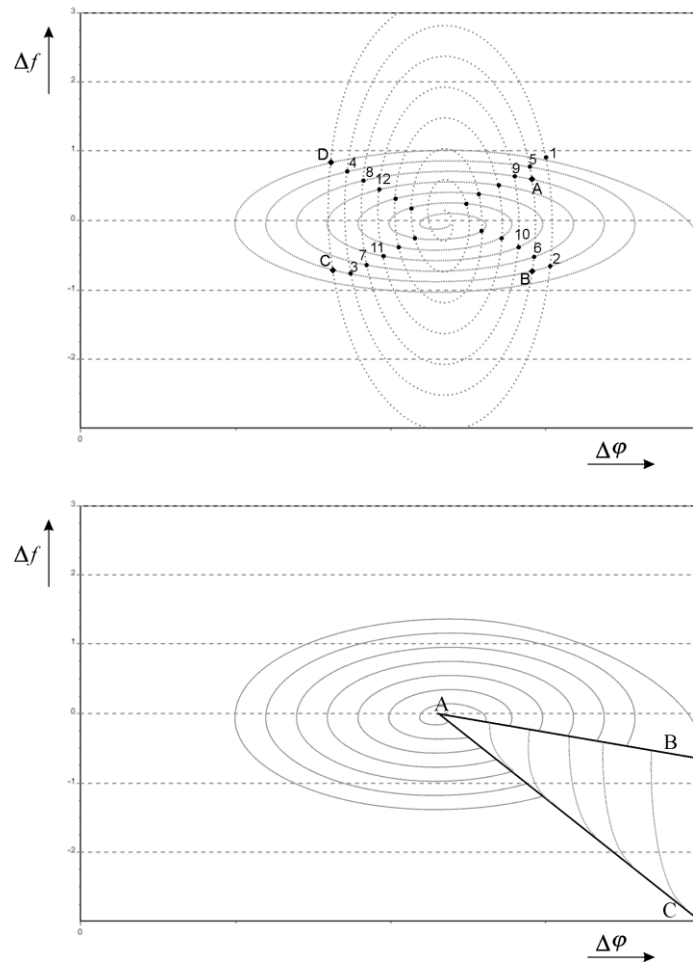


Рис. 2. Проекции фазовых траекторий ИУФСП третьего вида

Мы видим, что при данных условиях прямая переключения  $AB$  переходит в конус переключения  $B_2AB_1$ , при этом угол при вершине конуса прямо пропорционален времени срабатывания переключающего устройства и обратно пропорционален наибольшей постоянной времени знаменателя передаточной функции импульсного устройства фазовой синхронизации. Для обеспечения устойчивости устройства необходимо, чтобы прямая  $AB_2$  лежала выше сепаратрисы седла  $AC$ , при этом чем ближе будет находиться линия переключения к прямой  $AC$ , тем меньшей будет длительность переходного процесса.

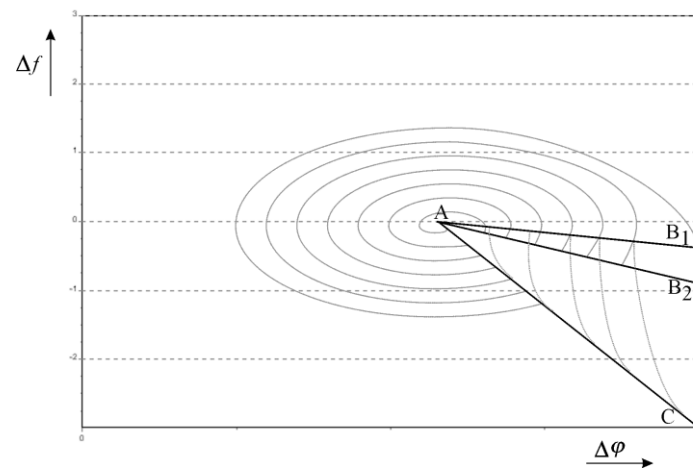


Рис. 3. Проекция фазовых траекторий ИУФСП с конечным временем коммутации

## Заклучение

Предложена классификация ИУФСП в зависимости от устойчивости устройства в "малом" в отсутствие переключения, позволяющая унифицировать процесс анализа устойчивости ИУФСП. Для определения областей устойчивости устройства в "малом" и в "большом" разработан эффективный в вычислительном плане двухэтапный алгоритм исследования устойчивости. Для определения сходимости переходного процесса создан алгоритм, позволяющий учесть возможность возникновения как однопериодного, так и многопериодного захватов. Проведен сравнительный анализ обеспечения устойчивости импульсного устройства фазовой синхронизации третьего вида с помощью набора структур с сонаправленными и противоположно направленными планарными фазовыми портретами при учете конечного быстрогодействия коммутирующего устройства, в результате которого сделан вывод о предпочтительности использования на практике ИУФСП, у которых планарные фазовые портреты для различных структур либо наборов параметров являются противоположно направленными.

## STABILITY ANALYSIS OF PULSE PLL WITH SWITCHED TRANSFER FUNCTION

V.N. PRIGARA, A.A. DERYUSHEV, I.L. SVITO

### Abstract

Classification of PLL with switched transfer function is given depending on stability of processes in absence of switching. The machine-oriented analysis algorithms of stability of devices of a various kind are developed. Methods of maintenance of stability are offered

### Литература

1. Батура М.П., Кузнецов А.П., Шилин Л.Ю. Анализ и параметрический синтез импульсных систем с фазовым управлением. Минск, 1993.
2. Stursberg O., Panek S. Control of switched hybrid systems based on disjunctive formulations. HSCC, 2002.
3. Бухалев В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М., 1996.
4. Xu X. Analysis and design of switched systems: Ph. D. dissertation, Notre Dame, 2001.
5. Xie G., Wang L. // Systems & Control Letters. 2003. № 48. P. 135–155.
6. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1987.
7. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем, М., 1985.
8. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой, М., 1967.