УДК 519.852

О РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗМЕРА СТАНДАРТНЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

В.С. МУХА, А.М. МАРКУШЕВСКИЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь

Поступила в редакцию 25 апреля 2009

Разработаны теоретические положения и алгоритм, позволяющие автоматизировать решение транспортной задачи произвольного размера стандартным симплекс-методом. Алгоритм реализован в виде стандартной программы.

Ключевые слова: транспортная задача, симплекс-метод, линейное программирование, многомерные матрицы.

Введение

Среди оптимизационных задач имеются такие, которые по существу являются задачами линейного программирования, но по форме от них отличаются. Такие задачи можно назвать нестандартными задачами линейного программирования. К ним относятся, например, задача об оптимальном использовании оборудования [1], транспортная задача, задача о назначениях, некоторые другие [2]. Эти задачи могут быть решены стандартным симплекс-методом с применением широко распространенных его программных реализаций. Однако для этого необходимо предварительно привести нестандартную задачу к виду стандартной задачи линейного программирования, а для интерпретации полученного оптимального решения выполнить обратный переход. При большом числе переменных вручную это практически невыполнимо. В данной статье предлагается общий метод и алгоритм приведения нестандартной задачи линейного программирования к стандартному виду с целью автоматизации ее решения стандартной программой симплекс-метода.

Стандартная задача линейного программирования

Стандартная (основная, классическая) задача линейного программирования [3] состоит в решении оптимизационной задачи

$$f = a^T x \to \min_x \qquad (1)$$

при наличии ограничений одного из следующих видов:

$$A_{eq} x = b_{eq}, \qquad (2)$$

$$A_{ge} x \ge b_{ge}, \qquad (3)$$

$$A_{le} x \le b_{le}, \qquad (4)$$

$$x \geq 0\,, \tag{5}$$

где a, x, b_{eq}, b_{ge}, b_{le} — векторы; A_{eq}, A_{ge}, A_{le} — обычные (двухмерные) матрицы, а выражение (5) означает неотрицательность компонент вектора x. Каждое ограничение вида (2)–(4) может быть преобразовано к другому виду из указанного множества.

Эта задача решается известным симплекс-методом, который реализован в виде многочисленных компьютерных программ. Одной из них является программа linprog системы автоматизации математических расчетов Matlab [4]. Эта программа позволяет использовать ограничения вида (2), (4), (5).

Транспортная задача

Транспортная задача относится к нестандартным задачам линейного программирования. Она формулируется следующим образом [2]. Имеется m поставщиков некоторой продукции (m складов с продукцией) и n потребителей этой продукции. Требуется минимизировать общие затраты на перевозки

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} u_{i,j} \to \min_{u_{i,j}} \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i,j} = b_j\,,\ \ j = \overline{1,n}\,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} = s_i\,,\ i = \overline{1,m}\,, \tag{8}$$

$$u_{i,j} \geq 0\,, \tag{9}$$

где $u_{i,j}$ — количество груза, перевозимого из пункта отправления i в пункт назначения j; $c_{i,j}$ — затраты на перевозку единицы груза из пункта отправления i в пункт назначения j; b_j — спрос (требуемое количество груза) j-го потребителя; s_i — количество груза, имеющееся для вывоза у i-го поставщика.

Обычно рассматривается сбалансированная транспортная задача, когда общие поставки равны общему спросу. В этом случае исходные данные к задаче должны удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ .$$

Приведенная задача является задачей линейного программирования и может быть решена симплекс-методом. Для нее разработан также специальный метод решения, учитывающий специфику задачи, который называется методом потенциалов. Этот метод обладает меньшей вычислительной сложностью по сравнению с симплекс-методом. Вместе с тем широкое распространение программ, реализующих симплекс-метод, делает их привлекательными для решения нестандартных задач. Большие вычислительные мощности современной компьютерной техники и удобства использования симплекс-метода компенсируют проигрыш в случае отказа от использования специальных методов.

Для решения нестандартной задачи симплекс-методом необходимо постановку задачи привести к стандартному для задачи линейного программирования виду. Это можно сделать вручную. Однако при больших значениях m и n такое приведение может стать практически невыполнимым. К тому же при изменении значений m или n эту процедуру придется повторять заново. Возникает необходимость в автоматизированном приведения выражений (6)–(9) к виду (1)–(5). В данной статье дается решение этой задачи.

При приведении задачи к стандартному виду следует учитывать то, какие ограничения допустимы в используемой для расчетов программе. Например, упомянутая выше программа linprog позволяет учитывать лишь одно ограничение-равенство вида (2). В этом случае два ограничения-равенства (7), (8) транспортной задачи следует объединить в одно ограничение-равенство вида (2).

Формулировка транспортной задачи в терминах многомерных матриц

Для получения алгоритма приведения транспортной задачи к стандартной форме сформулируем ее в многомерно-матричной форме. Для этого рассмотрим матрицы

$$\alpha = (\alpha_{i,j}),\ u = (u_{i,j}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Тогда целевую функцию (6) можно записать в виде

$$^{0,2}(\alpha u) \to \min_{u}. \qquad (10)$$

Здесь и далее используются понятия и обозначения теории многомерных матриц [5]. В частности, $^{0,2}(\alpha u)$ означает (0, 2)-свернутое произведение матриц α и u.

Для многомерно-матричной записи ограничения (7) сформируем трехмерную матрицу

$$c = (c_{k,i,j}),\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

элементы которой определяются формулой

$$c_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \qquad (11)$$

и вектор

$$b = (b_j),\ j = \overline{1,n}.$$

В этих обозначениях ограничение (7) запишется в виде

$$^{0,2}(cu) = b. \qquad (12)$$

Для многомерно-матричной записи ограничения (8) сформируем трехмерную матрицу

$$d = (d_{k,i,j}),\ k = \overline{1,m},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

элементы которой определяются формулой

$$d_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \qquad (13)$$

и вектор

$$s = (s_i),\ i = \overline{1,m}.$$

Тогда условие (8) будет иметь вид

$$^{0,2}(d\,u) = s. \qquad (14)$$

Формулировка транспортной задачи в терминах ассоциированных матриц

Запишем выражения (10), (12), (14) в виде, отражающем структуру участвующих в умножении матриц [5]. Мы получим следующие выражения:

$$f = {}^{0,2}(\alpha_{(0,0,2)} u_{(2,0,0)}) \to \min_{u_{(2,0,0)}}, \qquad (15)$$

$$^{0,2}(c_{(1,0,2)}u_{(2,0,0)}) = b\,, \tag{16}$$

$$^{0,2}(d_{(1,0,2)}\,u_{(2,0,0)}) = s\,. \tag{17}$$

Вводя матрицы, ассоциированные с матрицами в левых частях выражений (15)–(17), и используя теорему об ассоциированных матрицах [5], мы получим следующую задачу линейного программирования в стандартной (классической) постановке:

$$^{0,1}(\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) \to \min_{\tilde{u}_{(2,0,0)}}\,, \tag{18}$$

$$^{0,1}(\tilde{c}_{(1,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) = b\,, \tag{19}$$

$$^{0,1}(\tilde{d}_{(1,0,2)}\,\tilde{u}_{(2,0,0)}) = s\,. \tag{20}$$

Здесь символом ~ обозначены ассоциированные матрицы. Необходимо также объединить ограничения (19), (20) в одно ограничение. Для этого построим матрицу $\tilde{c}_d$ и вектор b_s по формулам

$$\tilde{c}_d = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{(1,0,2)} \\ \tilde{d}_{(1,0,2)} \end{pmatrix},\; b_s = \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Построение матрицы $\tilde{c}_d$ сводится к объединению матриц $\tilde{c}_{(1,0,2)}$ и $\tilde{d}_{(1,0,2)}$, а построение вектора b_s — к объединению двух векторов b и s. В результате мы получим стандартную задачу линейного программирования в виде

$$^{0,1}(\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) \to \min_{\tilde{u}_{(2,0,0)}}\,, \tag{22}$$

$$^{0,1}(\tilde{c}_{d(1,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) = b_s\,. \tag{23}$$

Поскольку в программе linprog системы Matlab обязательно ограничение вида (4), то сформируем его искусственно на основе ограничения (9). В результате получим ограничение вида

$$^{0,1}(-I\,\tilde{u}_{(2,0,0)}) \le O\,, \tag{24}$$

где I — единичная матрица размером $mn\times mn$, а O — вектор длины mn с нулевыми компонентами.

Алгоритм приведения транспортной задачи к стандартной форме

Приведенные в предыдущих разделах результаты приводят к следующему алгоритму решения транспортной задачи симплекс-методом.

1. Формируем исходные данные транспортной задачи (6)–(9) в их естественной форме, т.е. формируем матрицу $\alpha = (\alpha_{i,j})$ и векторы $b = (b_j)$, $s = (s_i)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

2. Формируем матрицу c по формуле (11) и матрицу d по формуле (13).

3. Формируем матрицу $\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}$, $(0,0,2)$-ассоциированную с матрицей α, матрицу $\tilde{c}_{(1,0,2)}$, $(1,0,2)$-ассоциированную с матрицей c, и матрицу $\tilde{d}_{(1,0,2)}$, $(1,0,2)$-ассоциированную с матрицей d [5].

4. Объединяем ограничения (19), (20) в одно ограничение, для чего формируем матрицу $\tilde{c}_d$ и вектор b_s по формулам (21).

5. Формируем ограничение (24), т.е. формируем матрицу ($-I$) (единичную матрицу размером $mn\times mn$ со знаком минус) и нулевой вектор O длины mn.

6. Решаем задачу (22)–(24) стандартным симплекс-методом (находим оптимальное решение $\tilde{u}^*_{(2,0,0)}$ и оптимальное значение f^* целевой функции).

7. Полученное решение переводим в естественную форму, т.е. по полученной ассоциированной матрице $\tilde{u}^*_{(2,0,0)}$ формируем исходную для нее матрицу $u^* = (u^*_{i,j})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Пункты 1–4 данного алгоритма целесообразно оформить в виде стандартной подпрограммы. При этом исходные данные, формируемые в п. 1 алгоритма, будут формальными параметрами (входными параметрами) разрабатываемой подпрограммы, а выходными параметрами разрабатываемой подпрограммы будут матрицы $\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}$, $\tilde{c}_d$ и векторы b_s и O. Эта подпрограмма является автоматическим переводчиком транспортной задачи в форму, пригодную для решения стандартным симплекс-методом с помощью linprog.

Пример

Представленный в предыдущем разделе алгоритм был оформлен в виде подпрограммы и применен для решения транспортной задачи со следующими исходными данными в формулах (6)–(8):

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 15 & 9 \end{pmatrix},\ s = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для решения использовалась функция linprog системы Matlab. В результате получена матрица оптимальных перевозок

$$u^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Минимальные общие затраты на перевозки при этом составляют f^*=100. Данная задача решена в [2] методом потенциалов с такими же результатами, что дополнительно подтверждает правильность предложенного в статье подхода.

ABOUT DECISION OF THE TRANSPORT PROBLEM OF THE FREE SIZE BY MEANS OF STANDARD SIMPLEX-METHOD

V.S. MUKHA, A.M. MARKUSHEVSKIY

Abstract

The theoretical bases and algorithm to automate decision of the transport problem of the free size by means of standard simplex-method is designed. The Algorithm marketed in the manner of standard program.

Литература

1. *Бездудный Ф.Ф.* Математические методы в организации текстильного производства. М., 1970.
2. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. М., 1972. Т. 1.
3. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М., 1984.
4. *Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.* MATLAB 6х: программирование численных методов. СПб, 2004.
5. *Муха В.С.* Анализ многомерных данных. Минск, 2004.