УДК 511.42

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ В *K*-МЕРНЫХ КУБАХ МАЛОЙ МЕРЫ

М. В. Ламчановская
кандидат физико-математических наук
Институт информационных технологий
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Н. В. Шамукова
кандидат физико-математических наук, доцент
Университет гражданской защиты МЧС РБ

Понятие всюду плотного множества является фундаментальным математическим понятием. Множество рациональных чисел является всюду плотным множеством на действительной прямой. В последние 40 лет было доказано свойство всюду плотности множеств действительных и алгебраических чисел в $\mathbb{R}$. *Нетрудно доказать, что множество точек с алгебраическими координатами всюду плотно в любом кубе* $T \subset \mathbb{R}^k$. *Задача значительно усложняется, если рассматривать точки с алгебраическими сопряженными координатами и кубы T малой меры. В данной работе продолжено изучение распределения алгебраических чисел. Доказано несколько теорем об оценках сверху и снизу количества действительных алгебраических чисел в коротких интервалах.*

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Число α называется алгебраическим, если существует полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in Z, 0 \le j \le n, \tag{1}$$

для которого $P(\alpha) = 0$. Если $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$ и $НОД(a_0, \ldots, a_n) = 1$, то он называется минимальным полиномом числа α, а величины $n = \deg P = \deg \alpha$, $H = H(P) = H(\alpha)$ называются степенью и высотой полинома $P(x)$ и числа α соответственно. В этом случае полином $P(x)$ является минимальным полиномом и для остальных корней $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ полинома $P(x)$ такой же степени и высоты, как $\alpha = \alpha_1$.

Рассмотрим некоторый конечный интервал I длины μI. Для упрощения технических деталей будем считать, что $I \subset [0,1)$. Для $Q>1$ рассмотрим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q)=\left\{P(x)\in\mathbb{Z}[x]: \deg \mathrm{P}\le n, H(P)\le Q\right\}. \quad (2)$$

Пусть задан некоторый интервал $I_1 \subset I$ длины $\mu I_1 = Q^{-\gamma}$, $\gamma \ge 0$. При каких условиях на γ можно утверждать, что в классе $\mathcal{P}_n(Q)$ найдется полином $P(x)$, корень которого принадлежит I_1?

В дальнейшем через μA будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A\subset\mathbb{R}$, #B – количество элементов конечного множества B, $c_1=c_1(n), c_2(n),\ldots$ – величины, зависящие только от n и не зависящие от H и Q. В работе [3] были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для любого рационального числа p/q существует интервал I_2 с центром в точке p/q и мерой $\mu I_2 = c_1 q^{-n} Q^{-1}$, не содержащий ни одного действительного алгебраического числа α степени $n\ge 1$ и высоты $H(\alpha)=Q$.

Теорема 2. Для $c_2 > c_0(n)$ и $Q > Q_0(n)$ в любом интервале I_3, $\mu I_3 > c_2 Q^{-\gamma}$, $0\le\gamma\le 1$, содержится не менее $c_3 Q^{n+1}\mu I_3$ алгебраических чисел $\alpha, \deg\alpha = n, H(\alpha)\le Q$.

В работе [1] были найдены оценки снизу для количества точек $z=(\alpha_1,\alpha_2)$ с действительными сопряженными алгебраическими числами α_1, α_2, находящимися в полосе шириной $c_4 Q^{-\gamma_1}$, $0\le\gamma_1\le\frac{1}{2}$ возле гладкой кривой $y=f(x)$.

Отметим работу [2] где доказано, что существует не менее $c_5 Q^{\frac{n+1}{3}}$ полиномов, у которых два сопряженных корня находятся на расстоянии $c_6 Q^{-\gamma_3}$, $0\le\gamma_2\le\frac{n+1}{3}$. Также найдены оценки снизу для количества полиномов $P(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$ и пар полиномов $(T_1(x),T_2(x))\in\mathcal{P}_n^2(Q)$ с заданными дискриминантами и результантами [3]. Отметим также [4; 5] обобщения указанных результатов на поля комплексных и p-адических чисел.

В работе [6] получены результаты о распределении алгебраических чисел второй и третьей степени. В данной работе будут получены новые результаты о распределении алгебраических точек, причем впервые будут получены оценки сверху для их количества.

Теорема 3. Существует величина c_6, при которой в любом интервале $I_4, \mu I_4 = Q^{-\gamma_3}, 0\le\gamma_3\le 1$ лежит не более $c_6 Q^{n+1}\mu I_4$ алгебраических точек α полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha\in I_4$

$$\#\left\{P(x)\in\mathcal{P}_n(Q), P(\alpha)=0\right\} > c_6 Q^{n+1}\mu I_4 = c_6 Q^{n+1-\gamma_3}. \quad (3)$$

Если полином $P(x)$ имеет на I_4 больше одного корня, оставим только один из них, от чего в неравенстве (3) несколько изменится только величина c_6. Зафиксируем вектор $\vec{b}_1 = (a_n, \dots, a_1)$, состоящий из коэффициентов полинома $P(x)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ подкласс, состоящий из полиномов $P(x)$, у которых совпадают коэффициенты при $x, x^2 \dots, x^n$. Ясно, с учетом (3), что

$$\# \mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1) > c_7 Q^{1-\gamma_3}. \tag{4}$$

Разложим каждый полином $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ на интервале I_4 в ряд Тейлора в окрестности корня $\alpha_1 = \alpha_1(P)$. Имеем

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1) + \tfrac{1}{2} P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^n. \tag{5}$$

Так как $|x - \alpha_1| \le Q^{-\gamma_3}$, а $x \in [0, 1)$, то $|P'(\alpha_1)| < n^2 Q$,

$$|P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)| < n^2 Q^{1-\gamma_3}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} \left| P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2 \right| \le \frac{1}{2} n^3 Q^{1-2\gamma_3} < n Q^{1-\gamma_3}, \quad Q > Q_0(n). \tag{7}$$

Остальные члены разложения оцениваются правой частью в (7), и поэтому из (5)–(7) получаем при $\forall x \in I_4$ и достаточно большом Q

$$|P(x)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}. \tag{8}$$

Занумеруем все полиномы из $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ так $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$

$$k > \frac{1}{2} c_7 Q^{1-\gamma_3} \tag{9}$$

и образуем новые полиномы $R_j(x) = P_j(x) - P_0(x), 1 \le j \le k$. Полиномы $R_j(x)$ – различные целые числа, отличные от нуля, и

$$|R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}. \tag{10}$$

Из (9) следует, что среди них есть число l,

$$|\, l \,| > \frac{1}{4} c_7 Q^{1-\gamma_3}. \tag{11}$$

Если $c_7 > 16n^2$, то неравенства (10) и (11) противоречивы, что доказывает противоречивость неравенства (3).

Теорема 4. Пусть β – действительный корень своего минимального полинома $T_k(x)$, $\deg T_k(x) = k$, $1 \le k < n$, $H(T_k(x)) < Q^{\gamma_4}$, $0 \le \gamma_4 \le 1$. Тогда существует достаточно малая величина c_8, при которой на интервале I_5, $\mu I_5 = c_8 Q^{-\gamma_4 n - k}$ с центром в точке β нет корней многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

В доказательстве теоремы 4 будет использована следующая лемма [7].

Лемма. Пусть $P(x)$ – многочлен, $\deg P = n$, с корнями $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ и старшим коэффициентом a_n. Тогда для любого набора корней $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_k}$,

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, $k \le n$, справедливо неравенство

$$\left|\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}\right| < c_9 \cdot \frac{H(P)}{|a_n|}.$$

Доказательство теоремы 4.

Предположим, что корень $\alpha \ne \beta$ полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ лежит на интервале I_4. Тогда α – корень неприводимого многочлена $P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Многочлены $T_k(x) = l_k x^k + \ldots + l_1 x + l_0$ и $P_1(x) = d_n x^n + \ldots + d_1 x + d_0$ не имеют общих корней, и поэтому их результант $R(P_1(x), T_k(x)) \ne 0$. Из определения результанта имеем

$$1 \le |R(P_1, T_k)| < l_k^n d_n^k \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} |\alpha_i - \beta_j|. \tag{12}$$

Для оценки произведения в (12) выделим сомножитель $|\alpha - \beta|$, а остальные сомножители оценим с помощью леммы.

Получим

$$\begin{aligned} 1 \le l_k^n d_n^k c_8 Q^{-\gamma_4 n - k} c_{10} \left(\frac{H(T_k)}{l_k}\right)^n c_{11} \left(\frac{H(P_1)}{d_n}\right)^k < c_8 c_{12} H(T_k)^n H(P_1)^k Q^{-\gamma_4 n - k} < \\ < c_8 c_{12} Q^{\gamma_4 n + k} Q^{-\gamma_4 n - k} < c_8 c_{12}. \end{aligned} \tag{13}$$

Возьмем $c_8 = c_{12}^{-1}$ и получим противоречие.

Теорема 4 может быть обобщена на многомерный случай.

Теорема 5. Существует величина c_{13} и куб $S \subset \mathbb{R}^k, 2 \le k < n$ со стороной $c_{13} Q^{-1}$, внутри которого нет сопряженных алгебраических точек $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k)$ никакого многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\deg P \ge k$.

Доказательство.

Возьмем точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{k+1}\right) \in \mathbb{R}^k$ и рассмотрим куб $\mathrm{K} = \left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) : \prod_{l=2}^{k+1} \left|x - \frac{1}{l}\right| < c_{13} Q^{-1}\right\}$. Пусть точка $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k)$, порожденная многочленом $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, лежит в *S*. Тогда $\left|\alpha_{l-1} - \frac{1}{l}\right| < c_{13} \cdot Q^{-1}$. Результант целочисленных многочленов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad T(x) = (k+1)! \cdot \prod_{l=2}^{k+1} \left|x - \frac{1}{l}\right|$$

отличен от нуля. Имеем

$$1 \le |R(T, P)| \le a_k^n (k!)^n \prod_{\substack{2 \le l \le k+1 \\ 1 \le j \le n}} \left|\frac{1}{l} - \alpha_j\right|. \tag{14}$$

Для оценки произведения в правой части (14) оценим

$$\left|\frac{1}{2}-\alpha_1\right|\cdot\left|\frac{1}{3}-\alpha_2\right|\cdots\left|\frac{1}{k+1}-\alpha_k\right|<c_{13}^k Q^{-k} \quad .$$

Остальные сомножители оценим, как в (13), с помощью леммы. Получим

$$1\le c_{13}^k c_{14} Q^{-k}(k!)^n H(P)^k < c_{13}^k c_{15} Q^{-k+k} = c_{13}^k c_{15}. \tag{15}$$

При $c_{13}=0{,}5c_{15}^{-\frac{1}{k}}$ неравенство (15) противоречиво, что доказывает теорему 5.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 3.

Теорема 6. При любом $0\le\gamma_5<1$ в квадрате $T=I_1\times I_2\subset[0{,}1)^2$, $\mu I_j=Q^{-\gamma_5}$ при подходящей величине c_{16} справедливо неравенство

$$\#\left\{\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\in T:\exists P(x)\in\mathcal{P}_n(Q),P(\alpha_j)=0,\,j=1{,}2\right\}<c_{16}Q^{n+1-2\gamma_5}. \tag{16}$$

Доказательство. Предположим, что верно неравенство, противоположное неравенству (16). Разложим многочлен $P(x)$ по каждой переменной x_j на интервале $I_j, j=1{,}2$ в ряд Тейлора.

$$P(x_j)=P(\alpha_j)+P'(\alpha_j)\cdot(x_j-\alpha_j)+\tfrac{1}{2}P''(\alpha_j)\cdot(x_j-\alpha_j)^2+\ldots+\frac{1}{n!}P^{(n)}(\alpha_j)\cdot(x_j-\alpha_j)^n. \tag{17}$$

В (17) корень α_j лежит на отрезке $I_j, x_j\in I_j$, $0\le x_j\le 1$ и $P(\alpha_j)=0,\ j=1{,}2$. Поэтому при достаточно большом Q

$$\left|P'(\alpha_j)\cdot(x-\alpha_j)\right|<n^2Q^{1-\gamma_5},$$

$$\frac{1}{2}\left|P''(\alpha_j)\cdot(x-\alpha_j)^2\right|<n^3Q^{2(1-\gamma_5)}<nQ^{1-\gamma_5},$$

$$\left|\frac{1}{s!}P^{(s)}(\alpha_j)\cdot(x-\alpha_j)^s\right|<n^sQ^{s(1-\gamma_5)}<nQ^{1-\gamma_5}, 3\le j\le n \ ,$$

$$\left|P(x_j)\right|<2n^2Q^{1-\gamma}. \tag{18}$$

Зафиксируем вектор $\vec{b}_2=(a_n,\ldots,a_2)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\left\{\vec{b}_2\right\}\le(2Q+1)^n<2^{n+1}Q^{n-1}. \tag{19}$$

Множество полиномов $P(x)$ с одним и тем же вектором $\vec{b}_2$ обозначим через $\mathcal{P}_n(Q,\vec{b}_2)$. Занумеруем все полиномы $P(x):P_0(x),P_1(x),\ldots,P_s(x)$ из $\mathcal{P}_n(Q,\vec{b}_2)$. Согласно предположению в начале доказательства

$$s > 0{,}5c_{16}Q^{2(1-\gamma_5)}. \quad (20)$$

Образуем новые s полиномов . Это различные целочисленные полиномы, у которых, согласно определению $\mathcal{P}_n(Q,\vec{b}_2)$, коэффициенты при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2$ совпадают. Из (18) следует

$$\left|R_j(x)\right| < 4n^2Q^{1-\gamma_5}, \deg R_j(x) \le 1, H(R_j) \le 2Q, 1 \le j \le s. \quad (21)$$

Поскольку величина s по (20) велика, то среди коэффициентов $R_j(x) = a_jx + b_j$ должны быть коэффициенты, большие

$$\max\left(\left|a_j\right|,\left|b_j\right|\right) > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_5}. \quad (22)$$

Возьмем многочлен $R_j(x)$, у которого один из коэффициентов удовлетворяет неравенству (22). Пусть это многочлен $ax + b$ и $a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_5}$. Воспользуемся (18) и составим систему неравенств

$$\left|ax_1 + b\right| < 2n^2Q^{1-\gamma_5}$$

$$\left|ax_2 + b\right| < 2n^2Q^{1-\gamma_5}, \quad a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_5}. \quad (23)$$

Так как по предположению координаты x_1 и x_2 отделены, $\left|x_1 - x_2\right| \ge \delta$, то заменим (23) системой уравнений

$$ax_1 + b = \Theta_1(x_1)Q^{1-\gamma_5} = t_1$$
$$ax_2 + b = \Theta_2(x_2)Q^{1-\gamma_5} = t_2, \quad \left|\Theta_j(x_j)\right| \le 2n^2.$$

По правилу Крамера имеем

$$2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_5} \le |a| = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} = \left|\frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}\right| \le \frac{4n^2Q^{1-\gamma_5}}{|\delta|} = 4n^2\delta^{-1}Q^{1-\gamma_5} \quad \text{и}$$

$$2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}} < 4n^2\delta^{-1}. \quad (24)$$

Неравенство (24) при $c_{16} > 2^8n^4\delta^{-2}$ противоречиво. Это означает, что теорема 6 верна при $c_{16} = 2^9n^4\delta^{-2}$.

Теорема 6 справедлива при любом $1 \le k \le n-1$, что можно доказать аналогично.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Кемеш О. Н.*** О колличестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой / О. Н. Кемеш, И. М Морозова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(49). – 2017. – С. 12–16.
2. ***Бересневич, В. В.*** Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.
3. ***Рыкова, О. В.*** О количестве рациональных точек с ограниченными знаменателями в коротких интервалах различных типов / О. В. Рыкова, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(47). – 2016. – С. 28–31.
4. ***Берник, В. И.*** Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем., 79:1 (2015), 21–42.
5. ***Дудко, Д. В.*** О малых значениях монических многочленов на коротких интервалах / Д. В. Дудко, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – № 1(29). – 2008. – С. 155–161.
6. ***Шамукова, Н. В.*** О распределении алгебраических чисел второй и третьей степени / Н. В. Шамукова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 2(38). – 2011. – С. 36–43.
7. ***Budarina N., Dickinson D., Jin Yuan.*** On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p-adic metrics // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, № 3. – P. 469–476.

Поступила в редакцию 19.12.2017 г.

Контакты: +375 222 28-35-85 (Сакович Наталья Владимировна)
+375 29 315 65 81 (Ламчановская Марина Валерьевна)

Lamchanovskaya M., Sakovich N., Shamukova N. TWO-SIDED EVALUATIONS FOR A NUMBER OF POINTS WITH ALGEBRAIC COORDINATES IN *K*-DIMENSIONAL CUBES OF SMALL SIZE.

The article views the upper bound for the real algebraic conjugate numbers (α_1, α_2) *of a degree* $n \geq 2$ *and a height Q, which lie in the square* $T \subset [0,1)^2$ *of the size* $Q^{-\gamma}, 0 \leq \gamma < 1$.

Keywords: root of polynomial, algebraic number, Diophantine inequality system, order of approximation, set cover.