Определим множества точек с координатами, являющимися комплексными сопряженными алгебраическими числами ограниченной степени и высоты [2]:

$$\mathbb{A}^2(Q) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2 : \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \leqslant n,\ H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = H(P) \leqslant Q\}. \tag{3}$$

$$M_f^n(Q, \gamma, K) = \{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{A}^2(Q) :\ \alpha_1 \in K, |f(\alpha_1) - \alpha_2| < c_1 Q^{-\gamma}\}, \tag{4}$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Рассмотрим разбиение множества $M_f^n(Q, \gamma, K) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Pi_j$:

$$\Pi_j = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 :\ z_1 \in K_j, |f(z_1) - z_2| < c_3 Q^{-\gamma}\},\ j \in \{1, t\}, \tag{5}$$

$$\Pi_j \cap \{|z_1 - z_2| \leqslant \delta,\ |z_1 - \bar{z}_2| \leqslant \delta,\ |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \leqslant \delta\ \} = \emptyset,\ \delta > 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть множество $K_n(\Pi_j, Q)$ - это множество точек $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{C}^2$, которые являются корнями $P \in P_n(Q)$ и $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Pi_j$. Тогда при $0 < \mu_i < \frac{1}{2}$, $\mu_i = \gamma$ $i = 1, 2$ выполняется неравенство:*

$$\#K_n(\Pi_j, Q) \gg Q^{n+1-\mu_1-\mu_2} \mu \Pi_j. \tag{7}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений - Москва: ИЛ, 1961г. 213 с.

2. Берник В. И., Гетце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах// Изв. РАН. Сер. матем., том 79, выпуск 1, 2015 г. С. 21-42.

Институт подготовки научных кадров Национальной Академии наук Беларуси
Институт математики Национальной Академии наук Беларуси
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Researchers Training Institute of National Academy of Sciences of Belarus
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus
Yanka Kupala State University of Grodno

УДК 511.42

Малые значения целочисленных полиномов без общих корней и результанты[1]

Н. В. Бударина (Ирландия, г. Дандолк),
Д. В. Васильев, М. А. Калугина, А. С. Кудин (Беларусь, г. Минск)
buda77@mail.ru, vasilyev@im.bas-net.by, marina_kalugina@list.ru, knxd@yandex.ru

On small values of integral polynomials without common roots and resultants

N. V. Budarina (Ireland, Dundalk),
D. V. Vasilyev, M. A. Kalugina, A. S. Kudin (Belarus, Minsk)
buda77@mail.ru, vasilyev@im.bas-net.by, marina_kalugina@list.ru, knxd@yandex.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф17-101

В монографии А. О. Гельфонда [1] приведена одна лемма, которая утверждает, что два целочисленных полинома без общих корней не могут одновременно принимать слишком малые ненулевые значения в одной точке. Гельфонд использовал ее в своем методе доказательства трансцендентности некоторых чисел. В дальнейшем данная лемма и утверждения, ее усиливающие, нашли широкое применение в метрической теории чисел.

Будем рассматривать целочисленные многочлены $P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Обозначим как $H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ высоту многочлена и как $\deg P = n$ его степень. Множества целочисленных многочленов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\mathcal{P}_n := \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \deg P \le n\},$$
$$\mathcal{P}_n(Q) := \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Будем использовать символ Виноградова

$$f \ll_{v_1, v_2, \ldots} g,$$

если существует величина $c(v_1, v_2, \ldots) > 0$, не зависящая от f и g такая, что $f < c(v_1, v_2, \ldots) g$. Если $f \ll_{v_1, v_2, \ldots} g$ и $g \ll_{v_1, v_2, \ldots} f$, будем писать $f \asymp_{v_1, v_2, \ldots} g$.

Вышеупомянутую лемму Гельфонда можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1 ([1]). *Пусть $\delta > 0$ – некоторое действительное число, n_1, n_2 – натуральные числа, $Q > Q_0(n, \delta)$ – достаточно большое действительное число. Далее пусть*

$$P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}(Q^{\mu_1}), \quad P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}(Q^{\mu_2}),$$

$\mu_1, \mu_2 > 0$ – полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторого трансцендентного α выполняются неравенства $|P_1(\alpha)| < Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)| < Q^{-\tau_2}$, то

$$\min(\tau_1, \tau_2) < n_1 \mu_2 + n_2 \mu_1 + \delta.$$

В дальнейшем лемма Гельфонда была усилена В. И. Берником [2], что позволило ему доказать гипотезу А. Бейкера и В. Шмидта [3] о точном значении размерности Хаусдорфа множества всех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует бесконечное число полиномов $P \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих неравенству $|P(x)| < H(P)^{-w}$, $w > n$.

Теорема 1 ([2]). *Пусть $\delta > 0$ – некоторое действительное число, n – натуральное, $Q > Q_0(n, \delta)$ – достаточно большое действительное число. Далее пусть $P_1(x)$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q^{\mu})$, $\mu > 0$ – полиномы без общих корней. Тогда, если для всех x из некоторого интервала $I \subset (-n, n)$, $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства*

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0,$$

то

$$\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta.$$

Также в работе К. И. Тищенко [4] доказывается аналог леммы Гельфонда с использованием производных первого порядка, что позволило автору добиться улучшения результатов Е. Вирзинга [5].

Некоторые ограничения для применения теоремы 1 возникают из-за необходимости рассматривать одинаковые оценки степени и высоты полиномов. Мы развиваем методы Тищенко [4] и усиливаем теорему 1, используя производные более высоких порядков и рассматривая полиномы с разными оценками степени и высоты.

Теорема 2. *Пусть $\delta > 0$ – некоторое действительное число, $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n$ – натуральные числа, $Q > Q_0(n, \delta)$ – достаточно большое действительное число, $P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}$ – полиномы без общих корней, $H(P_1(x)) \ll_n Q^{\mu_1}$, $H(P_2(x)) \ll_n Q^{\mu_2}$, $\mu_1, \mu_2 > 0$. Тогда, если для всех x из некоторого интервала $I \subset (-c_1(n), c_1(n))$, $|I| \approx_n Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, выполняются неравенства $|P_1(x)| \ll_n Q^{-\tau_1}$, $|P_2(x)| \ll_n Q^{-\tau_2}$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, то*

$$\widehat{\tau} + 2\sum_{j=1}^{n_1-1} \max(\widehat{\tau} - j\eta, 0) + (1 + n_2 - n_1)\max(\widehat{\tau} - n_1\eta, 0) <$$
$$< n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta,$$

где

$$\widehat{\tau} = \min(\tau_1 + \mu_1, \tau_2 + \mu_2).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — Москва: ГИТТЛ, 1952. 224 с.
2. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // Acta Arith. 1983. Том 42 №3. С. 219–253.
3. Baker A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. (3). 1970. Том 21. С. 1–11.
4. Tishchenko K. I. On approximation to real numbers by algebraic numbers // Acta Arithmetica. 2000. Том 94 № 1. С. 1–24.
5. Wirsing E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades // J. Reine Angew. Math. 1961. Том 206. С. 67–77.

Технологический институт Дандолка
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Dundalk Institute of Technology
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

УДК 511.361

О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля

П. Л. Иванков (г. Москва)

—

On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field

P.L.Ivankov (Moscow)

—